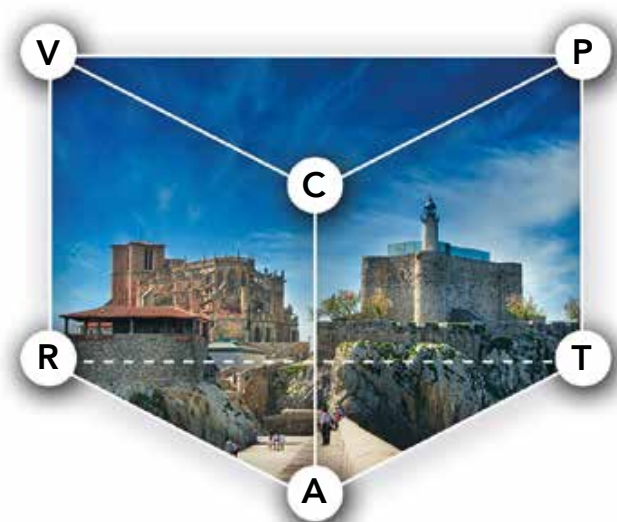


ETM8

Actas del Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático

Actas ETM8 | Actes ETM8 | Proceedings ETM8



Steven Van Vaerenbergh, Laurent Vivier
Ferdinando Arzarello, Jesús Victoria Flores Salazar, Jorge Gaona Paredes,
Patrick Gibel, Inés M. Gómez-Chacón, Alain Kuzniak, Michela Maschietto,
Elizabeth Montoya Delgadillo, Assia Nechache, Konstantinos Nikolantonakis,
Rosa Elvira Páez Murillo, Philippe R. Richard, M. Pilar Vélez, Fabienne Venant
(editores)

21-25 de octubre 2024
Castro Urdiales, España

Steven Van Vaerenbergh es Profesor Titular de Universidad en el área de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Cantabria. Su investigación se centra en la formación del profesorado de matemáticas, la atención a la diversidad y el uso de entornos tecnológicos para el desarrollo de metodologías de aprendizaje adaptadas. Ha publicado más de 40 artículos en revistas científicas con revisión por pares y ha presentado más de 60 contribuciones en congresos internacionales. Ha participado en diversos proyectos de investigación y transferencia y colabora activamente en comités científicos internacionales.

Laurent Vivier es profesor de Didáctica de la Matemática en la Universidad Paris Cité. Doctor en Matemáticas por la Universidad de Tours y con Habilitación para Dirigir Investigaciones (HDR) en Didáctica de la Matemática, ha desarrollado una intensa actividad investigadora y de formación doctoral, dirigiendo diez tesis doctorales y participando en numerosos tribunales internacionales. Colabora activamente en proyectos de investigación con instituciones de Chile, Canadá, España, México y Perú. Ha desempeñado responsabilidades científicas en múltiples congresos internacionales y es editor jefe de la revista *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Ha realizado aportaciones a la Teoría de los Espacios de Trabajo Matemático.

ACTAS / ACTES / PROCEEDINGS

OCTAVO SIMPOSIO SOBRE EL ESTUDIO DEL TRABAJO MATEMÁTICO

HUITIÈME SYMPOSIUM D'ÉTUDE SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

EIGHTH SYMPOSIUM ON THE STUDY OF MATHEMATICAL WORK



CONSEJO EDITORIAL

D. Luigi dell'Olio
*Presidente. Vicerrector de Investigación,
Transferencia y Doctorado,
Universidad de Cantabria*

D. Miguel Ángel Bringas Gutiérrez
*Facultad de Ciencias Económicas y
Empresariales, Universidad de Cantabria*

Berta Casar Martínez
*Instituto de Biomedicina y Biotecnología
de Cantabria (IBBTEC),
Universidad de Cantabria*

Dña. Macarena García-Avello
Fernández-Cueto
*Facultad de Educación, Universidad de
Cantabria*

D. Guillermo Gómez-Ceballos
*Instituto Tecnológico de Massachusetts
(MIT)*

D. Carlos Marichal Salinas
*Centro de Estudios Históricos de
El Colegio de México*

D. Marcelo Norberto Rougier
*Historia Económica y Social Argentina,
UBA y CONICET (IIEP)*

D. Jónatan Piedra Gómez
*Instituto de Física de Cantabria (IFCA),
Universidad de Cantabria-CSIC*

D. Luis Sánchez González
*Ingeniería de Comunicaciones (DICOM),
Universidad de Cantabria*

D. Jorge Luis Tomillo Urbina
*Facultad de Derecho (SANFI),
Universidad de Cantabria*

Dña. Sofía Torallas Tovar
*Escuela de Estudios Históricos del Instituto de
Estudios Avanzados, Princeton University*

Dña. Eva María Velasco Gil
*Centro Oceanográfico de Santander,
Instituto Español de Oceanografía*

D. Aurelio Velázquez Hernández
*Facultad de Filosofía y Letras,
Universidad de Cantabria*

Dña. Belmar Gándara Sancho
*Directora Editorial,
Universidad de Cantabria*

ACTAS / ACTES / PROCEEDINGS

OCTAVO SIMPOSIO SOBRE EL ESTUDIO DEL TRABAJO MATEMÁTICO
HUITIÈME SYMPOSIUM D'ÉTUDE SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE
EIGHTH SYMPOSIUM ON THE STUDY OF MATHEMATICAL WORK

Steven Van Vaerenbergh
Laurent Vivier
Ferdinando Arzarello
Jesús Victoria Flores Salazar
Jorge Gaona Paredes
Patrick Gibel
Inés M. Gómez-Chacón
Alain Kuzniak
Michela Maschietto
Elizabeth Montoya Delgadillo
Assia Nechache
Konstantinos Nikolantonakis
Rosa Elvira Páez Murillo
Philippe R. Richard
M. Pilar Vélez
Fabienne Venant
(editores)

Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático (8° : 2024 : Castro Urdiales), autor

ETM8 : actas del octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático : actas ETM8 = actes ETM8 = proceedings ETM8 : 21-25 de octubre 2024, Castro Urdiales, España / Steven Van Vaerenbergh, Laurent Vivier [y otros catorce] (editores). – Santander : Editorial de la Universidad de Cantabria, 2026.

589 páginas : ilustraciones. – (Difunde ; 282)

Textos en español, francés e inglés.

