

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MODENA E REGGIO EMILIA**

Dottorato di ricerca in Scienze Umanistiche

(nell'ambito della Scuola di dottorato in Scienze Umanistiche)

Ciclo XXVIII

***Insegnamento e apprendimento di fatti moltiplicativi:
un approccio relazionale mediante la tavola di Laisant***

Teaching and learning multiplicative facts: a relational approach through Laisant's table

Candidato: Andrea Maffia

Relatore (Tutor): Prof. Maria Giuseppina Bartolini Bussi

Correlatore (Co-Tutor): Prof. Maria Alessandra Mariotti

Coordinatore del Dottorato: Prof. Stefano Calabrese

Direttore della Scuola di dottorato: Prof. Stefano Calabrese

Souvent le mathématicien doit se servir d'une règle: naturellement il a commencé par démontrer cette règle; et au moment où cette démonstration était toute fraîche dans son souvenir il en comprenait parfaitement le sens et la portée, et il ne risquait pas de l'altérer. Mais ensuite il l'a confiée à sa mémoire et il ne l'applique plus que d'une façon mécanique; et alors si la mémoire lui fait défaut, il peut l'appliquer tout de travers. C'est ainsi, pour prendre un exemple simple et presque vulgaire, que nous faisons quelquefois des fautes de calcul parce que nous avons oublié notre table de multiplication.

A ce compte, l'aptitude spéciale aux mathématiques ne serait due qu'à une mémoire très sûre, ou bien à une force d'attention prodigieuse. Ce serait une qualité analogue à celle du joueur de whist, qui retient les cartes tombées; ou bien, pour nous élever d'un degré, à celle du joueur d'échecs qui peut envisager un nombre très grand de combinaisons et les garder dans sa mémoire. Tout bon mathématicien devrait être en même temps bon joueur d'échecs et inversement; il devrait être également un bon calculateur numérique. Certes, cela arrive quelquefois, ainsi Gauss était à la fois un géomètre de génie et un calculateur très précoce et très sûr.

Mais il y a des exceptions, ou plutôt je me trompe, je ne puis pas appeler cela des exceptions, sans quoi les exceptions seraient plus nombreuses que les cas conformes à la règle. C'est Gauss, au contraire, qui était une exception. Quant à moi, je suis obligé de l'avouer, je suis absolument incapable de faire une addition sans faute. Je serais également un fort mauvais joueur d'échecs; je calculerais bien qu'en jouant de telle façon je m'expose à tel danger; je passerais en revue beaucoup d'autres coups que je rejetterais pour d'autres raisons, et je finirais par jouer le coup d'abord examiné, ayant oublié dans l'intervalle le danger que j'avais prévu.

En un mot ma mémoire n'est pas mauvaise, mais elle serait insuffisante pour faire de moi un bon joueur d'échecs. Pourquoi donc ne me fait-elle pas défaut dans un raisonnement mathématique difficile où la plupart des joueurs d'échecs se perdraient?

C'est évidemment parce qu'elle est guidée par la marche générale du raisonnement. Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont des syllogismes placés dans un certain ordre et l'ordre dans lequel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes.

Si j'ai le sentiment, l'intuition pour ainsi dire de cet ordre, de façon à apercevoir d'un coup d'œil l'ensemble du raisonnement, je ne dois plus craindre d'oublier l'un des éléments, chacun d'eux viendra se placer de lui-même dans le cadre qui lui est préparé, et sans que j'aie à faire aucun effort de mémoire.

Il me semble alors, en répétant un raisonnement appris, que j'aurais pu l'inventer; ce n'est souvent qu'une illusion; mais, même alors, même si je ne suis pas assez fort pour créer par moi-même, je le réinvente moi-même, à mesure que je le répète.

Henri Poincaré, 1908, Science et Méthode, pp.45-48

Spesso il matematico si deve servire di una regola: naturalmente comincia dimostrando questa regola; e nel momento in cui questa dimostrazione è fresca nei suoi ricordi ne comprende perfettamente il senso e la portata, e non rischia in nessun modo di alterarla. Ma dopo la affida alla sua memoria e non l'applica più se non in modo meccanico; e quindi se la memoria difetta, può applicarla in modo sbagliato. È così, per fare un esempio semplice e abbastanza volgare, che noi facciamo a volte degli errori di calcolo perché abbiamo dimenticato le tabelline.

Detto questo, il fare dei matematici dipenderebbe solo da una memoria molto sicura, o da una capacità di attenzione prodigiosa. Sarebbe una qualità analoga a quella del giocatore di whist, che memorizza le carte uscite; oppure, per salire di grado, a quella del giocatore di scacchi che può prevedere un grande numero di combinazioni e conservarle nella sua memoria. Qualsiasi buon matematico dovrebbe essere allo stesso tempo un buon giocatore di scacchi e viceversa; dovrebbe essere anche un buon calcolatore numerico. Certamente, questo succede a volte, così come Gauss era allo stesso tempo un geometra di genio e un calcolatore molto precoce e molto sicuro.

Ma ci sono delle eccezioni, o forse mi sbaglio, non posso definirle eccezioni, senza che le eccezioni siano più numerose di quei casi che confermano la regola. È Gauss, al contrario, ad essere un'eccezione. In quanto a me, devo confessarlo, io sono assolutamente incapace di fare un'addizione senza errore. Sarei quindi un pessimo giocatore di scacchi; calcolerei bene i rischi a cui mi espongo giocando in un certo modo; poi passerei in rassegna molte altre mosse che rigetterei per altre ragioni, e finirei col giocare la mossa presa in esame all'inizio, avendo dimenticato nel frattempo il pericolo che avevo previsto.

In sostanza la mia memoria non è cattiva, ma sarebbe insufficiente per far di me un buon giocatore di scacchi. Perché dunque non mi difetta in un ragionamento matematico difficile in cui la maggior parte dei giocatori di scacchi si perderebbe?

Evidentemente perché è guidata dall'andamento generale del ragionamento. Una dimostrazione matematica non è una semplice giustapposizione di sillogismi, sono dei sillogismi messi un certo ordine e l'ordine in cui questi elementi sono disposti è molto più importante di quanto non lo siano gli elementi stessi.

Se io ho la sensazione, l'intuizione per così dire, di quest'ordine, in modo da percepire con un solo colpo d'occhio l'insieme del ragionamento, non devo più temere di dimenticare uno degli elementi, ciascuno di essi verrà a piazzarsi da solo nel quadro che gli è preparato, e senza che io debba fare nessuno sforzo di memoria.

Mi sembra allora, ripetendo il ragionamento appreso, che avrei potuto inventarlo; spesso è soltanto un'illusione; ma, anche in tal caso – anche se io non sono abbastanza bravo da crearlo da solo – io stesso lo reinvento, nel momento in cui lo ripeto.

Henri Poincaré, 1908, *Science et Méthode*, pp.45-48, trad. It dell'autore

Indice

Sommario	11
Abstract.....	12
1 IL PROBLEMA DI RICERCA	13
1.1 Inquadramento del problema.....	14
1.2 Un'indagine preliminare.....	15
1.2.1 Riferimenti teorici	16
1.2.2 Metodologia	17
1.2.3 Risultati	18
1.2.3.1 Invarianti operatori	19
1.2.3.2 Problemi associati ai fatti moltiplicativi	22
1.2.3.3 Memoria autobiografica	25
1.3 Domande di ricerca: prima formulazione	25
2 RASSEGNA DELLA LETTERATURA DALLA PSICOLOGIA.....	28
2.1 La memoria	28
2.1.1 La memoria di lavoro	29
2.1.2 La memoria a lungo termine	30
2.2 Memoria e apprendimento	34
2.2.1 Relazioni fra le informazioni	34
2.2.2 Oblio e recupero	38
2.3 Memorizzazione dei fatti aritmetici moltiplicativi	42
2.3.1 Modelli statici	42
2.3.2 Modelli dinamici	47
2.3.3 Memoria per i fatti moltiplicativi e discalculia	49
3 RASSEGNA DELLA LETTERATURA DIDATTICA	51
3.1 Apprendere le operazioni aritmetiche con significato	51
3.2 Il pensiero relazionale	52
3.2.1 Il senso dell'operazione	55
3.2.2 Il simbolo di uguaglianza.....	56
3.2.3 Il senso della struttura	58
3.3 Una definizione operativa di pensiero relazionale	60
3.4 L'apprendimento della moltiplicazione e delle sue proprietà	62
3.4.1 L'operazione di moltiplicazione: modelli e situazioni problematiche	62
3.4.2 Lo sviluppo del concetto di moltiplicazione	68
3.4.3 Strumenti per l'insegnamento dei fatti moltiplicativi.....	73

4	SCELTA DELL'ARTEFATTO	79
4.1	Descrizione dell'artefatto	79
4.2	Aspetti epistemologici	81
4.2.1	Cenni storici sull'aritmetica-geometrica	81
4.2.2	Aspetti logici	84
4.3	Aspetti cognitivi	90
4.4	Aspetti didattici	93
4.5	Scelta della tavola di Laisant.....	97
5	QUADRO CONCETTUALE E TEORICO	99
5.1	Approccio semiotico	100
5.2	L'approccio discorsivo: cognizione come comunicazione	104
5.2.1	Evoluzione del discorso: le routine	104
5.2.2	Oggettivazione	106
5.2.3	Conflitti comognitivi	107
5.3	TMS: artefatti al centro dell'apprendimento	108
5.3.1	Strumenti e segni nella mediazione semiotica	108
5.3.2	Polisemia dell'artefatto	109
5.3.3	Il ciclo didattico	111
5.3.4	Il ruolo dell'insegnante	113
5.4	Domande di ricerca	115
6	DISEGNO DELLA RICERCA	116
6.1	Ricerca per l'innovazione come esempio di Ricerca Design-Based	116
6.2	Fasi della ricerca	118
6.3	Raccolta dati sull'intervento in classe	120
6.4	Altri strumenti per la raccolta dati	121
6.4.1	Pre-test	121
6.4.2	Batteria per la Discalculia Evolutiva (BDE)	121
6.4.3	Interviste	124
6.4.4	Test a lungo termine	125
6.4.5	Interviste di approfondimento	126
6.5	Metodi di analisi dei dati	127
6.5.1	Analisi dei dati dai test	127
6.5.2	Analisi dei dati dalla BDE	128
6.5.3	Analisi dei dati dalle interviste	129
6.5.4	Analisi delle videoriprese	130

6.6	Modalità di presentazione dei risultati	131
7	POTENZIALE SEMIOTICO DELLA TAVOLA DI LAISANT	133
7.1	Esplorazione dell'artefatto	133
7.2	Ricerca di caselle congruenti	135
7.3	Compiti di composizione e decomposizione	137
7.4	Altre consegne.....	141
8	PRESTAZIONI NEL RICHIAMO DI FATTI MOLTIPLICATIVI	142
8.1	Risultati del test di calcolo della BDE	142
8.1.1	Classe seconda: buone capacità nelle moltiplicazioni	143
8.1.2	Classe quinta: strategie ricostruttive meno frequenti	145
8.2	Confronto fra le prestazioni di calcolo delle classi	147
8.2.1	Confronto fra le classi sperimentali	147
8.2.2	Confronto fra le classi seconde.....	148
8.3	Risultati del completamento della tavola pitagorica.....	148
8.3.1	Routine osservate	149
8.3.2	Confronto fra le routine: pensiero procedurale vs pensiero relazionale	153
8.3.3	Analisi del carico cognitivo della memoria di lavoro	156
8.4	Routine utilizzate dai diversi gruppi di studenti.....	161
8.4.1	Confronto fra le classi sperimentali	161
8.4.2	Confronto fra le classi seconde.....	162
9	PENSIERO RELAZIONALE COME EMERGENTE DALL'USO DELL'ARTEFATTO	164
9.1	Sviluppo del pensiero relazionale nella classe quinta	165
9.1.1	Confronto con il pre-test	167
9.2	Sviluppo del pensiero relazionale nella classe seconda	169
9.2.1	Interviste di approfondimento	172
9.2.1.1	Interpretazione del simbolo di uguaglianza.....	173
9.2.1.2	Senso della struttura	178
9.2.1.3	Senso dell'operazione	183
9.3	Confronto fra le due classi	191
10	ESPRESSIONE DEL POTENZIALE SEMIOTICO DELL'ARTEFATTO: CLASSE SECONDA	193
10.1	Commutatività nella classe seconda	194
10.1.1	Sovrapponibilità di rettangoli: caselle gemelle	194
10.1.2	Simmetria della tabella: i quadrati sono degli specchi	197

10.1.3	Introduzione dei simboli aritmetici.....	204
10.1.4	Produzioni individuali successive: cosa è interiorizzato?	212
10.1.5	Una catena semiotica: l'evoluzione del segno "gemelle"	213
10.2	Proprietà distributiva nella classe seconda	215
10.2.1	Distributività come composizione.....	215
10.2.1.1	Rappresentare la somma di due prodotti: l'emergere di segni ibridi	216
10.2.1.2	Produzione individuale di segni: verso le espressioni aritmetiche	226
10.2.1.3	La somma di due prodotti: tre catene semiotiche.....	227
10.2.2	Distributività come scomposizione	229
10.2.2.1	La scomparsa dei rettangoli: concatenazioni di uguaglianze.....	231
10.2.2.2	Concatenazioni di uguaglianze: un passo avanti nella catena semiotica	234
10.2.3	Distributività nella classe seconda in sintesi	236
11	ESPRESSIONE DEL POTENZIALE SEMIOTICO DELL'ARTEFATTO: CLASSE QUINTA	238
11.1	Commutatività nella classe quinta	238
11.1.1	Intreccio tra significati aritmetici e geometrici	240
11.1.2	Moltiplicazioni che si invertono: richiamo alla proprietà commutativa	242
11.1.3	Cambia soltanto la posizione: verso l'inversione dell'ordine dei fattori.....	248
11.1.4	Significati geometrici emergenti	258
11.1.5	Ancora sui quadrati: se lo scambi, rimane sempre uguale	261
11.1.6	Per la tabella vale la proprietà commutativa: elaborati individuali	264
11.1.7	L'artefatto come "ponte" fra significati aritmetici e geometrici.....	266
11.2	Proprietà distributiva nella classe quinta	267
11.2.1	Distributività come composizione.....	267
11.2.1.1	L'addizione di due moltiplicazioni: espressioni e parentesi.....	268
11.2.1.2	La somma di due prodotti equivale a un prodotto: appiccicare cartoncini	276
11.2.1.3	Espressioni equivalenti: sommi il secondo numero, il risultato non cambia	283
11.2.1.4	Un fattore in comune: rettangoli con la stessa misura dell'altezza	291
11.2.1.5	Prodotto del fattore comune per la somma degli altri: due che moltiplica ... $2+3$	295
11.2.2	Elaborati individuali: cosa è stato interiorizzato	298
11.2.2.1	Elaborati successivi alla discussione	299
11.2.2.2	Distributività come scomposizione: la lettera a Giulia.....	300
11.2.3	Distributività nella classe quinta in sintesi	302
12	DISCUSSIONE E CONCLUSIONI	305
12.1	Riflessioni metodologiche	305
12.1.1	Limiti dovuti al contesto.....	305
12.1.2	Limiti dovuti ad altre scelte nella raccolta e analisi dei dati	307
12.1.3	Test di adeguatezza.....	307
12.2	Sintesi dei risultati	308
12.2.1	Prodotti dell'intervento	309
12.2.1.1	Gli studenti hanno buone prestazioni nel richiamo dei fatti moltiplicativi?	309
12.2.1.2	Gli studenti ricostruiscono i fatti moltiplicativi facendo leva sul pensiero relazionale?	310
12.2.1.3	Che differenze ci sono in gruppi-classe di età diversa?	311

12.2.2 Processo di mediazione semiotica	313
12.2.2.1 Quali aspetti del potenziale semiotico dell’artefatto emergono nell’attività di classe?	313
12.2.2.2 Quali catene semiotiche permettono di descrivere l’evoluzione dei significati?	315
12.2.2.3 Quale il ruolo dell’insegnante/esperto nella gestione del processo di mediazione semiotica verso le proprietà della moltiplicazione?	320
12.2.2.4 Confronto dello sviluppo del processo di mediazione semiotica nei due gruppi-classe	323
12.3 Contributi alla teoria	324
12.3.1 Gesti come segni pivot	325
12.3.2 Sullo sviluppo dei concetti: una lettura vygotskiana	327
12.4 Implicazioni per la pratica	331
12.4.1 Suggerimenti didattici	331
12.4.2 Suggerimenti per la formazione insegnanti	333
12.5 Ulteriori sviluppi di ricerca	334
ALLEGATO 1: RISULTATI TEST BDE	336
ALLEGATO 2: RISPOSTE TEST A LUNGO TERMINE	339
ALLEGATO 3: ANALISI DELLE INTERVISTE	341
BIBLIOGRAFIA.....	398
Pubblicazioni tratte da questa tesi	415

*Un ringraziamento a tutti coloro che,
leggendo le pagine che seguono,
sorrideranno per qualche memoria sovvenuta.*

Sommario

Nel processo di insegnamento/apprendimento di fatti moltiplicativi viene tradizionalmente data importanza alla memorizzazione meccanica, basandosi su una codifica fonologica e non semantica. Al contrario, la ricerca mostra l'importanza della messa in relazione delle informazioni al fine della loro permanenza nella memoria. Il lavoro sviluppato in questa tesi prende le mosse da questa ipotesi e, a partire da un'analisi epistemologica e didattica del contenuto matematico, individua nell'approccio relazionale la modalità privilegiata per una codifica semantica dei fatti moltiplicativi. Si congettura che la rappresentazione rettangolare offerta dall'artefatto "Tavola di Laisant" possa essere efficacemente sfruttata per introdurre (anche precocemente) le proprietà delle operazioni per agevolare la memorizzazione dei fatti moltiplicativi. Tale ipotesi è elaborata nel quadro della Teoria della Mediazione Semiotica e testata attraverso un intervento sperimentale, progettato e realizzato coerentemente a tale quadro. Le attività sono organizzate in cicli didattici e, attraverso l'esplicitazione del potenziale semiotico della Tavola di Laisant, hanno l'obiettivo di sviluppare i significati di proprietà commutativa e distributiva. La sperimentazione è svolta in due classi; seconda e quinta primaria. L'analisi dei dati raccolti segue una metodologia mista mirata non solo a rilevare l'efficacia dell'intervento didattico rispetto all'obiettivo dichiarato, ma anche a studiare il processo di mediazione ipotizzato.