ISBN 978-84-19897-40-4

I. Matemáticas-Didáctica-Congresos. I. Van Vaerenbergh, Steven, editor de compilación. II. Vivier, Laurent, editor de compilación. III. Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático. IV. Huitième Symposium d'Étude sur le Travail Mathématique. V. Eighth Symposium on the Study of Mathematical Work.

51:37.02(063)

THEMA: YPM, PB, UYQ, GT, 4C

Esta edición es propiedad de la EDITORIAL DE LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA, cualquier forma de reproducción, distribución, traducción, comunicación pública o transformación sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Digitalización: Manuel Ángel Ortiz Velasco [emeaov]

© Editores: Steven Van Vaerenbergh [Universidad de Cantabria], Laurent Vivier [Université Paris Cité], Ferdinando Arzarello [Università di Torino], Jesús Victoria Flores Salazar [Pontificia Universidad Católica del Perú], Jorge Gaona Paredes [Universidad de Playa Ancha], Patrick Gibel [Université de Bordeaux], Inés M. Gómez-Chacón [Universidad Complutense de Madrid], Alain Kuzniak [Université de Paris Cité], Michela Maschietto [Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia], Elizabeth Montoya Delgadillo [Pontificia Universidad Católica de Valparaíso], Assia Nechache [CY Cergy Paris Université], Konstantinos Nikolantonakis [University of Western Macedonia], Rosa Elvira Páez Murillo [Universidad Autónoma de la Ciudad de México], Philippe R. Richard [Université de Montréal], M. Pilar Vélez [Universidad Nebrija], Fabienne Venant [Université du Québec à Montréal]

© Autores

© Editorial de la Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros, s/n - 39005 Santander. Cantabria (España)
Tfno.: +34 942 201 087
ISNI: 0000 0005 0686 0180
www.editorial.unican.es

ISBN: 978-84-19897-40-4 (PDF)

DOI: <https://doi.org/10.22429/Euc2026.005>

Hecho en España-*Made in Spain*

Santander, 2026

Índice / Table des Matières / Table of Contents

INTRODUCCIÓN	13
INTRODUCTION	17
INTRODUCTION	21
L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE ET LE NOUVEAU TRAVAIL MATHÉMATIQUE	25
<i>Philippe R. Richard, Steven Van Vaerenbergh</i>	
THÈME 1 : PERSPECTIVES ET APPROCHES THÉORIQUES SUR LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE	63
<i>Assia Nechache, Patrick Gibel</i>	
TEMA 1: PERSPECTIVAS Y ENFOQUES TEÓRICOS SOBRE EL TRABAJO MATEMÁTICO	67
<i>Assia Nechache, Patrick Gibel</i>	
Espacio de trabajo estadístico y el paradigma <i>E1</i>: nuevas perspectivas didácticas	71
<i>Pedro Vidal-Szabó</i>	
L'évolution de l'ETM probabiliste de référence au cours de l'enseignement secondaire en France	85
<i>Assia Nechache, Bernard Parzysz</i>	
Qualité et valeur du travail mathématique des étudiants à travers le regard de la théorie des ETM : la perspective du chercheur	97
<i>Alain Kuzniak, Assia Nechache</i>	
Implementación de un diseño didáctico para introducir la integral definida en estudiantes de ingeniería desde dos perspectivas teóricas: ETM y TAD	111
<i>Pilar Carrasco Espinoza, Katherine Machuca Pérez</i>	
Paradigmes de l'algèbre élémentaire pour l'étude du travail mathématique exemples significatifs	123
<i>Philippe Hoppenot</i>	
Visualizaciones, construcciones: ¿de qué actividades matemáticas se trata? Límites de funciones en 1^{er} año de universidad	137
<i>Fabrice Vandebrouck, Macarena Flores González</i>	
Vers l'ETM de référence en nombres et géométrie : le cas du système éducatif costaricien	147
<i>Norma Segura-Corella</i>	
Conceptualized mathematical work	159
<i>Alejandro Cabrera, Elizabeth Montoya, Fabrice Vandebrouck, Laurent Vivier</i>	

TEMA 2. ESTUDIO DE LOS SIGNOS, LAS HERRAMIENTAS Y EL DISCURSO, Y DE LA EVOLUCIÓN DINÁMICA DE SUS INTERACCIONES MUTUAS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO	173
<i>Michela Maschietto, Ferdinando Arzarello, Jorge Gaona, Rosa Elvira Páez Murillo</i>	
THÈME 2. ÉTUDE DES SIGNES, DES OUTILS ET DU DISCOURS, ET DE L'ÉVOLUTION DYNAMIQUE DE LEURS INTERACTIONS MUTUELLES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE	181
<i>Michela Maschietto, Ferdinando Arzarello, Jorge Gaona, Rosa Elvira Páez Murillo</i>	
Espacio de trabajo matemático personal de profesores de matemática en formación inicial ante el estudio de la geometría 3D mediante el uso de artefactos tecnológicos	189
<i>Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo</i>	
Sessions de laboratoire avec les machines mathématiques pour les transformations géométriques au collège	201
<i>Beatrice Battilani, Michela Maschietto</i>	
Contrepoint technologique et contrôle du référentiel dans le travail mathématique instrumenté	213
<i>Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard</i>	
Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'ETM collectif	227
<i>Jorge Gaona, Catalina Palacios Bezama, Leonard Sánchez</i>	
Émergence de l'art de l'argumentation : l'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques	239
<i>Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard</i>	
De la page au code : comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative	251
<i>Dominique Laval</i>	
El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales	265
<i>Rosa-Elvira Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández, Magally Martínez</i>	
Analyse d'une ingénierie didactique articulant activités mathématiques et algorithmiques - étude des formes et fonctions des raisonnements des élèves	277
<i>Maryna Rafalska, Patrick Gibel</i>	

TEMA 3: GÉNESIS Y DESARROLLO DEL TRABAJO MATEMÁTICO:	
PAPEL DEL PROFESOR, DEL FORMADOR, DEL GRUPO Y DE LAS INTERACCIONES	291
<i>Inés M. Gómez-Chacón, Fabienne Venant, Laurent Vivier</i>	
THÈME 3 : GENÈSE ET DÉVELOPPEMENT DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE : RÔLE DE L'ENSEIGNANT, DU FORMATEUR, DU COLLECTIF ET DES INTERACTIONS	297
<i>Inés M. Gómez-Chacón, Fabienne Venant, Laurent Vivier</i>	
ETM et action didactique conjointe : regards croisés sur l'enseignant intégrant une tâche de programmation informatique en classe de mathématiques	303
<i>Fabienne Venant, Michèle Couderette</i>	
ETM idóneo potencial y conocimiento especializado en el diseño de propuestas de enseñanza en la formación inicial	315
<i>Paula Verdugo-Hernández, Carolina Henríquez-Rivas, Gonzalo Espinoza-Vásquez, Nuria Climent</i>	
Conocimientos teóricos y prácticos en el espacio de trabajo matemático idóneo bajo instancias colaborativas de la tríada formativa con uso de la calculadora	327
<i>Romina Menares Espinoza, Laurent Vivier</i>	
Travail mathématique des élèves et développement de connaissances didactiques de professeurs de mathématiques débutants	339
<i>Christine Choquet</i>	
Examination of mathematical work performed in mathematical modeling task in the light of MWS: the case of pre-service elementary mathematics teachers	349
<i>Ozan Deniz Kiyici, Filiz Tuba Dikkartin Övez</i>	
Amener les élèves à problématiser en mathématiques : enjeux et limites	363
<i>Sylvie Grau</i>	
ETM idóneo de un grupo de profesores en formación inicial en el dominio de la probabilidad	375
<i>Katherine Machuca Pérez, Elizabeth Montoya Delgadillo</i>	
Interpretación del condicional por futuros profesores de educación primaria	387
<i>Aránzazu Dolz, Inés M. Gómez-Chacón</i>	
Selección de tareas que fomentan diferentes tipos de significados y trabajo matemático para la función	399
<i>Gonzalo Espinoza-Vásquez, Paula Verdugo-Hernández, Carolina Henríquez-Rivas, Nuria Climent</i>	
Investigating GAI's role in shaping mathematics work and identity within a university didactic system	411
<i>Annamaria Miranda</i>	

Designing situations to develop mathematical flexibility and identify students' emotions	425
<i>Mónica Arnal-Palacián, Nuria Begué, Mónica Marbán</i>	
Enrichir collectivement les ETM idoines, une expérimentation de type lesson study sur 3 ans	429
<i>Nicolas Grenier-Boley, Blandine Masselin, Laurent Vivier, Jordan Martin, Caroline Beaudet</i>	
Genèse d'un ETM idoine de formation original sur le nombre pour de futurs professeurs d'écoles	433
<i>Konstandinos Nikolantonakis, Florence Peteers, Laurent Vivier</i>	
THÈME 4 : LE RÔLE DES TÂCHES ET DES SITUATIONS DIDACTIQUES DANS LA FORMATION DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE	437
<i>Alain Kuzniak, Kostas Nikolantonakis, Elizabeth Montoya Delgadillo, Jesús Flores Salazar</i>	
TOPIC 4. ROLE OF TASKS AND DIDACTIC SITUATIONS IN THE CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL WORK	441
<i>Alain Kuzniak, Kostas Nikolantonakis, Elizabeth Montoya Delgadillo, Jesús Flores Salazar</i>	
TEMA 4. EL PAPEL DE LAS TAREAS Y SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA FORMACIÓN DEL TRABAJO MATEMÁTICO	445
<i>Alain Kuzniak, Kostas Nikolantonakis, Elizabeth Montoya Delgadillo, Jesús Flores Salazar</i>	
Diseño de situaciones didácticas: una reflexión en el dominio de la probabilidad	449
<i>Katherine Machuca Pérez, Elizabeth Montoya Delgadillo</i>	
Description d'issues équiprobables et introduction en classe de la loi binomiale	461
<i>Jannick Trunkenwald</i>	
The inverse function under the prism of the Mathematical Working Space model	473
<i>Kostas Nikolantonakis, Elisavet Gemenetzi</i>	
La derivada y sus conexiones en contextos económicos, desde el espacio de trabajo matemático	485
<i>Flor Isabel Carrillo Lara</i>	
Análisis del trabajo matemático de estudiantes de primaria a partir de una tarea abierta sobre funciones en un entorno tecnológico	497
<i>Catalina Palacios Bezama, Jorge Gaona Paredes</i>	

Conception d'une tâche géométrique pour amorcer le développement du raisonnement déductif d'élèves de 6e année du primaire au Québec : analyse d'un ETM idoine potentiel	509
<i>Sandrine Michot</i>	
Tareas emblemáticas adecuadas: estudio de las características para su diseño	521
<i>Darlis Panqueban, Carolina Henríquez-Rivas</i>	
Similitude, histoire des mathématiques et espace de travail mathématique en géométrie personnelle des élèves du collège	533
<i>Konstantinos Nikolantonakis, Polymnia Andreadou</i>	
Tareas sobre semejanza de figuras planas en libros de texto con uso de tecnología: ¿qué trabajo matemático propician?	547
<i>Denisse Avilés-Henn, Carolina Henríquez-Rivas</i>	
Résolutions d'équations du premier degré en IUT GEII - enrichir l'ETM personnel des étudiants	561
<i>Philippe Hoppenot</i>	
Étude des variations de contrats fortement didactiques dans des ETM idoines autour de « l'aire de baignade »	575
<i>Alain Kuzniak, Blandine Masselin</i>	

TEMA 2. ESTUDIO DE LOS SIGNOS, LAS HERRAMIENTAS Y EL DISCURSO, Y DE LA EVOLUCIÓN DINÁMICA DE SUS INTERACCIONES MUTUAS EN EL TRABAJO MATEMÁTICO

Michela Maschietto¹, Ferdinando Arzarello²,
Jorge Gaona³, Rosa Elvira Páez Murillo⁴

¹Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (Italia)

²Università di Torino (Italia)

³Universidad de Playa Ancha (Chile)

⁴Universidad Autónoma de la Ciudad de México (México)

INTRODUCCIÓN

Este tema se enfoca en el estudio de las herramientas promotoras del trabajo matemático, los signos que emergen en el desarrollo de la tarea y su relación con el discurso. La atención se centra en sus evoluciones y sus interacciones en el trabajo matemático, más allá de las cuestiones ya abordadas en simposios anteriores sobre sus génesis y coordinación.