In particolare, lo sviluppo del pensiero relazionale è valutato attraverso l'analisi qualitativa di pre-test e post-test appositamente predisposti; le prestazioni nel richiamo di fatti moltiplicativi sono misurate facendo ricorso al test B.D.E. L'analisi qualitativa del processo di mediazione si basa sugli elaborati degli allievi e le videoriprese effettuate in classe; si sono inoltre utilizzate interviste individuali successive al post-test. È stato possibile mettere in evidenza l'evoluzione dei significati attraverso l'individuazione di catene semiotiche che portano da segni personali e contingenti, verso segni matematici condivisi. Un'attenzione particolare è data allo studio del ruolo dell'insegnante nel processo di mediazione semiotica.

Gli studenti mostrano un'evoluzione del pensiero relazionale mobilitato in ambito moltiplicativo e, nonostante il persistere di alcune difficoltà, il gruppo sperimentale mostra istanze di applicazione di tale pensiero nella ricostruzione di fatti moltiplicativi. Allo stesso tempo, l'analisi delle difficoltà nella manipolazione delle strutture aritmetiche mette in evidenza l'importanza di uno sviluppo parallelo delle interpretazioni sintattica e semantica di tali strutture. Gli studenti della classe seconda rivelano prestazioni di richiamo dei fatti moltiplicativi migliori rispetto alla media dei loro coetanei; questo risultato porta a ritenere che la precoce promozione del pensiero relazionale sia vantaggiosa. Tuttavia, il fatto che gli studenti della classe quinta dimostrino un maggior senso dell'operazione sostiene l'idea che un approccio relazionale non sia importante solo nell'introduzione di un nuovo oggetto aritmetico ma piuttosto nell'arco di tutti gli anni della scuola primaria.

La realizzazione del passaggio dallo strumento alla costruzione di un significato risulta legata all'intervento dell'insegnante che lo usa come catalizzatore per la costruzione di significati coerenti ai propri obiettivi. Il riconoscimento e la produzione di segni ibridi appaiono come elementi chiave del processo di mediazione semiotica.

Abstract

Traditionally, teaching and learning of multiplicative facts are based on phonologic codification rather than semantic codification; rote memorization plays an important role in such processes. On the contrary, research shows that relations within information are important for its long-lasting in memory. This dissertation draws on these results; according to an epistemic and educational analysis of the mathematical content, a relational approach is considered as a privileged mode for semantic codification of multiplicative facts.

It is conjectured that rectangular representation, as it is embedded in “Laisant’s table”, could be effectively exploited for an (even early) introduction of operations’ properties. These could facilitate memorization of multiplicative facts. Such hypothesis is elaborated in the framework of Theory of Semiotic Mediation and it is tested through an experimental intervention. The intervention is designed and realized in coherence with the chosen framework.

Activities are organized in didactical cycles: exploiting the semiotic potential of Laisant’s table, the meaning of commutative and distributive properties are developed. The experimentation takes place in two class-groups; in second and fifth grade. Data analysis consists of mixed methods and it is aimed to investigate the effectiveness of the intervention and to study the supposed mediation process.

In particular, the development of relational thinking is evaluated through a qualitative analysis of pre-tests and post-tests that are predisposed for this purpose; recalling performances are measured thanks to a reliable and valid psychometric test. Qualitative analysis of the process of mediation is based on students productions and on classroom video-recordings. We also implemented individual interviews after post-test. It has been possible to highlight the development of meanings through the identification of semiotic chains linking personal and contingents signs to mathematical ones. A particular attention is dedicated to the study of teacher’s role in the development of the process of semiotic mediation.

Students that are involved in the experimentation, show a development of the relational thinking that is mobilized for multiplication. Even if some difficulties persist, the experimental group shows instances of such a thinking in reconstructing multiplicative facts. Furthermore, the analysis of their difficulties in manipulating arithmetical structures puts in evidence the importance of a parallel development for the syntactic and semantic interpretations of such structures. Second graders shows better performances in multiplicative facts recalling than their same-age peers. Such result suggests that the early promotion of relational thinking is desirable. However, five graders shows a better operation sense and so we conclude that a relational approach is important all over primary school, not just for the introduction of new arithmetical objects.

Finally, teacher’s role analysis shows how the shift from the usage of a tool to the construction of a meaning depends strictly on the teacher’s intervention. Recognizing and production of hybrid signs appear as key elements in the process of semiotic mediation.

1 Il problema di ricerca

Come tutti, sono stato uno studente nella scuola. All'epoca amavo particolarmente la Matematica perché si trattava dell'unica disciplina in cui bastava stare attenti in classe per avere buoni risultati.

Le interrogazioni di Storia richiedevano molta preparazione; dovevo leggere e rileggere il capitolo assegnato, cercare di memorizzare nomi e date. In Matematica era tutto più semplice. Con il tempo compresi che se non ricordavo uno degli algoritmi spiegati, mi bastava ragionarci su; al massimo dovevo fare un paio di tentativi e confrontare il risultato ottenuto con quello indicato sul libro, di fianco al testo dell'esercizio. Fare i compiti di Matematica non era così faticoso come nelle altre materie ed era rassicurante sapere che, sbattendoci magari la testa un po' sopra, sarei sicuramente riuscito ad arrivare a un risultato soddisfacente per me e per l'insegnante. Avrei capito solo successivamente che era così perché avevo un buon controllo sui processi risolutivi che mettevo in atto e una discreta abilità nell'individuare i miei errori e correggerli.

Decisi di iscrivermi al corso di laurea in Matematica e nel frattempo mi resi disponibile per aiutare gli studenti delle scuole superiori con i compiti per casa. Quando mi affiancavo a quei ragazzi, mentre risolvevano gli esercizi assegnati dai loro insegnanti, rimanevo stupito dal fatto che cercassero di applicare ciecamente qualche meccanismo che richiamavano dalla memoria in modo confuso e impreciso. Sembrava che non ci pensassero su. Erano convinti che, tentando una dietro l'altra le formule che avevano pedissequamente memorizzato, sarebbero riusciti a spuntarla in qualche modo.

Rimasi colpito dall'immagine della Matematica maturata da questi studenti, così diversa da quella che invece avevo dipinto io durante i miei studi. Decisi che avrei voluto fare l'insegnante di Matematica nel tentativo di rendere visibile anche ai più piccoli quella bellezza che io riuscivo ad ammirare nella mia amata disciplina.

Preparandomi per l'esame di "Didattica della matematica" lessi alcune righe da un libro della Prof.ssa Zan; si trattava delle parole di uno studente:

La matematica è fatta di regole ben precise che vanno seguite, non ci si può inventare nulla. I problemi si risolvono seguendo quelle regole e io, ora, non mi ricordo [...]. (Zan, 2007, p. 203)

In quelle parole rileggevo la visione di quegli studenti a cui avevo fatto ripetizioni. Ebbi la conferma che quella convinzione era particolarmente diffusa. Ma come era possibile che molti maturassero una tale convinzione proprio nei confronti della disciplina che io amavo perché non richiedeva di memorizzare niente?

Cominciai a chiedermi: qual è davvero il ruolo della memoria nell'apprendimento della matematica?

1.1 Inquadramento del problema

Nell'ambito della ricerca in Didattica della Matematica costituisce un tema attuale, e di crescente interesse, quello dell'apprendimento della Matematica nei casi di Disturbi Specifici dell'Apprendimento e in particolare di **discalculia** (e.g. Schereret al, 2016; Karagiannakis et al, 2014; Karagiannakis & Cooreman, 2014). Il fenomeno è largamente studiato anche da altre discipline (come le Neuroscienze e la Psicologia) che hanno già evidenziato alcune peculiari difficoltà legate a questo disturbo (e.g. Butterworth, 2005; Lucangeli, 2012); fra queste la difficoltà nella memorizzazione di fatti aritmetici e algebrici.

Le difficoltà che gli studenti incontrano nell'apprendimento della matematica sono molteplici e sono spesso giustificate in termini di relazione fra le capacità dello studente e la natura della disciplina. Un esempio di convinzione estremamente diffusa è riportato da Zan (2002) attraverso le parole di uno studente¹:

Alle medie la matematica iniziò a essere un po' più confusa, specialmente per la geometria, che, con tutte le formule del perimetro, area, circonferenza, diametro, ecc. imparate a **memoria**, rendeva solo la vita più complicata. Forse ci sono troppi teoremi e troppe cose per dei ragazzi delle medie e impararle a **memoria** è impossibile. (p. 40)

Questa testimonianza è solo un esempio della convinzione per cui *in matematica ci vuole tanta memoria*. In effetti, il cosiddetto *rote-learning*² è stato definito, anni or sono, come uno dei più grandi nemici dell'apprendimento della matematica (Fremont, 1967) e da allora sono stati ben pochi gli studiosi di Didattica della matematica che hanno focalizzato la loro attenzione sul tema della memoria a lungo termine (MLT), se non con un'accezione negativa.

Tale mancanza è stata rilevata in diversi momenti del passato (Byers & Erlwanger, 1985; Karsenty, 2002) e sembra permanere tutt'oggi. Tuttavia, in accordo con Bahrick e Phelps (1994), uno degli obiettivi dell'educazione è quello di conservare la conoscenza, perciò lo studio della MLT è estremamente rilevante per chi si interessa di apprendimento.

Conway e colleghi (1991) mostrano che differenti conoscenze sono memorizzate in modo diverso, il che implica la necessità di studiare la memoria focalizzando l'attenzione sui diversi contenuti: occorre studiare il particolare modo in cui le informazioni riguardanti la matematica (in particolare l'aritmetica) sono memorizzate. Tuttavia, la letteratura su questo particolare tema è scarsa e quindi prima di poter comprendere la difficoltà particolare è necessario descrivere come funziona il sistema della MLT nei casi in cui il disturbo non sia presente, per andare poi ad indagare quali aspetti sono compromessi e quindi i possibili interventi didattici. Ci si chiede quale sia il ruolo della MLT nell'apprendimento dell'aritmetica, come i fatti aritmetici vengano organizzati nella memoria, richiamati e dimenticati.

Il presente lavoro vuole essere un tentativo di utilizzare gli studi emersi nell'ambito della Psicologia cognitiva in applicazioni legate alla Didattica della matematica e affronta il

¹ Grassetto aggiunto.

² Traducibile in italiano come "memorizzazione meccanica".

problema della permanenza di conoscenze matematiche, seguendo l'invito di Byers e Erlwanger (1985).

Se una ricerca bibliografica sul tema della memorizzazione in ambito aritmetico ha rivelato la scarsa presenza di ricerche e di pubblicazioni sul tema, si è però notato la presenza di una vasta letteratura su un unico contenuto: la memorizzazione di fatti aritmetici moltiplicativi elementari (le cosiddette tabelline). Si è deciso quindi di focalizzare la ricerca su questo tema, per poi eventualmente discutere quali risultati sono generalizzabili ad altri contenuti matematici.

Si tiene a precisare che non si vuole promuovere l'uso di tecniche di insegnamento legate alla memorizzazione meccanica delle tabelline e, tantomeno, si intende demonizzare l'apprendimento mnemonico. Riconoscendo le possibili difficoltà legate all'apprendimento mnemonico nonché la brutta immagine della matematica che ne può derivare, si condivide la posizione di Zan (1998) per cui

[l]a memorizzazione delle tabelline, e più in generale di fatti aritmetici, permette la costruzione da parte del bambino di una complessa rete di relazioni che rende disponibile, al momento opportuno, una serie di informazioni, alcune di tipo strutturale, altre legate alla rappresentazione. Ed è proprio questa rete di informazioni che interviene in modo determinante quando il soggetto si trova davanti ad un problema, cioè ad una situazione per cui non ha a disposizione un algoritmo risolutivo. (p. 19)

Per quanto detto, scopo di questo lavoro non è quello di determinare se e quanto la memoria abbia un ruolo nell'apprendimento della matematica ma quello di fornire qualche elemento per una prima risposta ad alcune delle domande poste da Byers e Erlwanger (1985), ossia *che cosa viene ricordato e come è ricordato* un concetto matematico (in questo caso le tabelline).

Dato che si hanno poche informazioni riguardo alla didattica che favorisce (o meno) l'apprendimento dei fatti moltiplicativi, si è deciso di eseguire un'indagine preliminare volta a evidenziare quali elementi possano contribuire al successo nella memorizzazione a lungo termine. Nel seguito si descrivono alcuni risultati di tale indagine, spiegando come hanno fornito la base per metter a fuoco una prima formulazione delle domande di ricerca di questo studio.

1.2 Un'indagine preliminare³

Nella sezione precedente è stato affermato che, a tutt'oggi, non esiste una tradizione di ricerca sulla memoria applicata alla Didattica della matematica. Tuttavia è possibile notare che la parola "memoria" compare in moltissimi articoli ma, quasi sempre, in termini di *memoria di lavoro* che si può definire come "sistema per la ritenzione e la manipolazione temporanea dell'informazione" (Baddeley et al. 2011, p.23).

³ L'analisi qui presentata è riportata anche in (Mariotti & Maffia, 2015) e in (Maffia & Mariotti, in press-a).

Il focus qui, invece, è la *memoria a lungo termine*, definita come un insieme di informazioni acquisite e alle quali è possibile avere accesso dopo un periodo di tempo maggiore di pochi minuti.

1.2.1 Riferimenti teorici

In Psicologia, la MLT è un tema largamente studiato, e numerosi sono gli aggettivi che vengono abbinati alla memoria per distinguerne i diversi aspetti in termini di uso che ne viene fatto o di tipologia o durata delle informazioni conservate. Ai fini di questa analisi, si concentrerà l'attenzione solo sulla differenza fra *memoria episodica* e *memoria semantica* secondo la distinzione fatta da Tulving (1972).

Per **memoria episodica** si intende l'insieme delle informazioni associate a un particolare momento o luogo; tutte le altre informazioni presenti nella memoria a lungo termine costituiscono la **memoria semantica**. Ad esempio sono parte della memoria semantica le conoscenze generali ovvero la cosiddetta conoscenza enciclopedica.

Inoltre, da tale definizione si evince che l'insieme di tutte le informazioni che sono apprese relativamente alla matematica è incluso all'interno della memoria semantica. Appartengono quindi alla memoria semantica le diverse rappresentazioni associate ad un concetto matematico (per es. il suo nome, le sue rappresentazioni simboliche e/o grafiche, ecc.) così come i problemi a esso associati, le procedure conosciute e così via.

In accordo con Vergnaud (1983), lo studio delle conoscenze relative a un concetto può essere effettuato attraverso l'uso del costrutto di **campo concettuale** caratterizzato da “un insieme di problemi e situazioni il cui trattamento richiede concetti, procedure e rappresentazioni di diverso tipo ma strettamente interconnesse” (ibidem, p. 127). In particolare il campo concettuale è caratterizzato dalle situazioni associate e dagli schemi attivati per lavorare su una particolare classe di problemi. Con la parola **schema** si intende “l'organizzazione invariante dell'attività in una certa classe di situazione” (Vergnaud, 2009, p. 88). Dato che il tema di questa indagine preliminare sono le tabelline, per classificare le tipologie di problemi presentati dagli intervistati si è fatto uso della classificazione fatta da Vergnaud (1983) per le *strutture moltiplicative*. Si è quindi fatta una prima suddivisione in

- *Isomorfismi di misure*: la struttura di questi problemi consiste in una relazione di proporzionalità diretta fra due spazi di misura. Ne sono esempi la suddivisione di quantità di oggetti in parti eque, i prezzi costanti, moti a velocità costante, problemi di densità costante.
- *Prodotti di misure*: si tratta dei problemi la cui struttura consiste nel prodotto cartesiano fra due spazi di misura. Per esempio i problemi di calcolo di aree e volumi.
- *Proporzioni multiple*: è il caso in cui si ha uno spazio di misura proporzionale ad altri due indipendenti. Un esempio riportato da Vergnaud è l'approvvigionamento di viveri per una vacanza che è proporzionale sia al numero di persone sia alla durata della vacanza (ibidem, p. 139).

Chiaramente questa non è l'unica classificazione possibile (cfr sez. 3.4.1) ma, essendo il suo uso diffuso in letteratura, permette di mettere in relazione i risultati di questa prima indagine con quelli di numerose altre ricerche.

Il focus di indagine sono i **fatti aritmetici**; con questo termine si intende una tripletta di numeri in cui i primi due rappresentano i termini di una operazione aritmetica e il terzo numero è il suo risultato. In particolare, l'intervista predisposta riguarda le tabelline (ossia i fatti aritmetici in cui l'operazione è il prodotto di due numeri naturali minori o uguali a 10) e la concezione di moltiplicazione che queste evocano, intesa come la rete di significati all'interno della quale sono inserite. Pertanto, oltre a richiedere la risoluzione di alcuni prodotti, sono state predisposte altre domande finalizzate a indagare, nel soggetto intervistato, le componenti del campo concettuale delle strutture moltiplicative.

1.2.2 Metodologia

Le ricerche classiche sulla memoria si basano su esperimenti di laboratorio legati soprattutto al richiamo o al riconoscimento di informazioni acquisite nell'arco dell'esperimento stesso. Negli anni '80 ha acquisito sempre più importanza il cosiddetto **approccio ecologico** inteso come lo studio dell'attività cognitiva che si manifesta nell'ambiente ordinario e nel contesto di attività concrete (Neisser, 1978). In accordo con Neisser (*ibidem*) si ritiene che una teoria psicologica sia interessante quando "ha qualcosa da dire su cosa la gente fa in situazioni reali e culturalmente significative" (p. 25) pertanto si è deciso di adottare tale approccio nonostante non vi sia ancora molta letteratura sull'applicazione di metodologie di questo tipo allo studio del richiamo di fatti aritmetici. Di fatto si trae spunto dalle parole di Bahrick e Phelps (1994) secondo i quali

[L]'educazione può trarre profitto dalla ricerca sulla memoria se esaminiamo la ritenzione del contenuto semantico attraverso lunghi periodi di tempo e ciò può avvenire soltanto se riusciamo a perfezionare dei metodi idonei a trattare questo genere di contenuto. [...] l'indagine psicologica comincia ad estendersi a nuove aree di contenuto non appena vengono improvvisati dei metodi idonei a studiare empiricamente quel contenuto. (p. 222)

Ovviamente un'analisi di tipo ecologico non consente di isolare molte delle variabili in gioco ma, così come mostrato da Karsenty (2002), può permettere la messa in relazione dei concetti matematici appresi a scuola anche a distanza di molti anni.

In analogia al succitato lavoro si è deciso di far ricorso a un'intervista semi-strutturata composta da cinque blocchi di domande. Ciascuno dei primi quattro blocchi riguarda un fatto aritmetico moltiplicativo e mira a raccogliere informazioni sulla relativa concezione da parte dell'intervistato. Per indagare le diverse componenti della concezione viene richiesto come il soggetto è arrivato alla risposta (per esempio, come è arrivato al risultato), quali strategie e risultati alternativi sono stati ricordati. Un esempio di blocco di domande è il seguente:

- i. Potresti dirmi quanto fa 7×4 ?
- ii. Puoi descrivermi come hai fatto a calcolarlo?
- iii. Ti sono venute in mente altre risposte oltre a quella data?
- iv. Potrebbero esserci altri modi per arrivare al risultato?
- v. Potresti descrivermi una situazione in cui è necessario o utile fare questo calcolo?

L'ultima domanda è stata presentata in alternanza con un altro quesito:

- v. Se dovessi spiegare a un bambino come fare a svolgere questo calcolo, come lo faresti?

Entrambe queste domande hanno lo scopo di mettere in luce i problemi e le rappresentazioni legate al fatto aritmetico o, più in generale, al prodotto fra numeri naturali. La seconda, in particolare, punta a rendere evidenti le concezioni legate alla moltiplicazione che il soggetto ritiene più elementari e basilari. I prodotti utilizzati nei quattro blocchi di domande sono 7×4 , 8×6 , 13×5 e 12×4 ; si è scelto di utilizzare sia fatti con entrambi i termini compresi entro il 10 sia fatti con un termine maggiore di 10 per indagare i principali invarianti operatori associati all'operazione di moltiplicazione, in particolare si voleva indagare se e come gli invarianti operatori cambiano al variare dei fattori all'interno o meno della tavola pitagorica. Si è ipotizzato, infatti, che l'impossibilità di richiamare direttamente il risultato di un prodotto avrebbe messo in luce le strategie utilizzate per ricavarlo (o ricostruirlo).

L'ultimo blocco di domande riguarda, invece, la memoria autobiografica dell'intervistato relativamente ai momenti, i luoghi e le persone nonché le sensazioni e gli stati d'animo legati all'apprendimento dei fatti aritmetici moltiplicativi.

Il campione intervistato è costituito da dieci soggetti, di cui cinque uomini e cinque donne, di età compresa fra i 35 e i 42 anni (età media 37,5). Le interviste si sono svolte fra giugno e dicembre 2013, sempre con lo stesso intervistatore. Il luogo dell'intervista è stato scelto dall'intervistato ed è conciso, nella quasi totalità dei casi, con la propria abitazione; l'intervistato aveva quindi a disposizione qualsiasi strumento reputasse necessario (carta e penna, calcolatrice,...) ma nessuno ha mai fatto ricorso a strumenti durante l'intervista, pertanto il calcolo è sempre stato di tipo mentale. Tutti i soggetti hanno conosciuto l'intervistatore prima dell'intervista. Le interviste sono state videoregistrate, la durata media è di 10 minuti e 6 secondi.

Una delle principali ipotesi di ricerca è che le informazioni memorizzate e il modo in cui sono organizzate dipendano dalla durata e dalla tipologia di esposizione del soggetto al contenuto indagato. Pertanto si è ritenuto utile raccogliere delle informazioni aggiuntive sulla tipologia di formazione matematica degli intervistati nonché del luogo in cui questa è avvenuta. Osservando le videoregistrazioni si è quindi proceduto nell'individuazione di caratteristiche comuni nelle risposte dei soggetti, suddivisi in base a queste informazioni aggiuntive.

1.2.3 Risultati

Anche se le tabelline costituiscono un elemento chiave dell'insegnamento elementare, da una prima analisi delle interviste è emerso chiaramente un legame tra i comportamenti osservati e il grado di istruzione dei soggetti. Pertanto, la prima variabile considerata nell'analisi dei risultati è stata il grado di istruzione dei soggetti; in particolare, in analogia con Bahrck e Hall (1991) si è deciso di suddividere gli intervistati in tre categorie a seconda della rilevanza dell'aritmetica e, più in generale, della matematica nei loro studi di grado più alto:

- *Alta formazione*: si tratta di tutti i soggetti con laurea (o studi superiori) in discipline che fanno ampio uso della matematica (per esempio matematica, fisica, ingegneria).
- *Media formazione*: si tratta di tutti i soggetti che hanno frequentato un Liceo Scientifico

e successivamente un corso di laurea con basso o nessun impiego della matematica e anche dei soggetti che, avendo frequentato altro tipo di scuola superiore, hanno frequentato un corso di laurea con un medio uso della matematica (per esempio materie scientifiche o tecnologiche diverse da quelle sopracitate).

- *Bassa formazione*: si tratta dei soggetti che non hanno avuto accesso all'istruzione secondaria superiore o che hanno frequentato sia una scuola superiore sia un corso di laurea con basso o nessun impiego della matematica.

Seguendo questa classificazione, fra gli intervistati, vi sono tre soggetti con alta formazione, quattro con media formazione e tre con bassa formazione (si veda la tabella 1.2.3.1).

		Ele	Ang	And	Val	Raf	Lar	Bar	Ale	Pao	Mar
Bassa Form.	Licenza media	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Diploma o CdL basso uso Mat.		✓								
Media Form.	Liceo scientifico				✓	✓	✓		✓	✓	✓
	CdL medio uso Mat.							✓			
A.F.	Laurea alto uso Mat.								✓	✓	✓

Tabella 1.2.3.1: Formazione degli intervistati.

Si potrebbe pensare anche a una relazione fra l'attività lavorativa attuale degli intervistati e la loro memoria per i fatti aritmetici e quindi classificare anche le professioni in base all'uso che fanno dell'aritmetica. Tuttavia nelle interviste si osserva che il legame fra tipologia di professione e capacità di ricordare o ricostruire fatti moltiplicativi non è forte tanto quanto quello con la formazione. Per esempio Val lavora come cassiera in un supermercato e quindi ha a che fare con calcoli elementari quotidianamente. Dopo aver frequentato il Liceo Scientifico, ha proseguito gli studi in ambito umanistico. Val richiama rapidamente i risultati dei fatti aritmetici con termini entro il 10 ma ha bisogno di più tempo rispetto ad altri intervistati per riuscire a ricostruire quelli con un termine maggiore. Viceversa Mar è laureato in Ingegneria e ha anche conseguito un dottorato nello stesso settore. Mar attualmente svolge una professione in cui non è richiesto nessun tipo di competenza aritmetica, tuttavia riesce a richiamare i risultati dei fatti aritmetici moltiplicativi molto rapidamente utilizzando anche diverse strategie. Per questi motivi la professione svolta al momento dell'intervista non sarà considerata fra le variabili. Questa scelta appare in disaccordo con i risultati di altre ricerche come, per esempio, il lavoro di Nunes et al. (1993) sulle abilità aritmetiche dei commercianti brasiliani; tuttavia tali risultati si riferivano a un contesto in cui l'uso di calcolatrici e casse automatiche non era diffuso e quindi il calcolo mentale era continuamente esercitato.

1.2.3.1 Invarianti operatori

Analizzando le interviste si nota che ne vengono commessi soltanto due errori e dalla stessa persona. Ele incontra difficoltà nello svolgere i prodotti con un fattore maggiore di 10; in

particolare quando deve svolgere 13×5 decide di applicare la proprietà distributiva e calcolare $(10+3) \times 5$:

INT: Potresti dirmi quanto fa 13×5 ?

ELE: Oh mamma! [guarda verso l'alto, alcuni secondi di silenzio] sessanta... [silenzio] cinquantanove?

INT: Mi racconti come hai fatto a trovare questo risultato?

ELE: Tredici per cinque: ho fatto cinquanta e poi tre, sei, nove [guarda verso l'alto, silenzio] e non fa quello che ho detto io! [ride]

INT: E quindi quanto dovrebbe venire?

ELE: [sguardo nel vuoto, alcuni secondi di silenzio] Quindici, perciò...sessanta...cinque. [annuisce]

Ele richiama rapidamente $10 \times 5 = 50$ ma al posto di $3 \times 5 = 15$ richiama il risultato di 3×3 e fornisce quindi la risposta 59. Appare analogo l'errore che commette nel calcolo di 12×4 per cui fornisce la risposta 50 ($10 \times 4 + 2 \times 5$).

Un fenomeno simile si osserva anche nell'intervista di And, anche se lui fornisce inizialmente la risposta corretta:

INT: Ti dovessi chiedere, invece, quanto fa otto per sei?

AND: (alcuni secondi di silenzio) quarantotto.

[...]

INT: Prova a immaginare di dover descrivere a un bambino come fare a calcolarsi otto per sei. Cosa gli diresti fare? Come gli diresti di procedere?

AND: Gli farei dei gruppi!

INT: Come li faresti?

AND: Degli omini, otto omini. Devi fare **sessantaquattro, cioè otto per sei**. Tanti gruppi da otto omini. Sei da...otto. Sei gruppi, poi li farei contare.

INT: Ok.

Mentre cerca di fornire un esempio che risponda alla seconda domanda dell'intervistatore, And parla del numero 64 ($= 8 \times 8$) come se fosse il risultato di 8×6 . Campbell (1987) spiega questi errori in termini di *interferenza*: quando una domanda attiva nella memoria di un

soggetto più di una informazione allora le diverse informazioni entrano in competizione e solo quella più forte⁴ viene richiamata (Anderson, Bjork, & Bjork, 1994).

Tale fenomeno si presenta soltanto nei casi di Ele e And che sono i due soggetti con la formazione matematica più bassa.

Un altro interessante fenomeno riguarda entrambi questi soggetti. Durante l'intervista è stato chiesto a tutti i soggetti di calcolare 12×4 poi, dopo qualche altra domanda, veniva chiesto di fornire il risultato di 4×12 . Per quanto riguarda questo secondo calcolo, tutti i soggetti hanno fatto uso della proprietà commutativa riconoscendo che il risultato era lo stesso del fatto richiamato pochi istanti prima; And e Ele non hanno invece impiegato questa strategia ma hanno calcolato nuovamente il risultato. And ha lo stesso comportamento quando affronta 8×6 che calcola raddoppiando il numero 8 e poi sommando tre volte il risultato ottenuto con se stesso. Tutti gli altri soggetti richiamano il risultato di 6×8 che sembra essere più facile da ricordare, probabilmente per via della rima fra il secondo fattore e il risultato. La strategia usata da And richiede molto più tempo (circa 4s) rispetto a quella usata dagli altri soggetti, tuttavia questo non è vero in assoluto: Ele usa la proprietà commutativa ma necessita comunque di molto più tempo degli altri (9s rispetto ai 2s mediamente usati dagli altri).

Non si deve tuttavia pensare che i soggetti che non hanno avuto accesso all'istruzione secondaria superiore non adottino schemi di comportamento basati sulle proprietà della moltiplicazione. Come si è già visto Ele fa uso sia della proprietà commutativa sia della distributiva, inoltre And usa sempre la proprietà associativa del prodotto che gli permette di svolgere molto rapidamente alcuni calcoli (come 12×4 ottenuto come $12 \times 2 \times 2$) ma lo mette in difficoltà in altri (come 13×5 ottenuto come $13 \times 2 \times 2 + 13$). Sicuramente hanno avuto accesso a tutte e tre le proprietà durante la loro formazione, dato che a queste veniva dedicato molto spazio durante la scuola elementare e nella scuola media⁵.

I tempi di risposta per gli altri prodotti che coinvolgono fattori compresi entro il 10, suggeriscono invece che tali fatti aritmetici vengano richiamati direttamente dalla memoria. Un esempio è dato da 7×4 al quale quasi tutti rispondono rapidamente e affermando di aver determinato la risposta perché l'informazione era presente in memoria. L'unica eccezione è data da Ele:

INT: Puoi dirmi quanto fa sette per quattro?

ELE: Ventotto.

INT: Puoi descrivermi come hai fatto a calcolarlo?

ELE: [ride] Ricordandomi la filastrocca.

4 Le variabili che definiscono la forza dell'associazione fra due informazioni sono molteplici. Questa può infatti dipendere dal numero di volte in cui le due informazioni sono state richiamate insieme, dalla prossimità dell'ultimo richiamo, dalla particolarità di un episodio in cui tale associazione è stata fatta o dallo stato del soggetto. Per una descrizione più ampia del fenomeno si rimanda al testo di Baddeley e al (2011, p. 249 e segg.)

5 Il range di età dei soggetti è stato scelto di modo che tutti quanti avessero iniziato la scuola elementare prima dell'avvento dei nuovi programmi del 1985. Pertanto si fa riferimento ai programmi del 1955 per quanto concerne la scuola elementare e del 1979 per la scuola media.

INT: Puoi dirmi quale filastrocca?

ELE: Sette, quattordici, ventuno, ventotto.

INT: Ok. Ti sono venute in mente altre risposte oltre a quella che mi hai dato?

ELE: No. [sorride]

Di fatto per Ele è importante richiamare l'informazione inserendola tra altre in un determinato ordine (la filastrocca dei multipli di sette) ma, comunque, la strategia utilizzata non sembra essere di tipo ricostruttivo, dato che Ele ripete rapidamente la filastrocca e non sta quindi svolgendo delle somme ripetute. Ele riesce a richiamare l'informazione soltanto all'interno di una struttura conoscitiva nella quale quell'informazione acquisisce un significato seppure non matematico.

La maggior parte delle strategie ricostruttive sono basate sulle proprietà della moltiplicazione: in tabella 1.2.3.2 sono elencate le proprietà usate dagli intervistati per ricostruire quei risultati che non erano in grado di richiamare direttamente dalla memoria. Queste proprietà sono applicate soprattutto (ma non solo) nel caso di fatti moltiplicativi che coinvolgono un fattore maggiore di 10.

Non sembra esserci un collegamento diretto fra le proprietà utilizzate e il livello di scolarizzazione dato che tutti applicano la proprietà commutativa e quella distributiva in alcuni casi; l'associativa compare più raramente ma in tutti i livelli di formazione. La differenza di comportamento che può essere messa in evidenza riguarda invece la scelta della proprietà da applicare: *gli intervistati con alta formazione cambiano proprietà a seconda della moltiplicazione richiesta mentre i soggetti con bassa formazione a volte non riconoscono la proprietà più utile da applicare* (come nel caso del calcolo di 12×4 sopra descritto) e applicano costantemente la stessa proprietà anche in casi in cui non è vantaggiosa (si consideri il caso in cui And calcola 13×5 applicando la proprietà associativa).

Proprietà	Bassa Formaz			Media Formaz			Alta Formaz			
	Ele	Ang	And	Val	Raf	Lar	Bar	Ale	Pao	Mar
Commutativa	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Associativa			✓		✓		✓	✓		✓
Distributiva	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tabella 1.2.3.2: Proprietà della moltiplicazione applicate dagli intervistati.

Gli intervistati con alta formazione mostrano quindi abilità migliori dal punto di vista meta-cognitivo, mentre gli intervistati con bassa formazione mostrano degli **schemi paradigmatici** (Nunes, Schliemann, & Carraher, 1993) di comportamento, definiti in letteratura anche come *script* (Schank & Abelson, 1977).

1.2.3.2 Problemi associati ai fatti moltiplicativi

Per ciascuna delle moltiplicazioni risolte è richiesto ai soggetti di indicare degli esempi di situazioni a cui associano tale prodotto. Dalle interviste si può notare che tutti i soggetti, tranne uno, portano sempre esempi di isomorfismi di misure. L'esempio più diffuso è quello

di determinare il totale di un certo numero di oggetti distribuiti equamente in un certo numero di contenitori o fra un certo numero di persone. Tuttavia questa osservazione non stupisce dato che una delle domande utilizzate richiedeva il modo in cui si sarebbe spiegato il prodotto a un bambino e, in Italia, i problemi di questo tipo sono fra quelli maggiormente utilizzati nella scuola primaria. Diversamente, sono pochi gli esempi forniti dagli intervistati che riguardano prodotti di misure (per esempio il calcolo dell'area di un rettangolo) e tali esempi sono dati solo da soggetti con grado di istruzione medio-alto (si veda la tabella 1.2.3.3).

Viene fornito un unico esempio di proporzione multipla:

INT: Devi dare un problemino a un bambino in cui lui, per risolvere questo problema, deve calcolare tredici per cinque. Come lo faresti questo problemino?

BAR: Non lo so, immaginerei intanto che tredici sono i bambini e cinque...non lo so, sono i giorni di vacanza in cui vanno a fare gli scout e per ogni giorno si devono procurare un tot di viveri e quindi devono fare una moltiplicazione per trovarla.

In generale, gli esempi riportati dai soggetti fanno riferimento a situazioni del proprio quotidiano. Alcuni fanno riferimento alla propria professione, per esempio Val lavora come cassiera in un supermercato:

VAL: Beh! Dato che lavoro...contare le bottiglie di birra, mi verrebbe in mente, nel carrello di qualcuno. Visto che siamo vicini all'estate!

Altri si riferiscono invece alla situazione domestica e ai propri hobby:

BAR: Ad esempio...per riproporzionare il dosaggio di un antiparassitario quando devi andare a fare l'orto [...]. I dosaggi non sono mai scritti per quello che devi andare a fare. Lì non dovrai fare solo una moltiplicazione evidentemente, ma dovrai fare una proporzione.

Classificazione dei problemi	<u>Bassa Formaz</u>			<u>Media Formaz</u>			<u>Alta Formaz</u>			
	Ele	Ang	And	Val	Raf	Lar	Bar	Ale	Pao	Mar
Isomorfismi di misure	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓
Prodotti di misure				✓				✓	✓	
Proporzioni multiple							✓			

Tabella 1.2.3.3: Tipologie di problemi forniti dagli intervistati.

Altri casi notevoli sono quelli che fanno riferimento a problemi interni alla matematica. Ale e Pao, entrambi con alta formazione matematica, fanno immediatamente riferimento al calcolo dell'area del rettangolo:

INT: Senti: dovessi immaginare una situazione in cui può essere utile fare questo calcolo: quale potrebbe essere?