COMUNICACIONES

En este grupo se reflexionó alrededor de las siguientes ocho comunicaciones

Título de la presentación	Autor(es)	Institución	País
Espacio de trabajo matemático personal de profesores de matemática en formación inicial ante el estudio de la geometría 3d mediante el uso de artefactos tecnológicos	Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chile
Sessions de laboratoire avec les machines mathématiques pour les transformations géométriques au collège	Beatrice Battilani, Michela Maschietto	Università di Modena e Reggio Emilia	Italia
Contrepoint technologique et contrôle du référentiel dans le travail mathématique instrumenté	Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard	Université de Montréal	Canadá
Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'ETM collectif	Jorge Gaona, Catalina Bezama Palacios, Leonard Sánchez	Universidad de Playa Ancha, LDAR Université Paris Cité	Chile / Francia

Título de la presentación	Autor(es)	Institución	País
Émergence de l'art de l'argumentation : l'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques	Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard	Universidad de Oviedo, Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad Antonio de Nebrija, Université de Montréal	España / Canadá
De la page au code : comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative	Dominique Laval	CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles	Francia
El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales	Rosa-Elvira Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández, Magally Martínez	Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma del Estado de México	México/ España
Analyse d'une ingénierie didactique articulante activités mathématiques et algorithmiques -étude des formes et fonctions des raisonnements des élèves	Maryna Rafalska, Patrick Gibel	LINE, Université Côte d'Azur, LAB-E3D, Université de Bordeaux	Francia

SÍNTESIS

El trabajo que se presentó en las comunicaciones se agrupa en los siguientes aspectos:

Uso de artefactos materiales (tangibles)

Los artefactos materiales (tangibles) desempeñaron un papel central en la activación tanto de la génesis semiótica como de la instrumental, especialmente en contextos de trabajo manipulativo o de visualización tridimensional. En el caso del juego “Tri de cartes”, diseñado y presentado por Maryna Rafalska y Patrick Gibel, los estudiantes debían ordenar un conjunto de cartas dispuestas en una cuadrícula, lo que los llevó a elaborar algoritmos de clasificación a partir de operaciones básicas restringidas como voltear, comparar y reponer. En la investigación de Fabiola Arévalo y Elizabeth Montoya sobre geometría 3D, se introdujo inicialmente una estructura de bloques manipulativa que permitía a los futuros profesores interactuar corporalmente con la figura y determinar coordenadas desde diferentes perspectivas. Posteriormente, en un rediseño de la situación didáctica, se incorporaron naranjas modeladas como esferas para propiciar la génesis discursiva: los estudiantes debían realizar un corte e identificar intuitivamente la forma de la intersección, apoyándose en instrumentos de medición. En el estudio de Rosa Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández y Magally Martínez sobre relación funcional, los artefactos empleados fueron hojas blancas y una regla, con los cuales los estudiantes construyeron un cuadrado a partir de pliegues y luego realizaron un trabajo de medición, generando sus propios conjuntos de datos experimentales para analizar la variación funcional. Por último, en el contexto de las máquinas matemáticas trabajadas por Beatrice Battilani y Michela Maschietto, el objetivo de la tarea era que los estudiantes determinaran la transformación geométrica que la máquina realizaba sobre el plano. El trabajo metodológico se desarrolló en pequeños grupos, apoyados por fichas de trabajo estructuradas que incluían preguntas específicas para guiar la exploración (¿Cómo está hecha? ¿Qué hace? ¿Cómo funciona? ¿Por qué?). El uso de este artefacto permitió activar la génesis semiótica, al interpretar los signos producidos (identificar la figura geométrica como un rombo o un cuadrado), y la génesis instrumental, tanto en la producción de dibujos simétricos como en la construcción cognitiva de la máquina como instrumento de acción.

Uso de artefactos digitales

Los artefactos tecnológicos, en particular la Inteligencia Artificial (IA), el software de Geometría Dinámica (SGD), o motores de videojuegos como Scrath, son fundamentales para abordar fenómenos como el control del referencial, la hibridación, la validación y el trabajo colectivo. En el marco de la investigación sobre geometría tridimensional de Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo, ChatGPT se incorporó como un nuevo artefacto en la fase posterior al piloto, permitiendo a los futuros profesores interactuar con la IA para contrastar y evaluar la validez de la información sobre la intersección de esferas, lo que promovió procesos de justificación y prueba. Por otra parte, Richard y colaboradores, exploraron la interacción entre IA generativa (ChatGPT, Gemini) e IA simbólica (GeoGebra Discovery), bajo el concepto de

contrapartida tecnológica. La primera se empleó en la formulación de hipótesis y el análisis cualitativo, mientras que la segunda se reservó para la comprobación rigurosa de propiedades; en este contexto, el uso de ChatGPT-4-omni, personalizado como GPT_p, permitió examinar cómo la integración de una base de conocimientos controlada (RAME) podía estabilizar el referencial de la IA generativa. Asimismo, Laval en un estudio interdisciplinario, integra procesos algorítmicos y de programación haciendo uso de Scratch para que estudiantes de primaria pasen de una lectura e interpretación de cuentos infantiles clásicos a una interacción activa con los personajes, y el desarrollo de la historia infantil.

En relación con los entornos de GeoGebra, se destacó su uso en diversas investigaciones: como applet 3D en la fase piloto de geometría, donde los estudiantes articularon vistas 2D y 3D para determinar coordenadas y, más adelante, para validar resultados obtenidos mediante ChatGPT (Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo); como recurso docente en el aula, para graficar funciones lineales y afines proyectadas en el pizarrón a partir de datos del trabajo colectivo en el trabajo de Jorge Gaona, Catalina Palacios y Leonard Sánchez; y como apoyo en el estudio de relaciones funcionales, previsto en actividades que buscaban graficar expresiones algebraicas propuestas por estudiantes (Páez y colaboradores). La versión GeoGebra Discovery, presentada por Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio y Philippe R. Richard, permitió además integrar razonamiento automatizado mediante comandos como Relation, Proof o EquationLieu, consolidando su potencial como tutor inteligente para la exploración y validación en geometría. Finalmente, se presentan los sistemas de evaluación en línea que se utilizan como plataforma para proponer tareas abiertas (con infinitas soluciones) sobre funciones, posibilitando múltiples intentos, retroalimentación personalizada y generación automática de calificaciones. Las tareas abiertas y la dirección de las y los profesores a cargo permitió la emergencia de un trabajo matemático colectivo.