PAO: La prima che mi è venuta in mente...trovare l'area di un rettangolo. Un lato per un altro lato.

Entrambi i soggetti sono però in grado di riportare anche esempi legati al quotidiano come il conteggio di oggetti disposti in schieramento o raggruppati in gruppi uguali così come il calcolo del prezzo totale di un dato numero di oggetti noto il prezzo del singolo oggetto.

Diversamente, Ele trova molta difficoltà ad associare dei problemi ai fatti moltiplicativi richiesti:

INT: Potresti descrivermi una situazione in cui pensi che sia necessario o utile fare questo calcolo?

ELE: Come? Una situazione... [rimane in silenzio]

INT: Una situazione qualsiasi in cui può essere utile, o anche necessario proprio, fare questo calcolo qui.

ELE: Quello che ho fatto io o fare sette per quattro?

INT: Sette per quattro.

ELE: [qualche istante di silenzio] Aspetta [rimane a lungo in silenzio] Non mi viene in mente nulla.

INT: Una situazione qualsiasi, della vita...

ELE: [silenzio] Se...se devo dividere delle cose.

INT: Fai proprio un esempio concreto, con degli oggetti.

ELE: Ah! Faccio un problema di matematica.

Del tutto analoga è la situazione di And:

INT: Se tu dovessi immaginare una situazione in cui serve fare questo calcolo, in cui può essere utile fare sette per quattro: quale potrebbe essere questa situazione?

AND: Eh...sette per quattro... [silenzio] che situazione deve essere?

INT: Una situazione qualsiasi, della vita o...boh! Un contesto in cui può essere utile farlo.

AND: A scuola...non so in...una lezione di matematica.

INT: Perché, per esempio, che cosa potrebbe essere chiesto in una lezione di matematica?

AND: Le tabelline! Sette per quattro: la tabellina del sette o la tabellina del quattro.

INT: Ti vengono in mente altri esempi di situazioni?

AND: No.

Come si può notare, entrambi trovano molta difficoltà nell'immaginare un impiego della moltiplicazione al di fuori del contesto prettamente scolastico. Viceversa, *i soggetti con*

formazione più alta forniscono una maggiore varietà di problemi, interni ed esterni alla matematica.

1.2.3.3 Memoria autobiografica

Allo scopo di indagare il rapporto fra memoria semantica ed episodica è stato realizzato l'ultimo blocco di domande relative alla memoria autobiografica. Le risposte a queste domande mostrano una situazione diversa da soggetto a soggetto: alcuni riescono ad associare il periodo dell'apprendimento delle tabelline a un preciso momento della propria vita e a determinati luoghi o persone con estrema sicurezza. Altri invece ritengono di averle apprese durante le scuole elementari ma non sono in grado di specificare in quale anno. Tuttavia, tutti sanno indicare con discreta certezza il modo in cui hanno memorizzato questi fatti aritmetici: sette soggetti su dieci ricordano di aver ripetuto molte volte le diverse tabelline e cinque intervistati dichiarano, inoltre, di aver fatto ricorso ad alcuni strumenti per la memorizzazione. In particolare Ale sostiene di essersi aiutato con il metro da sarta mentre gli altri fanno riferimento a una tabella presente nell'interno di copertina del quaderno:

INT: Ti ricordi quando e come hai imparato le tabelline?

BAR: Allora: quando? Sì, alle scuole elementari. Come? Non mi ricordo precisamente... anzi! Mi ricordo che c'erano proprio delle...tipo tabelle, dietro ai quaderni dove...c'era una specie di meccanismo, che ora non ti saprei assolutamente descrivere, per arrivare a fare le varie moltiplicazioni [...]. Non so se avevo imparato il meccanismo o se andavo a memoria. Perché io visualizzo molto quindi quella tabella può essere che io l'abbia talmente visualizzata che era una specie di artificio meccanico. [...]

Durante l'intervista ad Ang, le è stato chiesto di rappresentare su un foglio la tabella a cui, anche lei, faceva riferimento. Ang ha disegnato la tavola pitagorica.

Oltre agli strumenti utilizzati per la memorizzazione, molti soggetti riescono a richiamare stati d'animo e sensazioni associate all'apprendimento delle tabelline. Il ricordo di certi stati d'animo influenza addirittura il comportamento del soggetto durante l'intervista: chi ha avuto difficoltà a memorizzare le tabelline e per questo si è sentito frustrato o inadeguato, manifesta insicurezza e agitazione anche durante l'intervista. Questi soggetti evitano lo sguardo dell'intervistatore, manifestano posture tese o movimenti agitati che sono generalmente considerati indice di stress o di ansia (Di Nuovo & Rispoli, 2011). Viceversa chi ha avuto soddisfazione nella memorizzazione perché la cosa gli riusciva bene, appare divertito e, in alcuni casi, addirittura spavaldo. Lo sguardo è generalmente rivolto all'intervistatore dopo aver dato risposta e non sono rari i sorrisi. Risulta evidente quindi un legame fra alcuni fattori affettivi e la memoria per i fatti aritmetici, tuttavia un'analisi adeguata di questi aspetti richiederebbe più spazio e va oltre gli scopi di questa indagine.

1.3 Domande di ricerca: prima formulazione

L'analisi proposta mette in luce due principali differenze fra le prestazioni dei soggetti con diverso livello di formazione matematica. I soggetti con alta formazione matematica

dimostrano maggiori competenze strategiche soprattutto sul piano meta-cognitivo. Inoltre, si è notato come i soggetti con bassa formazione non siano in grado di associare la matematica appresa fra le mura scolastiche ai contesti della vita quotidiana.

La presenza di errori di interferenza suggerisce che la principale strategia usata per determinare il risultato sia il richiamo diretto dalla memoria, ipotesi avvalorata dal fatto che i soggetti adulti privilegiano generalmente questo tipo di strategia piuttosto che le strategie ricostruttive più frequenti nei bambini (Siegler, 1988); tuttavia alcune strategie ricostruttive sono messe in atto.

Alcune di queste strategie sono legate a significati matematici (proprietà della moltiplicazione), altre a aspetti fonologici: la filastrocca usata da Ele ne è un esempio. Le strategie legate all'uso delle proprietà delle operazioni non portano mai ad errori mentre il richiamo diretto porta a risultati scorretti in pochi casi.

Si nota che, in generale, in memoria sono contenuti alcuni fatti aritmetici di per sé, insieme a informazioni utili a ricostruirne altri, eventualmente in modo scorretto nel caso di interferenze. Il modello di organizzazione della memoria suggerito da queste evidenze è quello di una rete di informazioni che varia nel tempo anche in base alle conoscenze acquisite.

Una possibile spiegazione delle prestazioni dei soggetti che hanno ricevuto un'ulteriore formazione matematica può essere data a partire dall'idea di **conoscenza marginale** così come introdotta da Bahrnick e Phelps (1994), intesa come l'insieme delle informazioni che un individuo ha acquisito in passato ma non è più in grado di richiamare. I due autori notano che la ripetizione dell'apprendimento di materiale marginale risulta più duratura dell'accesso acquisito a un materiale ugualmente difficile ma prima non familiare, indipendentemente dal fatto che l'individuo lo riconosca come tale. I soggetti che hanno continuato la loro formazione matematica hanno dovuto richiamare le loro conoscenze sui fatti aritmetici che costituivano per loro materiale noto o marginale. In entrambi i casi, il risultato di tale richiamo è il consolidamento dell'appreso in termini di più rapida e efficace accessibilità alle informazioni memorizzate.

L'alto numero di riferimenti alla tavola pitagorica come strumento per la memorizzazione suggerisce che questa abbia avuto un importante ruolo durante l'apprendimento. Usando le parole di Vygotskij (1978) la tavola pitagorica può aver agito in passato, per molti soggetti, come un **mediatore** nel senso che

il segno esterno che i bambini in età scolastica richiedono, è stato trasformato in un segno interno prodotto dall'adulto come mezzo per ricordare [...]. Nel caso dell'adulto il processo di memorizzazione mediata è talmente evoluto che occorre anche in assenza dell'aiuto esterno. (p. 33)

Il fatto che la tavola pitagorica possa avere un ruolo nell'organizzazione dei fatti aritmetici moltiplicativi in memoria è evidenziato in letteratura dalla rilevazione dei cosiddetti "*table errors*" (errori di tabella, McCloskey et al, 1991; cfr sez 2.3.1) ossia gli errori dovuti all'interferenza del risultato di un fatto che non condivide nessuno dei due fattori ma si trova all'interno della tavola pitagorica in una posizione vicina a quella del fatto richiesto. Tuttavia,

oltre all'osservazione di questo fenomeno, non si hanno ulteriori dati che indichino quale ruolo possa avere questo artefatto nella memorizzazione, pertanto questa domanda rimane aperta.

In definitiva, si mettono in evidenza due elementi che sembrano particolarmente importanti nell'apprendimento dei fatti moltiplicativi:

- le **proprietà della moltiplicazione** giocano un ruolo importante nella ricostruzione dei fatti non direttamente accessibili. In particolare la proprietà commutativa e quella distributiva sembrano accessibili a tutti i soggetti.
- La **tavola pitagorica** appare essere uno strumento importante nell'organizzazione dei fatti moltiplicativi nella memoria.

Per ciascuno di questi due punti si possono formulare delle domande di ricerca generali che guidano la ricerca bibliografica presentata nei due capitoli successivi:

1. Una migliore conoscenza delle proprietà della moltiplicazione può servire a migliorare le prestazioni di richiamo/ricostruzione di fatti moltiplicativi?
2. Quale uso della tavola pitagorica come strumento di apprendimento può aiutare nel processo di memorizzazione?

L'ipotesi dell'impiego di conoscenza marginale da parte di coloro che hanno ricevuto una maggiore formazione matematica porta a chiedersi inoltre se è più opportuno promuovere la conoscenza delle proprietà delle operazioni e l'uso della tavola pitagorica prima di una memorizzazione meccanica dei fatti moltiplicativi o se sia più opportuno presentarli a posteriori in modo da sfruttare quanto già appreso e consolidare la conoscenza pregressa.

Queste domande saranno riprese nel capitolo 5 e riformulate alla luce della letteratura di seguito analizzata e del quadro teorico.

2 Rassegna della letteratura dalla psicologia

Volendo studiare la memorizzazione dei fatti aritmetici è necessario da una parte definire un modello per il funzionamento della memoria in generale e dall'altra evidenziare quali sono le specificità del particolare contenuto considerato. Pertanto si inizierà con un'analisi della letteratura sulla memoria che sembra avere più consenso nella comunità degli psicologi. Una volta definiti i costrutti di base essenziali alla trattazione, si passerà ad analizzare i risultati che la ricerca ha fornito fino ad oggi sulla modalità in cui i fatti aritmetici moltiplicativi vengono codificati, immagazzinati e (non) richiamati dalla memoria.

2.1 La memoria

Lo studio sistematico della memoria in psicologia è fiorito a partire dagli anni '60 del secolo scorso. Da quel momento in poi si sono avvicendate numerosissime pubblicazioni e tutt'oggi gli studi proseguono con metodologie che nel tempo sono cambiate molto. Sebbene i modelli proposti siano molteplici, vi sono alcuni risultati che sembrano aver avuto un maggior consenso dato che universalmente presenti nei manuali di psicologia della memoria e spesso richiamati anche nelle più recenti pubblicazioni.

Un assunto diffuso (seppur non universalmente) è che la memoria consista in un insieme di "magazzini" di informazioni che differiscono o per la natura dell'informazione immagazzinata o per il tempo di permanenza dell'informazione stessa. Per quel che riguarda la tipologia di informazione, una prima distinzione è già stata richiamata nel capitolo precedente; Tulving (1972) definisce come **memoria episodica** l'insieme delle informazioni associate a un particolare momento o luogo, tutte le altre informazioni presenti nella memoria costituiscono la **memoria semantica**. Ad esempio sono parte della memoria semantica le conoscenze matematiche.

Memoria episodica e memoria semantica fanno parte della cosiddetta **memoria a lungo termine** (MLT) che a sua volta può essere suddivisa in memoria dichiarativa (o esplicita) o non dichiarativa (Squire, 1992). Quest'ultima situazione riguarda i casi in cui vi è una prestazione legata ad un apprendimento precedente senza però richiamare un ricordo esplicito (per esempio andare in bicicletta). Si parla di **memoria a breve termine** per riferirsi all'immagazzinamento temporaneo di piccole quantità di informazione. Rientra nella categoria della memoria a breve termine anche la cosiddetta **memoria di lavoro**, intesa come sistema che non solo permette di ritenere temporaneamente l'informazione ma anche di manipolarla (Baddeley & Hitch, 1974). Per esempio, la memoria di lavoro è quella che ci consente di svolgere un calcolo a mente anche quando non siamo in grado di richiamare direttamente il risultato dalla memoria.

Dato che siamo particolarmente interessati al ruolo della memoria in aritmetica, il funzionamento della memoria di lavoro e le relazioni che ha con la memoria a lungo termine

semantica (fra cui i fatti aritmetici già appresi) è di centrale interesse per questo lavoro. Pertanto nelle sotto-sezioni successive si riassumono alcuni modelli derivanti dalla ricerca psicologica su queste due componenti della memoria e nella sezione 2.2, basandosi su questi risultati, si esporrà il modello di memoria che sarà utilizzato nel resto di questo elaborato.

2.1.1 La memoria di lavoro

La memoria di lavoro (*working memory* in inglese, abbreviata come WM) è da intendersi come “sistema consistente in uno ‘spazio di lavoro’ a capacità limitata che può essere diviso fra esigenze di immagazzinamento e di controllo dei processi” (Baddeley & Hitch, 1974, p. 76). Pertanto la memoria di lavoro può essere concepita come divisa in più componenti, secondo un modello detto appunto **multicomponenziale**.

Fra le componenti della memoria di lavoro si possono sicuramente distinguere quelle volte all’immagazzinamento temporaneo dell’informazione. Baddeley e Hitch (1974) ne descrivono due: il **loop fonologico** serve a ripetere in modo continuativo un’informazione verbale. La sua esistenza è stata ipotizzata per spiegare le prestazioni in un classico compito utilizzato per misurare la memoria di lavoro, ovvero la ripetizione di cifre. Il numero di cifre che una persona può richiamare fra quelle elencate da un intervistatore aumenta se la persona ripete le cifre “a se stessa”. Il **taccuino visuo-spaziale** assolve una funzione simile ma per le immagini.

Per quanto riguarda invece le funzioni di controllo, queste sono svolte da una componente detta **esecutivo centrale**. Si tratta di un sistema attentivo che interviene quando la manipolazione delle informazioni non può avvenire in modo automatico. “Una funzione fondamentale dell’esecutivo centrale è la focalizzazione attentiva, la capacità di concentrare l’attenzione sul compito che abbiamo di fronte” (Baddeley et al, 2011, p. 77).

Più recentemente è stata aggiunta un’altra componente a questo modello. Si tratta del **buffer episodico**, una componente volta a mettere in relazione le altre componenti e la memoria a lungo termine. Nel buffer episodico le informazioni sono integrate e combinate (Baddeley, 2000). Il modello multicomponenziale con le sue quattro componenti è schematizzato in figura 2.1.1.1; le frecce rappresentano la possibilità di spostare un’informazione da una componente all’altra.

La maggior parte degli studi sulla memoria di lavoro riguardano il loop fonologico e molti si concentrano sulla “capienza” della WM stessa. Uno dei compiti più utilizzati è il cosiddetto “test dello span di cifre” il test consiste nel ripetere degli elenchi di cifre di lunghezza crescente. Quanto si fallisce nel richiamare una sequenza di cifre di una data lunghezza per due volte di fila, allora si è superato il proprio **span**. La maggior parte delle persone ha uno span di 6-7 cifre (Baddeley et al, 2011). Un compito equivalente è considerato quello di ripetere una sequenza di lettere che non formano una parola.

George Miller (1956) nota che in realtà il numero di cifre o lettere che si riesce a richiamare aumenta quando si riesce a raggrupparli in modo da elaborarli come un numero inferiore di informazioni. Se ripetiamo un numero cifra per cifra (ad esempio 3-4-8-5-4-6) e tentiamo di memorizzare ogni singola cifra, allora ciascuna cifra è un’informazione a sé (6 informazioni

nell'esempio). Se invece le informazioni vengono raggruppate, allora ogni gruppo costituisce un **chunk** (ad es. 34-85-46 sono 3 *chunks*). Secondo Miller (ibidem) la memoria di lavoro non può operare su più di 7 ± 2 *chunks* contemporaneamente, a prescindere dalla tipologia di informazione su cui si lavora. Questa assunzione è stata messa in discussione (Baddeley, 1994) ma quello che è certo è che la memoria di lavoro è limitata e il raggruppamento in chunks permette di lavorare su un numero maggiore di informazioni di quelle che potrebbero essere processate altrimenti.

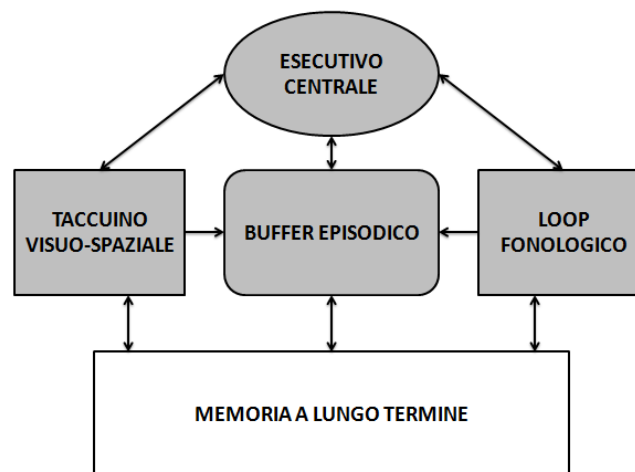


Fig. 2.1.1.1: Modello multicomponentiale della memoria di lavoro (Baddeley et al, 2011, p. 82).

Il raggruppamento delle informazioni appare particolarmente importante nell'apprendimento della matematica. Da una parte infatti, l'accrescimento delle conoscenze matematiche permette raggruppamenti altrimenti impossibili: se non conoscessi l'esistenza dei numeri a due cifre non potrei raggruppare le cifre a due a due. D'altro canto, se dovessi richiamare ogni passo di un processo od ogni elemento di una formula, allora finirei per occupare tutto lo spazio della WM e non potrei lavorarci sopra; quindi il raggruppamento di informazioni è fondamentale per poter apprendere ed elaborare procedure più complesse (Sfard, 1991). Infatti, quando richiamo un oggetto matematico come un unico chunk (o come pochi chunk) allora ho ancora spazio disponibile in memoria di lavoro per poterci operare sopra, inserirlo in altri contesti, metterlo in relazione con altri oggetti, ecc.

2.1.2 La memoria a lungo termine

Le informazioni raccolte dai nostri sensi rimangono nella memoria di lavoro per pochi minuti; le informazioni che invece è possibile richiamare dopo un tempo più lungo sono quelle contenute nella memoria a lungo termine (MLT). Fra queste informazioni si è già fatta una prima distinzione: nella memoria episodica si inseriscono le informazioni relative a un particolare momento o luogo, le conoscenze generali sul mondo formano la cosiddetta memoria semantica (Tulving, 1972). La separazione fra questi due gruppi di informazione non è soltanto comoda dal punto di vista teorico ma rispecchia anche il funzionamento del nostro cervello. Di fatto, esistono numerosi studi che testimoniano di danni cerebrali che influenzano solo l'uno o l'altro tipo di memoria (Kapur, 1999). Visto l'interesse per l'apprendimento, ci si concentrerà sulla memoria semantica ma, come si vedrà in seguito, questi due "magazzini" di informazione non sono così nettamente separati nel loro funzionamento.

Uno fra i più noti e diffusi modelli per il funzionamento della memoria semantica è il cosiddetto modello dei **livelli di elaborazione** (Craik & Lockhart, 1972). Secondo questo modello la possibilità di recuperare un'informazione dalla MLT dipende da come questa è stata codificata. Gli autori distinguono tre diversi livelli di codifica:

- **Codifica strutturale**, consiste nella memorizzazione di una parola lettera per lettera. Per esempio, per memorizzare la parola “pentagono” potrei cercare di ricordarmi che inizia con P, che dopo è seguita da una E, poi da una N e così via.
- **Codifica fonologica**. Si tratta del caso in cui si cerca di memorizzare una parola a parte dal suo suono, per esempio dividendola in sillabe. Nel caso di pentagono, potrei cercare di ricordare la parola ricordandomi che fa rima con “pungono”.
- **Codifica semantica**, è il caso in cui si fa riferimento ad altre conoscenze per inserire la nuova informazione in una rete di significati. Posso ricordare la parola pentagono considerando che ha cinque vertici e la parola penta-gono è formata da due parole che significano proprio cinque e angolo.

Nel caso di una codifica di tipo strutturale, il richiamo dalla memoria risulta più difficile (nel senso che è più facile che avvenga un richiamo scorretto); *il recupero è facilitato qualora la codifica sia di tipo semantico*. Il livello intermedio è costituito da una codifica di tipo fonologico (Craik & Tulving, 1975). Più in generale, gli autori sostengono che la memorizzazione sia facilitata dalla profondità dell'apprendimento ma non viene chiaramente descritto come questa profondità possa essere misurata. Per questo, il modello è stato criticato per la sua vaghezza ma è comunque rimasto un importante punto di riferimento.

Il modello originale è stato successivamente integrato in diversi modi. Una di queste integrazioni è il principio di generazione: *quando si riesce a ricordare qualcosa autonomamente il ricordo si rafforza maggiormente* di quando qualcuno lo suggerisce; cioè è più probabile che riusciamo a richiamare in futuro un ricordo se si è già riusciti a richiamarlo una volta (Baddeley et al, 2011).

Altre condizioni che facilitano la memoria sono i raggruppamenti sia di tipo gerarchico sia per categorie. Sono molti i ricercatori che si sono interrogati sull'organizzazione della MLT e hanno suggerito modelli di tipo gerarchico per cui esistono informazioni ad un “livello” superiore e più generale, facilmente richiamabili, e altre che invece si trovano a livelli inferiori e che richiedono tempi più lunghi per essere richiamate (Collins & Quillian, 1969). Questo modello spiega la possibilità di fare inferenze a partire da caratteristiche di tipo generale: è difficile dubitare del fatto che Euclide sapesse svolgere la somma $2+2$ anche se non abbiamo nessuna testimonianza che ce lo provi. Di fatto Euclide rientra nella categoria (più generale) dei matematici e i matematici sanno svolgere operazioni aritmetiche e quindi se ne deduce che anche Euclide lo sapesse fare.

Il modello a rete gerarchica ha presentato dei difetti nella descrizione di alcuni esperimenti. Per esempio, Rosch e Mervis (1975) hanno messo in evidenza che caratteristiche comuni della frutta vengono abbinate più facilmente ad arance, mele e banane che a pomodori o noci di cocco nonostante anche questi siano frutti. Sembra quindi che incida anche un effetto di tipicità per cui un'informazione viene richiamata più facilmente se è stata usata più volte di

un'altra, anche a parità di livello gerarchico. Un esempio interno alla matematica viene riportato da Moses (1988; Fig. 2.1.2.1): quadrati e trapezi sono allo stesso livello gerarchico fra i quadrilateri o addirittura si possono inserire i trapezi ad un livello gerarchico superiore in termini di generalità di proprietà; tuttavia, il tempo di risposta a una domanda del tipo “ha quattro lati?” potrebbe avere una risposta più rapida se si parla di un quadrato piuttosto che di un trapezio perché il quadrato è un rappresentante più “tipico” dei quadrilateri.

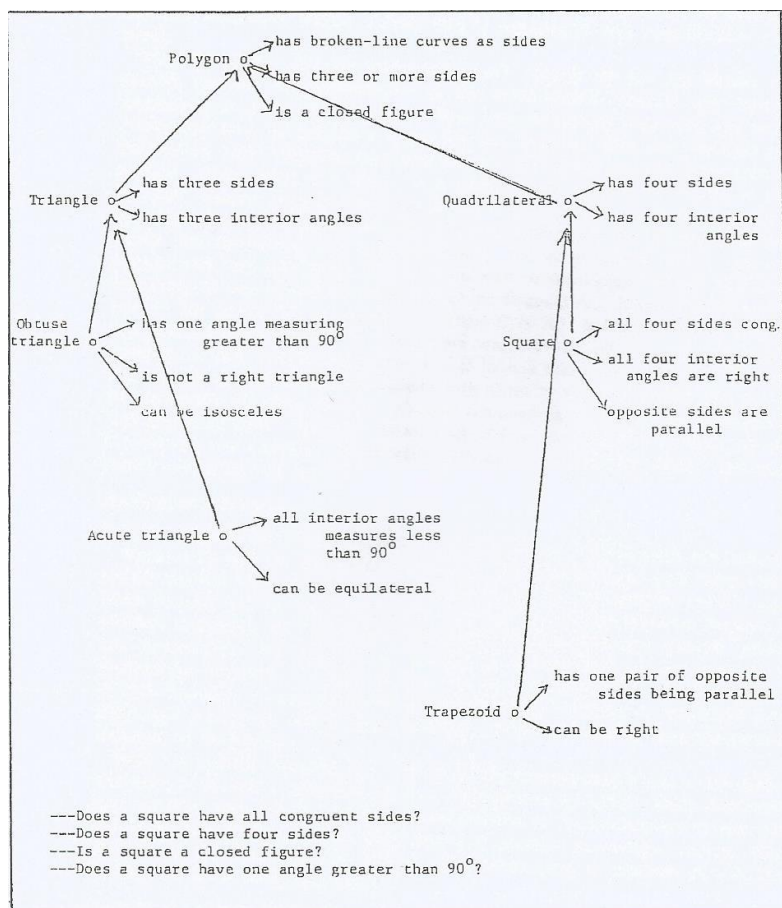


Fig. 2.1.2.1: Possibile organizzazione gerarchica delle informazioni relative ai poligoni (Moses, 1988).

Il filosofo Wittgenstein (1967) suggerisce che le categorie non siano rigide ma che si modifichino secondo un principio di **familiarità**; ovvero la categorizzazione avviene in base a caratteristiche comuni che l'individuo osserva fra le diverse informazioni. Pertanto *l'organizzazione risulterebbe soggettiva e variabile nel tempo*. Questa ipotesi ha trovato conferma negli esperimenti di Conrad (1972) che ha verificato che i tempi per verificare un enunciato sono più rapidi quando si tratta di oggetti familiari anche quando la distanza gerarchica fra l'oggetto di cui si parla e la proprietà da verificare è elevata.

Collins e Loftus (1975) hanno elaborato il modello di **propagazione d'attivazione** secondo il quale la memoria si basa su quella che questi autori chiamano **distanza semantica** (ovvero maggiore o minore familiarità) con una struttura simile a una “rete”. Ciascun nodo di questa rete ha un proprio stato di attivazione (ibidem) che rappresenta la sua probabilità di essere accessibile alla memoria. Tale attivazione si diffonde con gradiente decrescente ai nodi con poca distanza semantica e aumenta ogni volta che quel nodo viene richiamato con successo

ma decresce nel tempo. A livelli di attivazione bassi corrispondono ricordi che saranno difficilmente richiamabili (gli autori parlano di una soglia di “accensione” del ricordo). Quindi i ricordi con maggiore probabilità di richiamo sono quelli che sono stati richiamati più recentemente e quelli che hanno un alto numero di collegamenti. Di fatto, se l'attivazione si propaga, maggiore è il numero di collegamenti e maggiore è la probabilità che un'informazione collegata venga richiamata “ri-accendendo” anche le informazioni contigue. “Il modello di propagazione dell'attivazione ha dimostrato di essere in grado di spiegare i dati meglio del modello a rete gerarchica” (Baddeley et al, 2011, p. 159).

L'importanza delle relazioni fra i nodi è messa in evidenza anche da Conway e colleghi (1991) che parlano di **nodi centrali** e di **nodi periferici** che potrebbero essere interpretati, rispettivamente, come nodi con molti collegamenti e nodi con pochi collegamenti.

Questi autori analizzano le performance di alcuni studenti che hanno seguito un corso di psicologia dopo che il corso è finito. Fra le persone coinvolte nell'esperimento alcune hanno terminato il corso da pochi mesi, altre da anni. I ricercatori notano che nei primi mesi dopo il termine del corso vi è un rapido declino, successivamente le conoscenze ricordate si assestano per lungo tempo. Tuttavia, non tutte le conoscenze sono dimenticate allo stesso modo: i nomi degli psicologi studiati sono dimenticati più rapidamente rispetto al significato dei costrutti e le metodologie introdotti durante il corso. In accordo con Neisser (1984), Conway e colleghi (1991) interpretano questa evidenza ipotizzando che le diverse conoscenze acquisite dagli studenti fossero organizzate in modo differente. Quelle conoscenze che sono collegate fra loro formano uno **schema**, una struttura stabile nella memoria, contenente principalmente fatti generali, che permette di ricostruire successivamente anche alcune conoscenze che potrebbero essere andate perse. Un declino asintotico è stato riscontrato anche nel caso diversi contenuti matematici in ambito aritmetico e algebrico (Douglass, 1936). I nomi propri, invece, essendo generalmente privi di una struttura semantica, sono più periferici (meno collegati) e sono dimenticati più facilmente anche se non completamente persi. La stessa sorte spetta, nel corso del tempo, alla maggior parte delle conoscenze più specifiche, ma non necessariamente tutte.

In sintesi, la memoria a lungo termine può essere modellizzata come una rete di informazioni collegate fra loro in base a caratteristiche di familiarità. Nel caso in cui l'informazione venga codificata in modo semantico allora sarà più facile richiamarla in un secondo momento. Ciascun richiamo rafforza anche la probabilità di ricordare informazioni semanticamente contigue. Nel tempo, molte conoscenze specifiche (ma non tutte) sono dimenticate, mentre le conoscenze di carattere generale sono conservate in modo più duraturo e possono formare uno schema che permette di ricostruire anche informazioni andate perse. Tuttavia, questi sono risultati di carattere generale e i lavori di Conway e colleghi (1991; 1992) mostrano che la memoria a lungo termine può funzionare diversamente per differenti tipologie di conoscenze. Per questo, nelle sezioni successive, si approfondirà maggiormente il ruolo della memoria nell'apprendimento scolastico focalizzando prima sulla matematica e poi sul particolare caso dei fatti aritmetici moltiplicativi.

2.2 Memoria e apprendimento

Nella sezione precedente si è presentato il modello dei livelli di elaborazione di Craik e Lockhart (1972) integrandolo con la propagazione dell'attivazione di Collins e Loftus (1975) facendo così riferimento al sistema di "immagazzinamento" dell'informazione come a una rete semantica formata da nodi e collegamenti. Si presentano quindi alcuni approcci teorici volti a descrivere come si inseriscano nuove informazioni in memoria o si costruiscano nuove relazioni fra le informazioni pre-esistenti, ovvero l'apprendimento. Successivamente si affronta il tema del richiamo delle informazioni dalla memoria, ivi compreso il caso in cui questo non sia possibile (l'oblio).

2.2.1 Relazioni fra le informazioni

Secondo Jean Piaget (1985; 2011) l'apprendimento nel bambino può essere diviso in due momenti: l'assimilazione e l'accomodamento. L'**assimilazione** consiste nell'acquisizione di una nuova informazione che viene inserita nella rete delle informazioni già presenti in memoria. Nella fase di **accomodamento** invece la struttura cognitiva si modifica per accogliere la nuova informazione (*ibidem*). Queste due fasi si alternano in un equilibrio dinamico. Da questa descrizione dell'apprendimento si inferisce che ogni nuovo apprendimento è influenzato dai precedenti ovvero che il modo in cui le nuove informazioni sono immagazzinate dipende da quelle già presenti.

Vygotskij (1978) nota una differenza fra il ruolo della memoria nell'apprendimento per i bambini molto piccoli e quelli che invece già si trovano nel sistema scolastico:

The memory of older children is not only different from the memory of younger children; it also plays a different role in the older child's cognitive activity. Memory in early childhood is one of the central psychological functions upon which all the other functions are built. Our analyses suggest that thinking in the very young child is in many respects determined by his memory, and is certainly not the same thing as the thinking of the more mature child. For the very young child, to think means to remember. [...] Investigations of memory at this age have shown that toward the end of childhood the interfunctional relations involving memory reverse their direction. *For the young child, to think means to recall; but for the adolescent, to recall means to think.* Her memory is so "logicalized" that remembering is reduced to establishing and finding logical relations; recognizing consists in discovering that element which the task indicates has to be found⁶ (p. 51)

Monaghan e Ozmantar (2006) studiano il comportamento di alcuni studenti di quindici anni che affrontano alcuni esercizi sulla funzione valore assoluto. I due ricercatori notano che gli studenti inizialmente fanno spesso riferimento agli esempi visti durante le lezioni ma col

⁶ La memoria del bambino più anziano non è semplicemente diversa da quella del bambino più giovane; gioca anche un ruolo differente nell'attività cognitiva del bambino più anziano. La memoria nella prima infanzia è una delle funzioni mentali centrali sulle quali tutte le altre funzioni sono basate. Le nostre analisi suggeriscono che il pensiero nella primissima infanzia è determinato per diversi aspetti dalla memoria, e non è certamente la stessa cosa del pensiero nel bambino più maturo. Per il bambino molto piccolo, pensare significa ricordare [...] Le ricerche sulla memoria a questa età hanno mostrato che verso la fine dell'infanzia le relazioni interfunzionali che coinvolgono la memoria cambiano la loro direzione. Per il bambino giovane, pensare significa ricordare; ma per l'adolescente, ricordare significa pensare. La sua memoria è così "logicizzata" che il ricordo si riduce allo stabilire e trovare relazioni logiche; riconoscere consiste nello scoprire quell'elemento che la consegna richiede.

tempo questi riferimenti si fanno più rari e i discorsi degli studenti sono a proposito della funzione valore assoluto come un oggetto a sé stante con proprietà proprie. Gli studenti quindi sembrano inizialmente richiamare esperienze legate a un preciso momento e a un preciso luogo: la funzione valore assoluto è legata alla loro memoria episodica. Solo successivamente l'informazione entra a far parte della memoria semantica.

Del resto, la formazione di un nuovo nodo della rete è necessariamente collegata al momento in cui avviene (in termini di tempo, spazio, ecc). Risulta quindi che memoria episodica e memoria semantica sono collegate. Con la ripetizione, aumenta di forza l'informazione semantica e, per contro, diminuisce di forza l'informazione episodica (Baddley et al, 2011). In pratica, ritrovando lo stesso oggetto in molti contesti diversi si riesce a mantenere il “focus” sull'oggetto mentre le diverse situazioni in cui l'oggetto è stato presentato interferiscono fra loro e si confondono finché la situazione perde totalmente di importanza e rimane solo l'oggetto (inteso anche come idea, pensiero, concetto). Le parole di Vygotskij sopracitate possono essere interpretate tenendo conto che questo fenomeno dovrebbe apparire molto più accentuato nel bambino che ha una rete semantica ancora “povera” e poche esperienze alle spalle. Tuttavia, questo processo sembra ripetersi ogni volta che avviene un nuovo apprendimento, a prescindere dall'età di chi sta apprendendo. Si consideri ancora l'esempio tratto da Monaghan e Ozmantar (2006): quando a uno studente viene chiesto come fare per disegnare il grafico di $|f(x)|$ lo studente risponde dicendo “da quel che ricordo dal primo esercizio fatto...” descrivendo poi la procedura seguita (p. 221). L'aver richiamato il valore assoluto ha riacceso il ricordo del primo esercizio e quindi poi anche l'informazione relativa alla procedura seguita quella volta. In figura 2.2.1.1 questo processo è schematizzato rappresentando le diverse informazioni con dei cerchi e i collegamenti con delle frecce il cui verso rispetta le attivazioni successive.

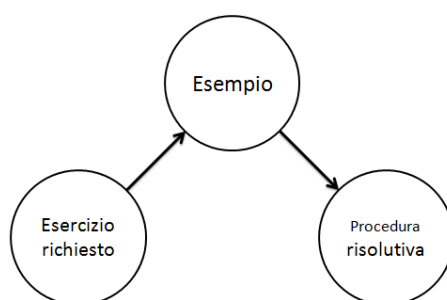


Fig. 2.2.1.1: Richiamo attraverso un episodio che funge da stimolo mediatore.