Aspectos metodológicos

El diseño de las situaciones didácticas se enmarcó en la Ingeniería Didáctica, con atención especial a las variables didácticas y a la búsqueda de idoneidad del entorno de aprendizaje. En particular, la idoneidad en la integración de la Inteligencia Artificial (IA) se concibió como un principio rector, orientado a optimizar la convergencia entre el referencial y las respuestas de la IA (Richard y colaboradores). En la investigación de geometría tridimensional, el diseño iterativo permitió que los resultados de un piloto inicial —donde la tarea no favorecía la génesis discursiva— condujeran a un rediseño que incorporó objetos concretos (naranjas/esferas) y la interacción con ChatGPT, ilustrando un proceso de ajuste adaptativo propio del research design (Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo). De manera análoga, en el ámbito de las máquinas matemáticas, la adaptación de artefactos implicó revisar fichas y reformular preguntas para hacerlas más accesibles a un nuevo nivel escolar, además de incluir material auxiliar como plantillas que facilitaran el dibujo (Battilani y Maschietto).

En cuanto a los objetivos didácticos de los diseños, varios trabajos coincidieron en fomentar procesos matemáticos específicos. El desarrollo del trabajo colectivo fue central en el diseño de tareas abiertas apoyadas en plataformas de evaluación en línea, cuyo propósito era configurar un Espacio de Trabajo Matemático (ETM) colectivo. En el trabajo de Gaona y colaboradores, la plataforma de evaluación permitió múltiples intentos, retroalimentación personalizada, generando compromiso y confianza a través de la validación de sus las respuestas de los estudiantes. La dinámica de alternar fases en binomios y fases colectivas posibilitó que las diferentes respuestas alimentaran discusiones guiadas por la docente, de las cuales emergió progresivamente la noción de funciones lineales y afines. En paralelo, el objetivo de desarrollar el pensamiento computacional orientó el diseño de la situación “Tri de cartes”, articulando actividades matemáticas y algorítmicas a través de una secuencia de juegos con variables didácticas controladas. La variación de estas condiciones forzó a los estudiantes a pasar de estrategias particulares a métodos generales de clasificación, conduciendo a la construcción y análisis de algoritmos eficientes (Rafalska y Gibel). En esta misma dirección, el estudio de Laval que corresponde a un enfoque interdisciplinario combinas matemáticas, algoritmos y literatura para fomentar un aprendizaje global e integrado.

Asimismo, el estudio de la hibridación de la IA introdujo el concepto de contrapartida tecnológica, articulando la IA generativa y la IA simbólica bajo control humano. En este marco, la IA generativa (ChatGPT) se empleó para contrastar información en geometría 3D, promoviendo justificación y prueba, mientras que la IA simbólica (GeoGebra Discovery) permitió la validación formal (García-Honrado y colaboradores). Finalmente, los diseños orientados al pensamiento funcional y covariacional promovieron la construcción de las nociones de variación y dependencia. En la propuesta de Páez, los estudiantes generaron datos propios con hojas y reglas para analizar la relación entre recorrido y distancia, mientras que el debate científico grupal facilitó la consolidación de la noción de variación funcional (Páez y colaboradores).

Originalidad de las tareas propuestas

Un aspecto a destacar es la originalidad de varias de las tareas y situaciones presentadas. Algunas propuestas retomaron contextos más clásicos, como la geometría 3D (Arévalo-Meneses y Montoya), la relación funcional (Páez y colaboradores) y las funciones lineales y afines (Gaona y colaboradores). Otras buscaron innovar mediante su conexión con juegos, como la situación “Tri de cartes” que obligaba a construir algoritmos de clasificación (Rafalska & Gibel, 2025). O conexiones con la literatura juvenil como el trabajo de Laval en el que la aplicación de la Teoría de Grafos y la introducción del pensamiento algorítmico enriquece su comprensión y análisis de estos cuentos juveniles. También se estableció vínculos con el arte, como en la actividad que exploró la obra *Composition arithmétique* (1929-1930) de Théo Van Doesburg, utilizada para articular argumentación matemática en un contexto artístico-geométrico,

apoyándose en la hibridación de IA generativa y GeoGebra Discovery (Richard & García-Honrado, 2025).

Aspectos teóricos

Las ideas desarrolladas constituyen el núcleo de la reflexión teórica del Tema 2 del ÉTM8, centradas en la evolución del trabajo matemático frente a la emergencia de nuevos artefactos y en la articulación entre los distintos marcos teóricos que orientan la investigación.

En primer lugar, se observa un desplazamiento del trabajo instrumental hacia la visualización y el discurso, en la medida en que los estudiantes transitan desde la manipulación inicial de los artefactos hacia otras dimensiones del Espacio de Trabajo Matemático (ETM). Este desplazamiento se manifiesta, por un lado, hacia la visualización (génesis semiótica), como en el caso de la geometría 3D, donde los futuros profesores, al manipular bloques o utilizar la rotación en GeoGebra 3D, tendían a proyectar las imágenes tridimensionales en vistas bidimensionales para poder operar con mayor claridad. Por otro lado, se buscó propiciar el movimiento hacia el discurso (génesis discursiva), orientado a la justificación y la prueba. Así ocurrió en el rediseño de la tarea de geometría 3D, donde la integración de ChatGPT tuvo como propósito explícito promover la validación discursiva (Arévalo-Meneses y Montoya-Delgadillo). De manera análoga, en el estudio de la relación funcional, si bien se activó la génesis discursiva, esta se mantuvo anclada al control instrumental, apoyada en la medición con artefactos materiales como la regla (Páez y colaboradores).

En segundo lugar, el diseño de las tareas se apoyó en múltiples marcos teóricos, destacando la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y el propio ETM a través de su digrama. En la investigación sobre la relación funcional, las actividades se estructuraron como exploraciones guiadas seguidas de un debate científico, en línea con la TSD (Rafalska y Gibel; Páez y colaboradores). En el caso de los juegos algorítmicos, la propuesta “Tri de cartes” se diseñó bajo la lógica de la Ingeniería Didáctica de Desarrollo, que a su vez se fundamenta en la TSD, considerando el carácter adidáctico de la situación y los distintos niveles de medio (Rafalska & Gibel, 2025).