Man mano che prosegue con i suoi esercizi lo studente applica più volte questo tipo di procedura e il suo discorso diventa “si può ottenere il grafico di $f(|x|)$ in due diversi modi. Il primo è che... si può disegnare una linea parallela all'asse y attraverso il punto di intersezione di $f(x)$ con l'asse y” (p. 248). Lo studente parla come se si stesse riferendo ad una conoscenza generale senza la necessità di richiamare il momento in cui è stata acquisita. Sembra che il legame fra l'esercizio richiesto e il procedimento per risolverlo adesso sia diretto, non più mediato dall'esempio (Fig. 2.2.1.2).

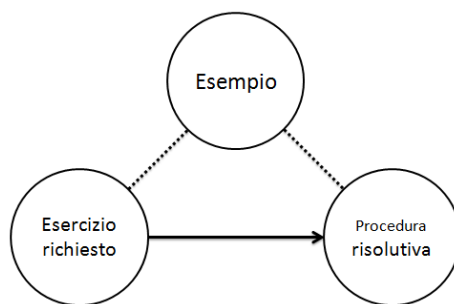


Fig. 2.2.1.2: Esempio di trapianto di sutura così come definito da Vygotskij (1978).

Vygotskij (1978) sostiene che quello che inizialmente svolge il ruolo di uno stimolo mediatore per il ricordo (in questo caso l'esempio) col tempo perde tale funzione dato che si crea un legame diretto fra lo stimolo iniziale e il nuovo oggetto. Definisce questo processo **trapianto del tipo 'sutura'**.

L'importanza di stimoli mediatori che però abbiano un significato semantico associabile all'informazione target viene sottolineato da Noice (1992). La ricercatrice studia le tecniche utilizzate dagli attori professionisti per memorizzare alla lettera lunghi copioni. Sulla memoria degli attori. Gli attori rivelano che, dopo aver letto alcune volte il testo "cercano di dedurre la motivazione che sta dietro ad ogni espressione. Tutti gli attori sottolineano l'importanza di individuare il significato di fondo e di spiegare il motivo per cui il personaggio dice esattamente quelle parole" (p. 417). Nella ricerca sembra esserci un generale consenso sul fatto che la permanenza di un ricordo in memoria dipenda dalla creazione di reti di significato con quanto già appreso precedentemente. McGowen e Tall (2010) sostengono addirittura che

Le nuove esperienze costruite a partire dalle esperienze precedenti sono ricordate molto meglio e ciò che non si inserisce nell'esperienza precedente è temporaneamente non appreso e facilmente dimenticato. (p. 170)

Seguendo Craick e Lockhart (1972) si può ritenere che questa sia la sostanziale differenza fra memoria a breve termine e memoria a lungo termine: tutto ciò che viene percepito ed elaborato in WM ma non viene collegato con la propria rete semantica (un nodo senza collegamenti) è destinato a scomparire dalla memoria in pochi istanti. Questo implicherebbe che tutto ciò che è ricordato a lungo termine è collegato con altri nodi della rete semantica. Secondo McGowen e Tall (2010) quando un nuovo oggetto da ricordare non è coerente con ciò che è già presente in memoria allora le informazioni incoerenti vengono scartate (ovvero non collegate e quindi dimenticate); l'assimilazione e l'accomodamento *à la* Piaget non avvengono.

Secondo questo modello di memoria il nuovo appreso si integra col precedente senza sostituirlo: i nuovi significati sono riletti alla luce dei vecchi. Una volta che un nuovo nodo è stato inserito all'interno della rete va incontro ad un processo di consolidamento dovuto ai successivi richiami. Tale processo sembrerebbe avere un corrispettivo a livello sinaptico legato a modificazioni sia di tipo molecolare sia relative allo spostamento dell'attività dall'ippocampo alla corteccia (Baddley et al., 2011). Si tratta di processo che richiede del tempo, il che fornisce una parziale spiegazione al fatto che i ricordi sono più "fragili" quando sono più "giovani".

Il fatto che le nuove conoscenze si integrino con le vecchie non implica che l'organizzazione

della rete semantica rimanga invariata. Si può ipotizzare che, almeno in ambito matematico, l'introduzione di nuove conoscenze produca una riorganizzazione dell'appreso. In particolare la Sfard (1991, 2009) sostiene che il processo di **reificazione** abbia un effetto benefico sull'organizzazione della memoria. Con reificazione si intende la creazione di un oggetto matematico come condensazione di una procedura (cfr sez. 5.2.2). Un esempio di reificazione è la concezione della moltiplicazione come somma ripetuta: quando una moltiplicazione viene vista come un oggetto a sé stante invece che come una collezione di somme, allora un prodotto $n \times m$ può essere conservato in memoria come un unico oggetto invece che come l'insieme di tutte le somme che rappresenta.

L'autrice sostiene che nel momento in cui avviene la reificazione, il nuovo oggetto diventa il nodo padre di un albero (**albero di realizzazione**; Sfard, 2009). Nell'esempio della moltiplicazione il prodotto $n \times m$ è il nodo padre delle somme $n + n + \dots + n$ (ripetuto m volte) e $m + m + \dots + m$ (ripetuto n volte) che a loro volta rappresentano un insieme di somme successive ognuna delle quali può essere vista come la reificazione di un'operazione di conteggio, e così via.

In questo modo quando si cerca di richiamare un'informazione non è necessario richiamare tutti i nodi figli ma si dovrà percorrere soltanto il sotto-albero di interesse fino a raggiungere il nodo *target* (Fig. 2.2.1.3). Visti i limiti di spazio della WM è evidente il vantaggio in termini di minor materiale da processare.

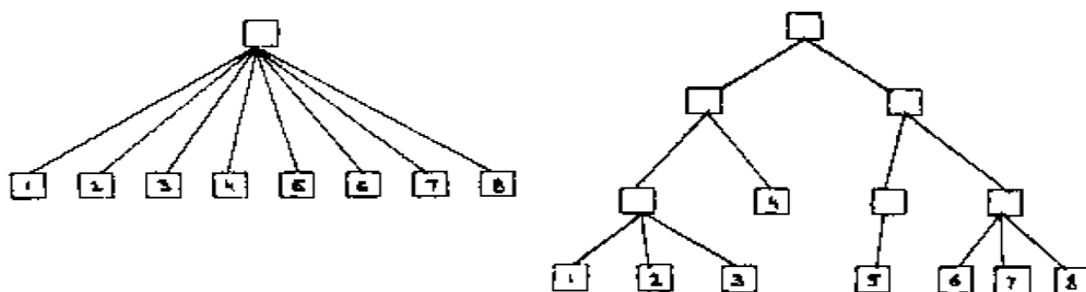


Fig. 2.2.1.3: Organizzazione delle informazioni prima e dopo la reificazione (Sfard, 1991).

Sfard sostiene che l'organizzazione sia di tipo gerarchico, tuttavia, si è visto sopra che i modelli di tipo gerarchico hanno dei limiti. Sembra plausibile ipotizzare che possano anche esistere delle relazioni paritarie all'interno del sotto-albero e che i vari sotto-alberi possano essere a loro volta collegati fra loro attraverso fenomeni di trapianto di sutura *à la* Vygotskij.

L'idea che la reificazione abbia un vantaggio in termini di recupero e gestione dell'informazione è ripresa anche da Tall e colleghi (1999) che definiscono come *procept* i simboli che evocano un processo o un concetto; questi costituiscono un particolare esempio di reificazione. Secondo gli autori la possibilità di richiamare un simbolo in rappresentanza di una procedura

permette a un cervello biologico con focus di attenzione limitato di passare dal pensare al problema simbolicamente e poi svolgere il processo risolutivo matematico. (Tall et al, 1999, p. 233)

2.2.2 Oblío e recupero

Si parla di oblio di un'informazione quando questa diventa inaccessibile; questo riguarda sia il caso in cui l'informazione è ancora disponibile in memoria ma non raggiungibile per il basso livello di attivazione sia quello in cui il ricordo è stato proprio cancellato. Ebbinghaus (1975) per primo ha studiato l'oblio rappresentando la prima **curva dell'oblio**, ovvero un grafico cartesiano con riportato in ascissa il tempo trascorso dal momento dell'apprendimento di un certo insieme di informazioni e in ordinata la percentuale di informazioni ancora accessibili.

Lo psicologo americano Harry P. Bahrick si è largamente occupato di studiare l'oblio di diverse tipologie di informazioni. Fra le sue pubblicazioni, un articolo del 1991 in cui viene valutato l'oblio dei contenuti della matematica scolastica anche a distanza di molti anni dal raggiungimento del diploma (Bahrick & Hall, 1991). Il campione della ricerca è costituito da circa 1000 persone che hanno seguito nel corso delle scuole superiori un corso di algebra e uno di geometria; alcuni di loro hanno terminato le scuole superiori da poco, altri invece sono ormai in pensione. Tutti i membri del campione svolgono due test, uno dei due riguarda i contenuti del corso di algebra e l'altro per il corso di geometria. In linea con i risultati presentati precedentemente (Conway et al, 1991; sez. 2.1.1), gli autori notano che l'oblio procede rapidamente nei primi anni per poi rallentare successivamente. In un lavoro precedente (Bahrick, 1984), a proposito delle conoscenze acquisite in un corso di spagnolo, Bahrick mette in evidenza lo stesso fenomeno che lui interpreta assumendo che esista un nucleo di conoscenze stabile, immune all'oblio, che definisce come **permastore**.

Inoltre, il campione viene suddiviso in base a diversi criteri (genere, voto ottenuto nei due corsi, motivazione nello studio della matematica, corsi di matematica seguiti successivamente). Fra questi, solo il massimo livello di studi raggiunti in ambito matematico rivela delle differenze statisticamente significative fra i diversi soggetti del campione (Fig. 2.2.2.1).

Come si può osservare anche dai grafici, coloro che dopo la scuola superiore hanno seguito il corso di analisi (*calculus* in inglese) o addirittura corsi superiori, sembrano non essere soggetti ad oblio anche a distanza di più di 50 anni. Sorprendentemente, nel caso della geometria, nel gruppo di persone che ha seguito corsi di matematica all'università hanno prestazioni migliori le persone per cui è passato più tempo dal momento in cui hanno seguito il loro ultimo corso. Questa differenza sembra attribuibile al fatto che il programma del corso di scuola superiore è stato cambiato alcuni decenni prima dello studio rimuovendo gli argomenti di geometria solida che tuttavia non sono valutati nella ricerca.

Bahrick e Hall (1991) notano che quello della matematica è un caso particolare dato che investigando altri contenuti di conoscenza (Bahrick, 1983; 1984; Bahrick et al, 1975) avevano sempre trovato un declino asintotico. Questi ricercatori interpretano il fatto che la matematica possa risultare quasi-immune all'oblio perché si tratta di un insieme di conoscenze strettamente integrate. Anche se questa resta soltanto una congettura, è evidente che non tutte le conoscenze sono soggette ad oblio, almeno non per tutti.

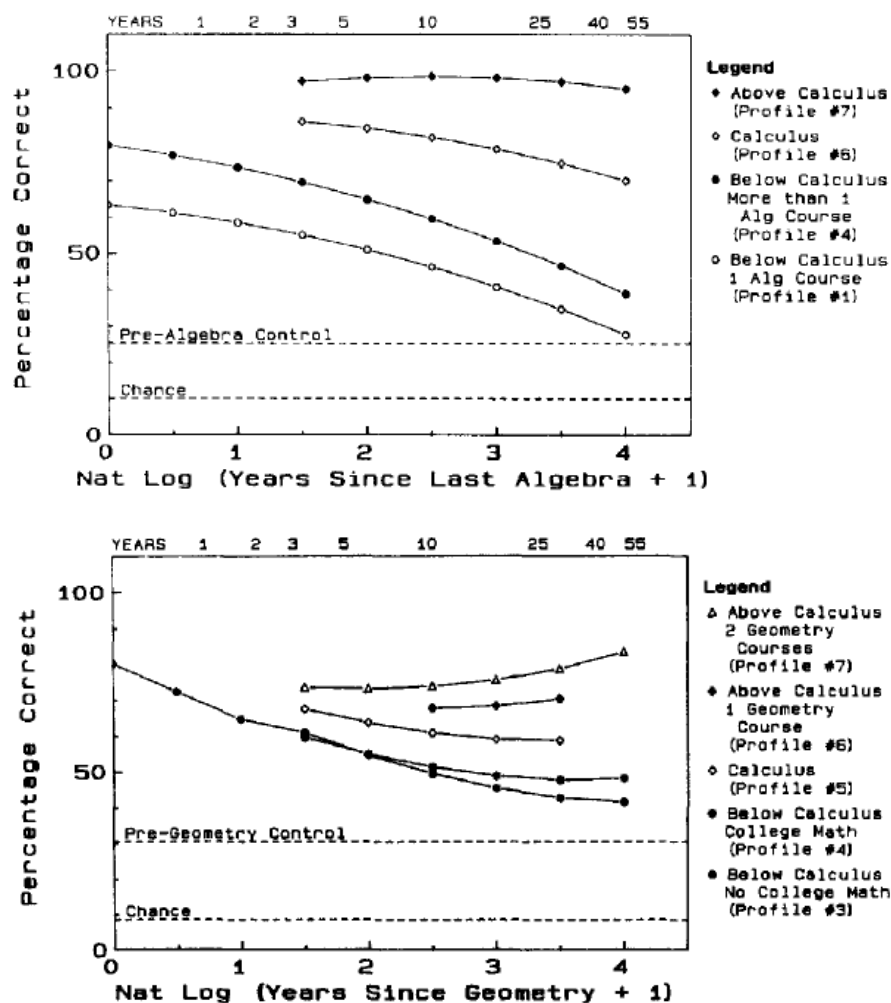


Fig. 2.2.2.1 Curve dell'oblio relative, rispettivamente, a un corso di algebra e a un corso di geometria nella scuola superiore. Ogni linea rappresenta un gruppo di soggetti suddivisi in base all'ultimo corso di matematica seguito durante la carriera universitaria. L'asse delle ascisse è in scala logaritmica. Tratti da (Bahrick & Hall, 1991).

Anderson (in Baddley et al, 2011) sostiene, però, che l'oblio sia indispensabile per il cervello umano al fine di controllare la "competizione" dell'informazione:

l'arrivo di nuovi ricordi rende più difficile trovare ciò che abbiamo già immagazzinato. Quando poi i ricordi si somigliano, questo problema diventa ancor più complicato, come se su una scrivania vi fossero molti documenti con l'intestazione simile. Il fatto che l'immagazzinamento di tracce simili rende più difficile il recupero va sotto il nome di **interferenza**. (Baddley et al, 2011, p. 266)

C'è interferenza ogni volta che un suggerimento (input) dato per accedere ad una informazione-target è collegato con altre informazioni oltre a quella desiderata. Lo stato di attivazione delle informazioni collegate al suggerimento permetterà di richiamare una piuttosto che l'altra e non necessariamente proprio quella che stavamo cercando. Ovviamente, l'interferenza aumenta all'aumentare del numero di collegamenti (principio di sovraccarico dei suggerimenti).

Se tutto venisse ricordato, e per sempre, l'interferenza sarebbe molto alta e richiamare qualsiasi tipo di informazione diventerebbe estremamente difficile. In questo senso l'oblio è

essenziale; per questo, lavorando sulla memoria a lungo termine appare poco opportuno chiedersi come fare a non dimenticare; si dovrebbe invece comprendere come fare a richiamare in un secondo momento quell'apprendimento che è stato parzialmente soggetto all'oblio.

Il primo a mostrare delle evidenze sull'ipotesi di una memoria di tipo ricostruttivo fu Bartlett (1974), nel noto esperimento in cui richiedeva, a distanza di tempo, ad alcuni suoi studenti, i dettagli di una leggenda indiana raccontata durante un corso. Lo psicologo notò che tali dettagli non erano riportati fedelmente ma erano trasformati eliminando le parti che per lo studente erano meno realistiche o accettabili. Alcuni autori (e.g. Neisser, 1984) sostengono che in un primo tempo i nodi periferici vengano cancellati e che quindi l'informazione specifica vada persa, successivamente l'informazione viene ricostruita a partire dai nodi centrali conservatisi. Come visto in precedenza, Conway è colleghi (Conway, Cohen, & Stanhope, 1991) valutano la possibilità di una **memoria ricostruttiva** ma si mostrano critici dato che notano che alcune conoscenze appaiono come quasi-immuni all'oblio, anche se si tratta di conoscenze periferiche, il che sarebbe a favore dell'ipotesi del *permastore* di Bahrick (Bahrick, 1984) almeno per alcune tipologie di conoscenze.

Elementi a favore di un funzionamento ricostruttivo della memoria nel caso della matematica sono dati da Karsenty (2002). Questa ricercatrice analizza alcune interviste fatte ad un gruppo di 30-40enni sulle conoscenze acquisite durante la scuola superiore a proposito della funzioni. Karsenty classifica i comportamenti degli intervistati. Fra gli intervistati, solo quelli che hanno seguito più corsi di matematica durante le scuole superiori riescono a riprodurre il grafico di una funzione lineare. Tuttavia, anche questi soggetti non sembrano avere un ricordo preciso sulla conversione fra la rappresentazione simbolico-algebrica e quella cartesiana di una semplice funzione lineare. Piuttosto richiamano alcune informazioni (come l'immagine di un grafico o la forma di un'equazione) e a partire da queste cercano di ricostruire sul momento la relazione. Trattandosi di un contenuto che pochi degli intervistati hanno re-incontrato dopo la scuola, le informazioni ancora accessibili in memoria sono ben poche, rimane però traccia del fatto che intercorrano delle relazioni fra quelle informazioni (ovvero la possibilità di convertire l'equazioni in grafico o viceversa) anche se la procedura non è più richiamabile. Karsenty conclude affermando che:

they did not reproduce the learned material, but rather reconstructed it and in fact formed their own personal versions of representing a function in a graph. Acquainted with the basic notions of points and axes, each of them 'filled the gap' of the forgotten material with a new, but quite coherent, chain of ideas. As a concluding remark, I would like to offer an optimistic look upon these actions. In spite of the evident loss of basic mathematical principles, perhaps the flexibility and freedom to play with ideas in a rational way is the gain that some people receive from their mathematics lessons, rather than the information itself⁷. (Karsenty, 2002, p. 142)

⁷ Loro non riproducevano il materiale appreso, ma piuttosto lo ricostruivano e in effetti formavano la loro versione personale della rappresentazione di funzioni attraverso un grafico. Accennando alle nozioni di base di punto e asse, ciascuno di loro ha "riempito il vuoto" del materiale dimenticato con una nuova, ma coerente, concatenazione di idee. Come nota conclusiva, vorrei offrire una visione ottimista su queste azioni. Nonostante

Rimane aperta la questione relativa al destino delle informazioni ancora disponibili in memoria ma non più accessibili. Come già descritto nel capitolo precedente (sez. 1.3) Bahrick e Phelps (1994) notano che il materiale familiare, anche se non più accessibile, viene

imparato una seconda volta più prontamente del materiale non familiare di pari difficoltà e [...] l'accesso guadagnato attraverso la ripetizione dell'apprendimento di materiale marginale [risulta] più duraturo dell'accesso acquisito a un materiale ugualmente difficile ma prima non familiare. (Bahrick & Phelps, 1994, p. 222)

Gli autori forniscono diversi dati sperimentali a favore dell'ipotesi che un percorso che già era stato creato precedentemente in memoria rimanga pronto per poter essere riattivato oppure per poter essere nuovamente "riempito".