En tercer lugar, emergen trazas de un trabajo prospectivo de networking entre marcos teóricos. En este sentido, el trabajo con máquinas matemáticas se diseñó bajo la Teoría de la Mediación Semiótica, cercana a enfoques vygotskianos y a la TSD, pero se analizó posteriormente con el ETM, evidenciando la necesidad de profundizar la articulación entre ambos marcos (Battilani y Maschietto). De manera similar, la investigación de Rafalska y Gibel mostró la integración de la TSD en el diseño adidáctico con un modelo de análisis de razonamientos que conecta las funciones del razonamiento con los niveles de medio, estableciendo puentes entre el diseño de situaciones y el análisis cognitivo desde el ETM. En esta misma línea, la inclusión de la teoría de grafos, en el trabajo de Laval es útil en el marco del experimento educativo

para representar las redes en forma de grafos, donde los personajes del cuento se representan por un nodo y sus interacciones por una arista.

Las investigaciones han permitido identificar conceptos emergentes que enriquecen el ETM. Entre ellos, el ETM colectivo (Gaona y colaboradores) se plantea como un espacio donde las nociones matemáticas no se constituyen únicamente a partir de los ETM personales, sino que emergen de la interacción entre aportaciones individuales y la mediación docente. El nuevo trabajo matemático, propuesto por Richard y colaboradores, subraya la transformación del trabajo ante la integración de la IA y otros artefactos digitales, lo que redefine la interacción entre dimensiones semiótica, instrumental y discursiva. En este marco, la noción de control adquiere centralidad: control semiótico, discursivo y/o instrumental, necesarios para garantizar la validez y rigurosidad en la interacción humano-máquina. El estudio de la hibridación entre IA generativa y simbólica, en particular la experiencia con GPT_p y GeoGebra Discovery, ilustra cómo el control resulta esencial para estabilizar el referencial (Danguy-Pichette y Richard). Así mismo, en la continuidad del trabajo de ETM, se estructura el trabajo algorítmico a través de los Espacios de Trabajo Algorítmico (ETA) y los Espacios de Trabajo Conectados que se proponen en trabajo de Laval.

THÈME 2. ÉTUDE DES SIGNES, DES OUTILS ET DU DISCOURS, ET DE L'ÉVOLUTION DYNAMIQUE DE LEURS INTERACTIONS MUTUELLES DANS LE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Michela Maschietto¹, Ferdinando Arzarello², Jorge
Gaona³, Rosa Elvira Páez Murillo⁴

¹Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia (Italie)

²Università di Torino (Italie)

³Universidad de Playa Ancha (Chili)

⁴Universidad Autónoma de la Ciudad de México (Mexique)

INTRODUCTION

Ce thème se consacre à l'étude des outils du travail mathématique, des signes associés et de leurs rapports au discours. L'attention porte sur leurs évolutions et leurs interactions dans le travail mathématique, au-delà des questions déjà abordées dans les symposiums précédents, concernant les genèses et leurs coordinations.

COMMUNICATIONS

Ce groupe a réfléchi aux huit communications suivantes

Titre de la communication	Auteur(s)	Institution	Pays
Espacio de trabajo matemático personal de profesoras de matemática en formación inicial ante el estudio de la geometría 3d mediante el uso de artefactos tecnológicos	Fabiola Arévalo-Meneses, Elizabeth Montoya-Delgadillo	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso	Chili
Sessions de laboratoire avec les machines mathématiques pour les transformations géométriques au collège	Beatrice Battilani, Michela Maschietto	Università di Modena e Reggio Emilia	Italie
Contrepoint technologique et contrôle du référentiel dans le travail mathématique instrumenté	Eloï Danguy-Pichette, Philippe R. Richard	Université de Montréal	Canada
Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'ETM collectif	Jorge Gaona, Catalina Bezama Palacios, Leonard Sánchez	Universidad de Playa Ancha, LDAR Université Paris Cité	Chili / France

Titre de la communication	Auteur(s)	Institution	Pays
Émergence de l'art de l'argumentation : l'instrumentation de l'IA dans la formation des enseignants de mathématiques	Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio, Philippe R. Richard	Universidad de Oviedo, Universitat Autònoma de Barcelona, Universidad Antonio de Nebrija, Université de Montréal	Espagne / Canada
De la page au code : comment explorer les récits issus de la littérature de jeunesse à travers la lentille mathématique et littéraire, de la théorie des graphes à l'algorithmique créative	Dominique Laval	CY Cergy Paris Université – INSPE de l'académie de Versailles	France
El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales	Rosa-Elvira Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández, Magally Martínez	Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Universidad Autónoma de Zacatecas, Universidad Autónoma del Estado de México	Mexique/ Espagne
Analyse d'une ingénierie didactique articulant activités mathématiques et algorithmiques -étude des formes et fonctions des raisonnements des élèves	Maryna Rafalska, Patrick Gibel	LINE, Université Côte d'Azur, LAB-E3D, Université de Bordeaux	France

SYNTHÈSE

Les travaux présentés dans les communications sont regroupés selon les aspects suivants :

Utilisation des artefacts matériels (tangibles)

Les artefacts matériels (tangibles) ont joué un rôle central dans l'activation tant de la genèse sémiotique que de la genèse instrumentale, en particulier dans les contextes de travail manipulatif ou de visualisation tridimensionnelle. Dans le cas du jeu « Tri de cartes », conçu et présenté par Maryna Rafalska et Patrick Gibel, les élèves devaient classer un ensemble de cartes disposées sur une grille, ce qui les a amenés à élaborer des algorithmes de classement à partir d'opérations de base restreintes telles que retourner, comparer et replacer. Dans la recherche de Fabiola Arévalo et Elizabeth Montoya sur la géométrie 3D, une structure de blocs manipulables a d'abord été introduite, permettant aux futurs enseignants d'interagir physiquement avec la figure et de déterminer des coordonnées à partir de différentes perspectives. Par la suite, lors d'une refonte de la situation didactique, des oranges modelées en forme de sphères ont été incorporées afin de favoriser la genèse discursive : les élèves devaient effectuer une coupe et identifier intuitivement la forme de l'intersection, à l'aide d'instruments de mesure. Dans l'étude de Rosa Páez, Miguel Delgado, Judith Hernández et Magally Martínez sur la relation fonctionnelle, les artefacts utilisés étaient des feuilles blanches et une règle, avec lesquelles les élèves ont construit un carré à partir de plis, puis ont effectué un travail de mesure, générant leurs propres ensembles de données expérimentales pour analyser la variation fonctionnelle. Dans le contexte des machines mathématiques travaillées par Beatrice Battilani et Michela Maschietto, l'objectif de l'activité était que les élèves déterminent la transformation géométrique que la machine effectuait sur le plan. Le travail méthodologique s'est déroulé en petits groupes, à l'aide de fiches de travail structurées comprenant des questions spécifiques pour guider l'exploration (Comment est-elle faite ? Que fait-elle ? Comment fonctionne-t-elle ? Pourquoi ?). L'utilisation de cet artefact a permis d'activer la genèse sémiotique, en interprétant les signes produits (identifier la figure géométrique comme un losange ou un carré), et la genèse instrumentale, tant dans la production de dessins symétriques que dans la construction cognitive de la machine comme instrument d'action.

Utilisation des artefacts technologiques

Les artefacts technologiques, en particulier l'intelligence artificielle (IA), les logiciels de géométrie dynamique (SGD) ou les moteurs de jeux vidéo tels que Scrath, sont essentiels pour aborder des phénomènes tels que le contrôle du référentiel, l'hybridation, la validation et le travail collectif. Dans le cadre des recherches sur la géométrie tridimensionnelle menées par Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo, ChatGPT a été intégré comme nouvel outil dans la phase post-pilote, permettant aux futurs enseignants d'interagir avec l'IA afin de vérifier et d'évaluer la validité des informations sur l'intersection des sphères, ce qui a favorisé les processus de justification et de vérification. D'autre part, Richard et ses collaborateurs ont exploré

l'interaction entre l'IA générative (ChatGPT, Gemini) et l'IA symbolique (GeoGebra Discovery), sous le concept de contrepartie technologique. La première a été utilisée pour la formulation d'hypothèses et l'analyse qualitative, tandis que la seconde a été réservée à la vérification rigoureuse des propriétés ; dans ce contexte, l'utilisation de ChatGPT-4-omni, personnalisé sous le nom de GPTp, a permis d'examiner comment l'intégration d'une base de connaissances contrôlée (RAME) pouvait stabiliser le référentiel de l'IA générative. De même, Laval, dans une étude interdisciplinaire, intègre des processus algorithmiques et de programmation à l'aide de Scratch afin que les élèves du primaire passent de la lecture et de l'interprétation de contes classiques pour enfants à une interaction active avec les personnages et au développement de l'histoire pour enfants.

En ce qui concerne les environnements GeoGebra, leur utilisation dans diverses recherches a été mise en avant : comme applet 3D dans la phase pilote de géométrie, où les participants ont articulé des vues 2D et 3D pour déterminer des coordonnées et, plus tard, pour valider les résultats obtenus à l'aide de ChatGPT (Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo) ; comme ressource pédagogique en classe, pour représenter graphiquement des fonctions linéaires et apparentées projetées au tableau à partir de données issues du travail collectif dans les travaux de Jorge Gaona, Catalina Palacios et Leonard Sánchez ; et comme support dans l'étude des relations fonctionnelles, prévu dans des activités visant à représenter graphiquement des expressions algébriques proposées par les étudiants (Páez et collaborateurs). La version GeoGebra Discovery, présentée par Itziar García-Honrado, Josep Maria Fortuny-Aymemi, Tomás Recio et Philippe R. Richard, a également permis d'intégrer un raisonnement automatisé à l'aide de commandes telles que Relation, Proof ou EquationLieu, consolidant ainsi son potentiel en tant que tuteur intelligent pour l'exploration et la validation en géométrie. Enfin, les systèmes d'évaluation en ligne sont présentés comme une plateforme permettant de proposer des tâches ouvertes (avec des solutions infinies) sur les fonctions, permettant de multiples tentatives, un retour personnalisé et la génération automatique de notes. Les tâches ouvertes et l'encadrement des enseignants ont permis l'émergence d'un travail mathématique collectif.

Aspects méthodologiques

La conception des situations didactiques s'inscrit dans le cadre de l'ingénierie didactique, avec une attention particulière portée aux variables didactiques et à la recherche d'un environnement d'apprentissage adapté. En particulier, l'adéquation de l'intégration de l'intelligence artificielle (IA) a été conçue comme un principe directeur, visant à optimiser la convergence entre le référentiel et les réponses de l'IA (Richard et collaborateurs). Dans la recherche sur la géométrie tridimensionnelle, la conception itérative a permis aux résultats d'un projet pilote initial — où la tâche ne favorisait pas la genèse discursive — de conduire à une refonte qui a intégré des objets concrets (oranges/sphères) et l'interaction avec ChatGPT, illustrant un processus d'ajustement adaptatif propre à la conception de la recherche (Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo). De manière analogue, dans le domaine des machines mathématiques,

l'adaptation des artefacts a impliqué la révision des fiches et la reformulation des questions afin de les rendre plus accessibles à un nouveau niveau scolaire, ainsi que l'inclusion de matériel auxiliaire tel que des patrons facilitant le dessin (Battilani et Maschietto).

En ce qui concerne les objectifs didactiques des conceptions, plusieurs travaux ont convergé vers la promotion de processus mathématiques spécifiques. Le développement du travail collectif a été au cœur de la conception de tâches ouvertes s'appuyant sur des plateformes d'évaluation en ligne, dont l'objectif était de configurer un espace de travail mathématique (ETM) collectif. Dans les travaux de Gaona et ses collaborateurs, la plateforme d'évaluation a permis de multiples tentatives et des retours personnalisés, générant engagement et confiance grâce à la validation des réponses des étudiants. La dynamique consistant à alterner des phases en binômes et des phases collectives a permis aux différentes réponses d'alimenter des discussions guidées par l'enseignant, d'où a progressivement émergé la notion de fonctions linéaires et affines. Parallèlement, l'objectif de développer la pensée computationnelle a orienté la conception de la situation « Tri de cartes », articulant des activités mathématiques et algorithmiques à travers une séquence de jeux avec des variables didactiques contrôlées. La variation de ces conditions a contraint les élèves à passer de stratégies particulières à des méthodes générales de classification, conduisant à la construction et à l'analyse d'algorithmes efficaces (Rafalska et Gibel). Dans le même ordre d'idées, l'étude de Laval, qui correspond à une approche interdisciplinaire, combine les mathématiques, les algorithmes et la littérature afin de favoriser un apprentissage global et intégré.