Un'ultima nota deve essere fatta sul contesto in cui un'informazione può essere richiamata. Di fatto esistono molte prove del fatto che è più facile richiamare un'informazione in un contesto simile a quello in cui è stata appresa (Barnett & Ceci, 2002), ovvero che la capacità di applicare una conoscenza in un nuovo contesto (la cosiddetta abilità di **transfer**) non è frequente. Tuttavia, un esperimento di Mannes e Kintsch (1987) fornisce alcuni suggerimenti su quali siano i contesti di apprendimento che rendono più facile il transfer. Questi ricercatori chiedono a due gruppi di soggetti di studiare un brano e ricordarlo. A ciascun gruppo viene fornito, oltre al brano, anche un sommario. Per il primo gruppo, l'organizzazione del testo del sommario riflette quella del brano; per il secondo gruppo invece il sommario è organizzato in modo diverso. Il risultato ottenuto è che il primo gruppo era in grado di fornire maggiori dettagli sul brano ma il secondo gruppo aveva performance migliori in compiti in cui era necessario inferire informazioni a partire da quanto appreso. Secondo i ricercatori, gli sforzi compiuti per mettere in relazione il sommario con il testo hanno reso più difficile il ricordo del testo ma ne hanno migliorata la comprensione.

Un altro suggerimento proviene dalla tesi di dottorato di Nitsch (citata in Baddeley et al, 2011, p. 165). L'autrice chiede a un campione di soggetti di studiare il significato di due parole inventate. Il campione è diviso in due gruppi. A un gruppo, oltre alla definizione delle parole, sono forniti una serie di esempi di frasi in cui vengono applicate; tutte queste frasi fanno riferimento allo stesso contesto. All'altro gruppo sono fornite frasi che fanno riferimento a contesti diversi. Nitsch rivela che il gruppo che ha avuto esempi in contesti variati ha prestazioni migliori in compiti di transfer.

Sintetizzando quanto emerge dall'analisi della letteratura presentata in questa sezione, si può affermare che la rete di informazioni che costituisce la memoria è fluida e dinamica. Le relazioni fra le informazioni variano nel tempo e si riorganizzano anche in base alle nuove informazioni apprese. Col passare del tempo alcune informazioni vengono dimenticate, ovvero non sono più accessibili al richiamo. Questo è necessario per evitare un'eccessiva interferenza, ma esistono informazioni per cui l'oblio è poco o nullo. Fra queste rientrano alcune conoscenze matematiche. Questo fenomeno è interpretabile assumendo che alcune

l'evidente perdita di principi matematici di base, la flessibilità e libertà nel manipolare queste idee in modo razionale è il guadagno che alcune persone ricavano dalle lezioni di matematica, piuttosto che le informazioni di per sé.

informazioni generali rimangano stabili in memoria formando uno “zoccolo duro” a partire dal quale è possibile ricostruire altre informazioni andate perse.

Nella prossima sezione, alla luce dei risultati fin qui esposti, si analizzerà la letteratura relativa al particolare caso del richiamo di fatti aritmetici moltiplicativi.

2.3 Memorizzazione dei fatti aritmetici moltiplicativi

Con fatto aritmetico si intende generalmente un problema di calcolo insieme alla sua soluzione. In letteratura ci si riferisce spesso ai fatti aritmetici per indicare il repertorio di operazioni – con i rispettivi risultati – memorizzati da una persona, ovvero una tripletta di numeri in cui i primi due rappresentano i termini di un’operazione aritmetica binaria e il terzo rappresenta il risultato della stessa. Sono generalmente parte dei fatti aritmetici operazioni di ogni tipo che coinvolgono numeri naturali piccoli. La maggior parte dei test sui fatti aritmetici riguarda i numeri entro la decina ma il repertorio di fatti aritmetici immagazzinato da una persona può andare ben oltre e varia da soggetto a soggetto. A seconda che l’operazione coinvolta nel fatto aritmetico sia una somma/sottrazione o una moltiplicazione/divisione si parla, rispettivamente, di fatti aritmetici additivi o moltiplicativi.

I fatti aritmetici moltiplicativi (le cosiddette tabelline) sono forse il contenuto matematico più indagato nella Psicologia cognitiva. A partire dagli anni ’70 dello scorso secolo, molti psicologi si sono occupati di appurare quali fattori influenzino il richiamo dei risultati di moltiplicazioni valutando gli errori più frequenti e cercando di derivarne un modello per l’organizzazione di queste informazioni in memoria. Le metodologie di ricerca sono soprattutto di tipo quantitativo: in molti lavori si sottopone un largo campione a un test di richiamo o riconoscimento e si valuta la correttezza e la rapidità di risposta (Geary et al, 1986; Lemaire & Fayol, 1995; LeFevre et al, 2001; García-Orza et al, 2009). Altri ricercatori si basano sull’analisi delle prestazioni di soggetti con danni cerebrali che hanno ripercussioni sulla memoria (McCloskey et al, 1991; Dagenbach & McCloskey, 1992). Solo recentemente si è adottata una prospettiva meno “clinica” e più “ecologica” per cui si analizzano qualitativamente le modalità di richiamo in compiti realistici. A partire da questa tipologia di studi è possibile notare che l’organizzazione dei fatti aritmetici varia nel tempo e per le diverse persone, per questo in contrapposizione ai primi modelli statici sono stati elaborati dei modelli più dinamici.

2.3.1 Modelli statici

Le prime ricerche sul richiamo di fatti aritmetici si sono occupate di individuare fenomeni ricorrenti nel richiamo di fatti aritmetici, in particolare riguardo a possibili fattori che rendono più semplice o più complesso il richiamo di un risultato.

Sono molti gli studi in cui si mette in evidenza che moltiplicazioni che coinvolgono numeri vicini al dieci richiedono tempi di risposta maggiori rispetto a quelle in cui i fattori sono più vicini all’unità (Parkman, 1972). Ancora, si riscontrano errori più frequentemente quando i fattori crescono (Stazyk, Ashcraft, & Hamann, 1982). Si parla di **effetto della dimensione del problema** (McCloskey, Harley, & Sokol, 1991).

Per quanto riguarda gli errori si riscontrano quattro diverse tipologie di errori comuni sia nei bambini sia negli adulti:

- **Errori nell'operando:** viene richiamato il risultato di una moltiplicazione che condivide un fattore con quella effettivamente richiesta. Per esempio nell'affermare che il risultato di 9×7 è 56 si sta riportando il risultato di 8×7 e le due moltiplicazioni condividono il fattore 7. Si tratta dell'errore più comune negli adulti sani (Campbell & Graham, 1985) o con danni cerebrali (Sokol et al, 1991). Generalmente la differenza fra il fattore non in comune fra la moltiplicazione richiesta e quella corrispondente al risultato richiamato è 1 o 2 (*operand distance effect*; McCloskey et al, 1991).
- **Errori in tabella:** viene richiamato il risultato di una moltiplicazione che non condivide un fattore con quella richiesta ma si trova vicino a questa all'interno della tavola pitagorica. Per esempio un classico errore è richiamare 54 come risultato per 7×8 . Si tratta di un errore meno frequente del tipo precedente (Campbell & Graham, 1985).
- **Errori nell'operazione:** viene richiamato il risultato dell'addizione fra i due fattori. Negli adulti questo tipo di errore avviene più frequentemente rispetto al tipo precedente e si riscontra ancora più spesso il caso contrario, ovvero quello in cui viene richiamato il risultato del prodotto di due addendi (Miller et al, 1984; Sokol et al, 1991).
- **Errori di intrusione:** viene richiamato il risultato corretto ma una delle due cifre viene sostituita da uno dei due fattori. Generalmente la cifra delle decine col primo fattore o, più frequentemente, quella delle unità dal secondo (Campbell, Reading-based interference in cognitive arithmetic, 1997). Un esempio di questo errore consiste nel richiamare 34 come risultato di 8×4 . Questo errore sembra dipendere dal processamento fonologico dell'informazione numerica; ricorre più frequentemente in alcune lingue piuttosto che in altre (LeFevre et al, 2001).

Si noti che queste tipologie di errore occorrono molto più frequentemente di quello che teoricamente ci si potrebbe aspettare se l'assegnazione del risultato a una moltiplicazione fosse fatta casualmente (in merito si veda la nota 1 in McCloskey et al, 1991). Inoltre, questi errori appaiono interpretabili come fenomeni di interferenza fra informazioni che quindi dovrebbero essere collegate semanticamente in memoria. Per questo, un modello coerente con questi fenomeni deve prevedere un collegamento fra fatti che condividono un fattore, fatti che sono vicini nella tavola pitagorica e operazioni diverse che coinvolgono gli stessi numeri.

In letteratura viene inoltre messo in evidenza un effetto di **priming** legato agli errori più comuni. Per esempio, $4 \times 7 = 32$ è un tipico errore nell'operando. Inserendo 4×8 all'interno della lista di moltiplicazioni richieste prima di 4×7 si nota che il tempo di risposta per quest'ultimo prodotto aumenta e l'errore diviene più frequente (Campbell, 1987; 1991). Questo tipo di fenomeno può essere spiegato facendo riferimento al modello di propagazione dell'attivazione (Collins & Loftus, A spreading activation theory of semantic memory, 1975): il fatto che è stato richiamato precedentemente conserva un certo stato di attivazione, quando viene richiamato un fatto a esso collegato, l'attivazione può essere sufficientemente alta da subentrare creando un'interferenza. Un'altra possibile interpretazione è che il fatto rimanga

per qualche tempo in memoria di lavoro e sia quindi maggiormente “pronto” per essere richiamato (Campbell, 1991).

A partire da questi fenomeni, Ashcraft elaborò, in collaborazione con alcuni colleghi, un modello per l'organizzazione dei fatti moltiplicativi basato sull'idea che questi fossero organizzati così come lo sono nella tavola pitagorica (Ashcraft, 1982). Nel suo **modello di ricerca in tabella**, ogni riga e colonna è collegata a un nodo di ingresso corrispondente alla posizione della riga/colonna all'interno della tabella; per esempio 2 corrisponde alla seconda riga così come 6 corrisponderà alla sesta colonna. Quando viene richiesta una moltiplicazione, i nodi che rappresentano i fattori si attivano e questa attivazione viene diffusa nelle corrispondenti riga e colonna e quindi ci sarà un'informazione che riceve un'attivazione maggiore ed è quella che corrisponde al risultato del prodotto richiesto (fig. 2.3.1.1).

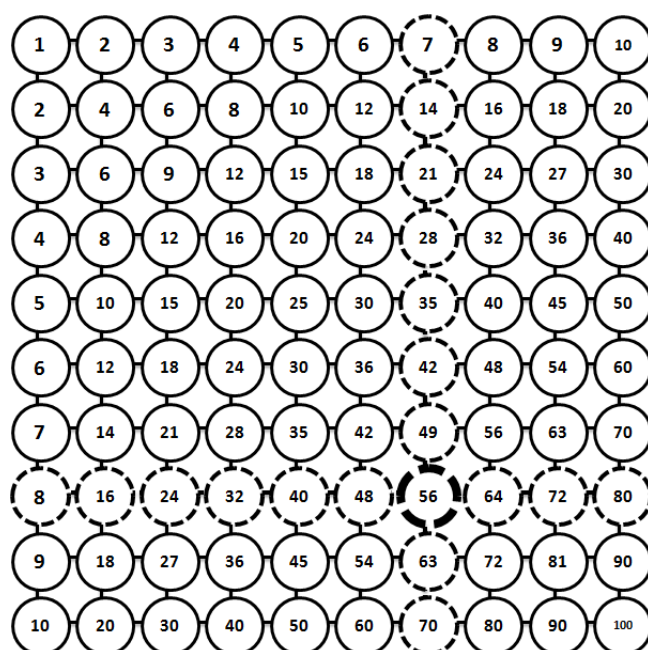


Fig. 2.3.1.1: Richiamo del risultato di 8×7 secondo il modello di ricerca in tabella.

Questo modello permette di spiegare l'effetto della dimensione del problema dato che più grandi sono i fattori, maggiore è il numero di nodi che devono essere attivati prima di arrivare al risultato (Ashcraft & Battaglia, 1978). Geary e colleghi (1986) individuano un certo numero di fatti moltiplicativi per cui il tempo di risposta è effettivamente proporzionale al prodotto fra i numeri coinvolti nel fatto richiesto (sia esso additivo o moltiplicativo). Campbell e Graham (1985) notano che questo è vero solo per i prodotti che coinvolgono 4, 8 o 9 fra i fattori.

Inoltre, se il modello fosse valido, allora i tempi di risposta dovrebbe crescere sempre con l'aumento della dimensione degli operandi; questo però non accade. Un'eccezione è data dai tempi di risposta a prodotti che coinvolgono due fattori uguali (ovvero l'elevamento al quadrato, detti anche **tie problems**; Campbell & Oliphant, 1992).

Il modello di ricerca in tabella è stato modificato nel corso del tempo, per esempio inserendo una terza dimensione (l'operazione) per spiegare gli errori nell'operazione (Geary, Widaman,

& Little, 1986). Tuttavia, non c'è stato modo di rispondere alle problematiche sollevate da Campbell (Campbell & Graham, 1985; Campbell & Oliphant, 1992) e altri se non modificando sostanzialmente il modello. Inoltre, il modello richiama fortemente l'organizzazione della tavola pitagorica a 10 righe e 10 colonne usualmente utilizzata nei paesi occidentali (come gli Stati Uniti) per organizzare l'apprendimento dei fatti aritmetici. Questo tipo di organizzazione sembra quindi essere l'effetto di una particolare modalità di insegnamento piuttosto che una modalità "naturale" di organizzazione dei fatti moltiplicativi.

Un tentativo è stato fatto dallo stesso Ashcraft con la presentazione di un **modello a rete** (Ashcraft, 1987). In questo modello ciascun possibile operando è collegato a tutte le risposte che lo vedono coinvolto come fattore. Il collegamento si crea la prima volta che il risultato di un'operazione viene calcolato e si rinforza a seconda di quante volte questa operazione viene richiamata insieme al risultato ad essa associato. Quando viene richiesta una particolare moltiplicazione, si attivano i nodi corrispondenti a entrambi gli operandi e quindi anche i risultati che li vedono coinvolti come termini. Fra questi avranno una maggiore attivazione quelli collegati a entrambi gli operandi; questo spiega gli errori di operazione.

Secondo l'autore, l'effetto di dimensione del problema dipende dal fatto che le operazioni con numeri più grandi sono richiamate meno spesso di quelle che coinvolgono fattori piccoli. L'attivazione di un singolo nodo può diffondersi seguendo sempre la distribuzione a tabella del modello precedente, questo spiegherebbe gli errori di tabella. Ashcraft non specifica invece da cosa dipendano gli effetti di *priming* e tantomeno i tempi di risposta più rapidi per i *tie problems*.

Per dare una spiegazione anche a questi fenomeni, Campbell e Graham (1985) suggeriscono il **modello dell'interferenza di rete**. In tale modello, la memoria contiene vari tipi di informazione: i singoli operandi, i risultati ma anche le operazioni intese come unico *chunk* che comprende i due termini e il simbolo. Gli operandi, così come nel modello a rete di Ashcraft, sono associati ai risultati, ma questi sono anche associati alle operazioni. Questa seconda associazione serve perché altrimenti, quando si richiama una moltiplicazione come 8×4 si attiverebbero allo stesso modo i risultati connessi a 8 e quelli connessi a 4, quindi 24, che è collegato ad entrambi, riceverebbe una forte attivazione e quindi non sarebbe possibile scegliere fra 24 e 32 come risposte. Invece il fatto che 8×4 sia collegato a 32 e non a 24 fa sì che l'attivazione del risultato corretto sia più forte. Tuttavia, questa ipotesi rende più difficile spiegare come possano avvenire gli errori di operazione.

Inoltre, gli autori notano che negli errori più frequentemente commessi, il risultato corretto e quello richiamato condividono una delle due cifre e sono dello stesso "ordine di grandezza". Pertanto suppongono che ci siano anche dei collegamenti fra i risultati che sarebbero le cause delle interferenze da cui dipendono alcuni errori di tabella e gli errori nell'operando (fig. 2.3.1.2). Questi collegamenti spiegherebbero anche i fenomeni di *priming*.

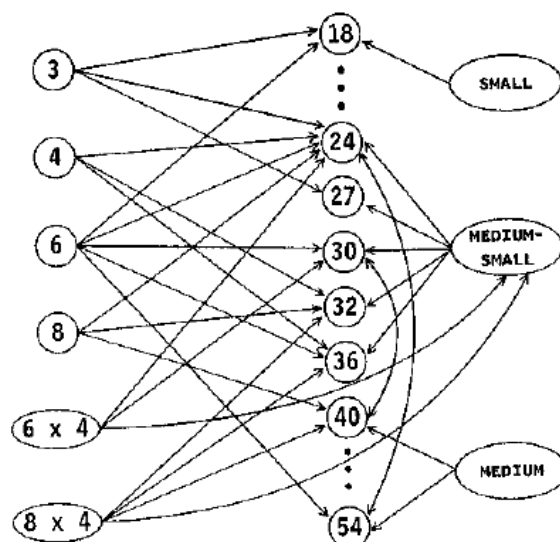


Fig. 2.3.1.2: Rappresentazione del modello dell'interferenza di rete (McCloskey et al., 1991, p. 390).