De même, l'étude de l'hybridation de l'IA a introduit le concept de contrepartie technologique, articulant l'IA générative et l'IA symbolique sous contrôle humain. Dans ce cadre, l'IA générative (ChatGPT) a été utilisée pour comparer des informations en géométrie 3D, favorisant la justification et la preuve, tandis que l'IA symbolique (GeoGebra Discovery) a permis la validation formelle (García-Honrado et collaborateurs). Enfin, les conceptions axées sur la notion de pensée fonctionnelle et covariationnelle ont favorisé la construction des notions de variation et de dépendance. Dans la proposition de Páez, les étudiants ont généré leurs propres données à l'aide de feuilles et de règles pour analyser la relation entre le trajet et la distance, tandis que le débat scientifique en groupe a facilité la consolidation de la notion de variation fonctionnelle (Páez et collaborateurs).

Originalité des tâches proposées

Il convient de souligner l'originalité de plusieurs des tâches et situations présentées. Certaines propositions reprenaient des contextes plus classiques, tels que la géométrie 3D (Arévalo-Meneses et Montoya), la relation fonctionnelle (Páez et collaborateurs) et les fonctions linéaires et affines (Gaona et collaborateurs). D'autres ont cherché à innover en établissant un lien avec des jeux, comme la situation « Tri de cartes » qui obligeait à construire des algorithmes de classification (Rafalska & Gibel, 2025). Ou des liens avec la littérature jeunesse, comme le travail de Laval dans lequel l'application

de la théorie des graphes et l'introduction de la pensée algorithmique enrichissent sa compréhension et son analyse de ces contes pour la jeunesse. Des liens ont également été établis avec l'art, comme dans l'activité qui a exploré l'œuvre *Composition arithmétique* (1929-1930) de Théo Van Doesburg, utilisée pour articuler l'argumentation mathématique dans un contexte artistique et géométrique, en s'appuyant sur l'hybridation de l'IA générative et de GeoGebra Discovery (Richard & García-Honrado, 2025)

Aspects théoriques

Les idées développées constituent le cœur de la réflexion théorique du thème 2 de l'ETM8, axée sur l'évolution du travail mathématique face à l'émergence de nouveaux artefacts et sur l'articulation entre les différents cadres théoriques qui orientent la recherche.

Tout d'abord, on observe un déplacement du travail instrumental vers la visualisation et le discours, dans la mesure où les participants passent de la manipulation initiale des artefacts à d'autres dimensions de l'espace de travail mathématique (ETM). Ce déplacement se manifeste, d'une part, vers la visualisation (genèse sémiotique), comme dans le cas de la géométrie 3D, où les futurs enseignants, en manipulant des blocs ou en utilisant la rotation dans GeoGebra 3D, avaient tendance à projeter les images tridimensionnelles en vues bidimensionnelles afin de pouvoir opérer avec plus de clarté. D'autre part, on a cherché à favoriser le mouvement vers le discours (genèse discursive), orienté vers la justification et la preuve. C'est ce qui s'est produit dans la refonte de la tâche de géométrie 3D, où l'intégration de ChatGPT avait pour objectif explicite de promouvoir la validation discursive (Arévalo-Meneses et Montoya-Delgadillo). De manière analogue, dans l'étude de la relation fonctionnelle, bien que la genèse discursive ait été activée, celle-ci est restée ancrée dans le contrôle instrumental, s'appuyant sur la mesure à l'aide d'artefacts matériels tels que la règle (Páez et collaborateurs).

Deuxièmement, la conception des tâches s'est appuyée sur plusieurs cadres théoriques, notamment la théorie des situations didactiques (TSD) et l'ETM lui-même à travers son diagramme. Dans la recherche sur la relation fonctionnelle, les activités ont été structurées comme des explorations guidées suivies d'un débat scientifique, conformément à la TSD (Rafalska et Gibel ; Páez et collaborateurs). Dans le cas des jeux algorithmiques, la proposition « Tri de cartes » a été conçue selon la logique de l'ingénierie didactique du développement, qui s'appuie elle-même sur la TSD, en tenant compte du caractère adidactique de la situation et des différents niveaux de milieu (Rafalska & Gibel, 2025).

Troisièmement, on observe les prémices d'un travail prospectif de mise en réseau entre différents cadres théoriques. En ce sens, le travail avec des machines mathématiques a été conçu selon la théorie de la médiation sémiotique, proche des approches vygotskiennes et de la TSD, mais il a ensuite été analysé à l'aide de l'ETM, ce qui a mis en évidence la nécessité d'approfondir l'articulation entre ces deux cadres (Battilani

et Maschietto). De même, les recherches de Rafalska et Gibel ont montré l'intégration de la TSD dans la conception adidactique avec un modèle d'analyse du raisonnement qui relie les fonctions du raisonnement aux niveaux du milieu, établissant des ponts entre la conception de situations et l'analyse cognitive à partir de l'ETM. Dans le même ordre d'idées, l'inclusion de la théorie des graphes dans les travaux de Laval est utile dans le cadre de l'expérience éducative pour représenter les réseaux sous forme de graphes, où les personnages du conte sont représentés par un nœud et leurs interactions par une arrête.

Les recherches ont permis d'identifier des concepts émergents qui enrichissent l'ETM. Parmi ceux-ci, l'ETM collectif (Gaona et collaborateurs) est présenté comme un espace où les notions mathématiques ne se constituent pas uniquement à partir des ETM personnels, mais émergent de l'interaction entre les contributions individuelles et la médiation des enseignants. Les nouveaux travaux mathématiques proposés par Richard et ses collaborateurs soulignent la transformation du travail face à l'intégration de l'IA et d'autres artefacts numériques, qui redéfinit l'interaction entre les dimensions sémiotique, instrumentale et discursive. Dans ce cadre, la notion de contrôle prend une place centrale : contrôle sémiotique, discursif et/ou instrumental, nécessaires pour garantir la validité et la rigueur de l'interaction homme-machine. L'étude de l'hybridation entre l'IA générative et symbolique, en particulier l'expérience avec GPTp et GeoGebra Discovery, illustre comment le contrôle est essentiel pour stabiliser le référentiel (Danguy-Pichette et Richard). De même, dans la continuité des travaux de l'ETM, le travail algorithmique est structuré à travers les Espaces de Travail Algorithmique (ETA) et les Espaces de Travail Connectés proposés dans les travaux de Laval.