Per quanto riguarda l'apprendimento di nuovi fatti, questi autori sostengono che sia più probabile l'interferenza fra fatti imparati in momenti ravvicinati e il fatto che tutti i prodotti che coinvolgono uno stesso numero (3×1 , 3×2 , 3×3 , 3×4 ...) vengano insegnati in sequenza sarebbe una delle cause degli errori nell'operando. Le prime moltiplicazioni imparate sarebbero quindi più facili da richiamare mentre le ultime risulterebbero più difficili perché quando vengono apprese sono già presenti in memoria molti fatti con possibili interferenze. Tuttavia questa ipotesi ha una forte eccezione: nella pratica scolastica più comune nei paesi occidentali⁸ la tabellina del 10 viene presentata per ultima eppure il tasso di errori per prodotti che coinvolgono il 10 è molto più basso rispetto ad altri prodotti con numeri più piccoli, così come notato dagli autori stessi (ibidem). Campbell e Graham sostengono che i multipli di 10 e quelli di 5, per i quali il tasso di risposte scorrette è più basso (come rilevato anche da Siegler, 1988), formino dei sotto-raggruppamenti con livelli di attivazione particolarmente forte.

Come si può notare, in nessuno di questi modelli viene ipotizzato che un collegamento venutosi a creare possa cambiare nel tempo se non nel suo stato di attivazione. Tantomeno viene presa in considerazione l'idea che le nuove conoscenze permettano di riorganizzare la memoria. Risultano difficili da spiegare strutture mentali innate come la tabella proposta da Ashcraft; tali strutture sembrano acquisire maggior senso nel momento in cui sono concepite come risultato dell'apprendimento. Nella sezione successiva vengono presentati alcuni modelli che prevedono una ri-strutturazione della memoria in base alle nuove conoscenze; anch'essi non esenti da critiche, in particolare da parte degli ideatori dei modelli finora descritti.

⁸ Le ricerche qui presentate fanno riferimento soprattutto a dati raccolti negli Stati Uniti. La pratica di insegnamento dei fatti moltiplicativi può differire molto nelle diverse culture: in Cina vengono proposti prima i prodotti che coinvolgono il 5, poi quelli che coinvolgono il 2 e poi gli altri. Inoltre l'impiego della proprietà commutativa per organizzare i fatti appresi è incoraggiato sin da subito (Cao, Li, & Zuo, Characteristics of multiplication teaching of whole numbers in China: the application of Nine Times Table, 2015)..

2.3.2 Modelli dinamici

Un primo modello che prevede una riorganizzazione dei fatti appresi è il **modello di distribuzione delle associazioni** proposto da Siegler e Shrager (Siegler & Shrager, 1984; Siegler, 1988). Il modello prevede la presenza in memoria dei diversi prodotti, ognuno dei quali è associato a uno o più risultati. Quando il bambino inizia ad apprendere le moltiplicazioni non conosce ancora i risultati dei prodotti e quindi deve calcolarli seguendo delle strategie ricostruttive (per es. la somma ripetuta). Ogni volta che il bambino ricava un numero come risultato di un prodotto, allora si crea in memoria un'associazione fra quella moltiplicazione e quel risultato. Pertanto, se il bambino ricostruisce il risultato erroneamente, si possono creare anche delle associazioni con risultati sbagliati. Ogni volta che un numero viene associato a una moltiplicazione, la forza del collegamento aumenta.

Questo implica che se un bambino associa a un prodotto un risultato sbagliato molto spesso, allora tale associazione diventerà particolarmente forte e quindi il bambino cadrà successivamente in errore. Siegler (1988) sostiene che la somma ripetuta sia una delle strategie ricostruttive più utilizzate; nel caso in cui si debbano fare molte somme, la probabilità di farne una scorretta aumenta, così si spiega l'effetto di dimensione dell'operando. Tuttavia questo modello risulta debole nello spiegare gli errori in tabella. Un aspetto interessante è invece il fatto che i due autori del modello abbiano previsto una prospettiva evolutiva per l'organizzazione dei fatti moltiplicativi in memoria: quando un collegamento diventa sufficientemente forte, il bambino smette di usare le strategie ricostruttive e si affida al richiamo diretto (Siegler & Shrager, 1984) che infatti è la strategia più utilizzata dagli adulti per determinare il risultato di una moltiplicazione (Siegler, 1988).

L'ipotesi che le strategie utilizzate per ricostruire i risultati delle moltiplicazioni abbiano un importante ruolo in memoria è stata avanzata dallo psicologo americano Arthur J. Baroody con una pubblicazione su *Developmental Review* nel 1983. In questo articolo Baroody sostiene che la memoria non sia occupata da numerosissime associazioni fra singole informazioni nate a seguito di lente procedure di calcolo ma piuttosto che il "cambiamento chiave nell'efficienza con i fatti numerici coinvolge il passaggio da lente strategie di conteggio a conoscenza procedurale basata su principi. Man mano che regole, euristiche e principi divengono più familiari e interconnessi, il loro uso, per esempio, nel produrre fatti numeri diventa più automatico. L'uso di questa conoscenza procedurale risulterebbe cognitivamente più economico dell'immagazzinamento di ogni fatto individuale nella memoria a lungo termine" (Baroody, 1983, p. 225). Come esempi vengono riportati i fatti del tipo $4+0=4$ o $5\times 0=0$ che, secondo l'autore, non sarebbero memorizzati separatamente ma come un'unica regola del tipo $N+0=N$ o $N\times 0=0$ per ogni possibile naturale N .

Sin dall'abstract dell'articolo Baroody chiarisce che la sua è una proposta alternativa al modello proposto da Ashcraft e in breve tempo la rivista diviene il teatro di una diatriba fra i due psicologi. Di fatto la risposta non tarda ad arrivare: Ashcraft trova la proposta di Baroody interessante ma la trattazione non sembra essere convincente, in particolare perché a suo avviso esistono moltissimi prodotti per cui non ci sono euristiche utili al richiamo (Ashcraft, 1983). La risposta di Baroody (Baroody, 1984) è che nessuno dei modelli proposti fino a quel momento fornisce una buona descrizione dei dati a disposizione e che quindi il suo modello è

accettabile quanto altri. Ashcraft replica portando dei dati a supporto della sua tesi: analizza le prestazioni di alcuni studenti in compiti di produzione di risultati di moltiplicazione e determinazione della veridicità di un'affermazione del tipo $p \times q = n$. Per i compiti di riconoscimento viene dato un tempo molto breve, perciò il richiamo diretto dalla memoria è l'unico modo per stabilire la veridicità delle uguaglianze. Nei compiti di produzione gli studenti (dalla seconda primaria in poi) hanno risultati equivalenti a quelli ottenuti nei compiti di riconoscimento e quindi se ne conclude che anche per la produzione venga usato il richiamo diretto dalla memoria (Ashcraft, Fierman, & Bartolotta, 1984). Questo assunto viene messo in discussione da Campbell (1987) che mette in evidenza il forte effetto di *priming* nei compiti di riconoscimento, effetto che non è altrettanto presente nei compiti di produzione.

Nell'anno successivo Baroody pubblica la propria risposta sul *Journal for Research in Mathematics Education* (Baroody, 1985); cui fornisce una rassegna di possibili euristiche e proprietà utili per determinare il risultato di una larga varietà di fatti aritmetici (fig. 2.3.2.1). L'autore sostiene la necessità di valutare con le classiche tecniche (test su grandi numeri, ricerca su pazienti con danni cerebrali) il modo in cui le proprietà (per es. la proprietà commutativa) intervengono nella memorizzazione di fatti aritmetici. Questa risposta non è ancora sufficiente per Ashcraft (1985) che chiede, nello stesso volume, dei dati a supporto delle tesi proposte. Tuttavia entrambi gli autori sembrano convergere su un punto: le memoria può agire in entrambe le modalità, una parte di fatti possono essere conservati come tali mentre altri possono essere ricostruiti a partire da questi (Baroody, 1985; Ashcraft, 1985).

Il dibattito finisce nel 1985 ma le ricerche di Baroody vanno avanti e i dati richiesti più volte da Ashcraft vengono presentati. Nel 1993 mostra che alcuni studenti utilizzano strategie di stima dei risultati di moltiplicazione talmente accurate da richiedere tempi di risposta paragonabili a quelli stabiliti da Siegler (1988) per il richiamo diretto. Ne conclude che i compiti di richiamo generalmente utilizzati possono confondere strategie di richiamo diretto dalla memoria e di ricostruzione (Baroody, 1993). Successivamente Baroody fornisce anche dei dati a supporto dell'ipotesi che la conoscenza della proprietà commutativa migliora le prestazioni degli studenti nella produzione dei risultati di moltiplicazioni (Baroody, 1994; 1999). Ne conclude che una conoscenza di tipo relazionale (cfr cap. 3) modifica l'organizzazione dei fatti aritmetici in memoria.

Lo stesso risultato viene ottenuto più recentemente da Butterworth e colleghi (2003) che richiedono a bambini del terzo, quarto e quinto anno di scuola primaria di fornire i risultati di alcune moltiplicazioni. Vengono effettuate due analisi, una quantitativa e l'altra qualitativa. Dal punto di vista quantitativo questi ricercatori notano che man mano che i bambini crescono, il tempo di risposta a un prodotto della forma $N \times m$, in cui $N > m$, diminuisce rispetto al tempo di risposta al prodotto $m \times N$. Lo stesso vale, seppure in forma minore, per i *tie problems*. Gli autori interpretano questo risultato ritenendo che col tempo i fatti aritmetici sono organizzati in memoria usando la proprietà commutativa: vengono conservati solo i fatti del tipo "numero maggiore per numero minore" che sono più facilmente ricostruibili con le somme ripetute nel momento in cui non fosse possibile utilizzare il richiamo diretto. Dal

punto di vista qualitativo notano che cambia la natura degli errori; col tempo aumentano gli errori sull'operando con operandi molto vicini e diminuiscono le altre tipologie.

Da questa rassegna della letteratura emerge quindi un modello di memoria per i fatti aritmetici che prevede l'immagazzinamento di alcuni fatti aritmetici (in merito si veda anche García-Orza et al, 2009) che però sono utilizzati e ri-organizzati anche in base a regole generali (come nel caso dei prodotti per 0, 1 e 10) e proprietà aritmetiche (come la proprietà commutativa) che vengono apprese nel tempo.

2.3.3 Memoria per i fatti moltiplicativi e discalculia

L'attenzione al richiamo dei fatti aritmetici è tornata centrale nella ricerca dal momento in cui è stata definita la discalculia evolutiva. Di fatto questo disturbo specifico dell'apprendimento (DSA) viene definito come "un disturbo delle abilità numeriche e aritmetiche che si manifesta in bambini di intelligenza normale e che non hanno subito danni neurologici" (Temple, 1992, p. 211). Fra le caratteristiche tipiche viene segnalata "un'incapacità ad apprendere in modo soddisfacente le tabelline e le procedure di calcolo" (Ianes et al, 2010, p. 29).

Negli atti dell'ultima Consensus Conference sui DSA (ISS, 2010) si legge che per quanto concerne la diagnosi di discalculia evolutiva

Le prove di letteratura convergono nel suggerire l'utilizzo, oltre che di criteri legati ai livelli prestazionali, di criteri basati sul tipo specifico di difficoltà, con la maggioranza degli autori concordi nel proporre come cruciali i **fatti numerici** o il processamento numerico. (p. 21, grassetto aggiunto)

Di fatto sono molti i test di diagnosi della discalculia che, fra le altre prove, inseriscono il richiamo di fatti additivi e moltiplicativi (e.g. Lucangeli et al, 2009; Biancardi & Nicoletti, 2004; Lucangeli et al, 1998). Temple (1991; 1997) distingue tre diversi tipi di discalculia: la dislessia per le cifre che riguarda i processi lessicali, la discalculia procedurale influenza l'applicazioni di algoritmi e la **discalculia per i fatti aritmetici** caratterizzata proprio dalle difficoltà nell'acquisizione dei fatti aritmetici.

L'ipotesi che la difficoltà a richiamare i fatti aritmetici dipenda da una più generale difficoltà nella memoria a lungo termine è da scartare perché i bambini discalculici presentano una specifica difficoltà solo nel richiamo dei fatti aritmetici e non mostrano, in generale, altre difficoltà a livello di memoria semantica (Robinson et al, 2002). Dentella e Marzocchi (2012) hanno richiesto a un gruppo di bambini discalculici e a un gruppo di controllo di giocare a diverse versioni del gioco del *Memory*. I bambini discalculici hanno avuto prestazioni diverse dagli altri solo nella versione in cui le tessere riportavano solo stimoli numerici. Risultati come questo hanno portato a supporre che esista un particolare sistema cognitivo deputato all'immagazzinamento e all'elaborazione degli stimoli numerici (Temple & Sherwood, 2002; Butterworth, 2005).

Diversi autori hanno ipotizzato che la difficoltà dei discalculici nel richiamare fatti aritmetici dipendesse da uno span limitato della memoria di lavoro (Geary, 1993; Geary et al, 1991) tuttavia è stato rilevato che i bambini con gravi difficoltà nel richiamo delle tabelline non presentano uno span di memoria di lavoro diverso dai coetanei (Temple & Sherwood, 2002)

mentre hanno delle difficoltà particolari nei compiti in cui viene richiesto di manipolare informazioni recuperate dalla memoria a lungo termine, anche se non di tipo aritmetico (McLean & Hitch, 1999). Restrizioni relative allo span memoria di lavoro sono state riscontrate solo nel caso di bambini che presentano anche disturbi legati alla dislessia (Landerl et al, 2009). Queste e altre evidenze (Geary et al, 2000) hanno portato a identificare il problema del richiamo dei fatti aritmetici con una difficoltà nell'isolare le informazioni in competizione che vengono richiamate dalla memoria, ovvero con una difficoltà attentiva a livello dell'esecutivo centrale (Geary & Hoard, 2005). Pertanto il bambino discalculico, piuttosto che non riuscire a richiamare l'informazione, avrebbe difficoltà a decidere quale fra le informazioni richiamate è quella giusta. Tuttavia, su questa ipotesi non c'è ancora un generale consenso (ibidem). Se fosse confermata, piuttosto che insistere con la ripetizione delle tabelline al fine di memorizzarle "correttamente", il recupero dovrebbe prevedere lo sviluppo di strategie volte a controllare i risultati richiamati e selezionare quello giusto oppure di strategie alternative per ricostruire il risultato e confrontare il risultato richiamato con quello ricostruito.

Per quanto riguarda il recupero dell'abilità di richiamo fatti aritmetici per bambini discalculici, alcuni autori (e.g. Biancardi et al, 2004) suggeriscono di ridurre il numero di informazioni da memorizzare utilizzando la proprietà commutativa in modo da considerare ogni prodotto una volta sola a prescindere dall'ordine dei fattori, la proprietà distributiva per ricostruire risultati non noti a partire dalle tabelline più semplici (per esempio quelle del 2 e del 5). In accordo con la letteratura riportata in questo capitolo, si tratta di strategie che permettono una efficace riorganizzazione della memoria per i fatti aritmetici a prescindere dalla presenza o meno di un disturbo specifico.

Appare sensato affermare che strategie di insegnamento/apprendimento basate sull'uso delle proprietà della moltiplicazione per organizzare i fatti aritmetici memorizzati (pochi o molti che siano) possono essere utili da un punto di vista didattico per bambini con diverse capacità, da quelli con disturbi specifici fino ai più performanti. Tali strategie saranno oggetto del prossimo capitolo.

3 Rassegna della letteratura didattica

3.1 Apprendere le operazioni aritmetiche con significato

Nel capitolo precedente è stato presentato il *modello dei livelli di elaborazione* (Craik & Lockhart, 1972) secondo il quale la memorizzazione dipende dal tipo di codifica dell'informazione e, in particolare, una codifica semantica appare come la più efficiente in termini di possibilità di richiamo successive. Tale modello è stato integrato con il *modello di propagazione dell'attivazione* (Collins & Loftus, A spreading activation theory of semantic memory, 1975) per cui si assume che la memoria sia organizzata come una rete di informazioni collegate l'una a l'altra semanticamente. Tutti gli esempi forniti negli esperimenti realizzati in accordo con questi modelli consistono nella memorizzazione di parole e la distanza semantica fra queste è generalmente definita dal contesto in cui le parole sono utilizzate, cosicché parole usate nello stesso contesto o che appartengono alla stessa categoria (per es. uccelli, fiori, frutti,...) sono considerate semanticamente vicine. Questo tipo di definizione sembra difficilmente applicabile al contesto dei fatti aritmetici; forse è proprio per questa ragione che esiste una vasta quantità di ricerca sui fatti aritmetici che però si focalizza solo sugli aspetti sintattici (come le cifre o il simbolo di operazione) piuttosto che su quelli semantici.

Appare quindi necessario individuare quali siano gli aspetti semantici che entrano in gioco nell'apprendimento delle operazioni. Cosa vuol dire imparare con significato in aritmetica? Empson e colleghi (2011), dopo anni di ricerche nel campo, rispondono alla domanda in questo modo:

I bambini imparano l'aritmetica con comprensione quando sono incoraggiati a usare e sviluppare la loro comprensione intuitiva delle proprietà dei numeri e delle operazioni. La nostra ricerca ci ha portati a riformulare il significato di apprendimento con comprensione in termini di pensare relazionalmente: comprendere l'aritmetica coincide col pensare relazionalmente all'aritmetica, perché la coerenza delle operazioni sui numeri naturali e sulle frazioni si trova al livello delle proprietà fondamentali delle operazioni e dell'uguaglianza. (p.412)

Questi autori identificano quindi un apprendimento con significato (con comprensione, dicono loro) con un pensiero di tipo relazionale, che comprende le proprietà delle operazioni e dell'uguaglianza. Questo tipo di conclusione era già presente, molti anni prima, nell'influente lavoro di Richard Skemp (1976; 1987) in cui si parla di *relational understanding* (comprensione relazionale) e *instrumental understanding* (comprensione strumentale). Secondo lo psicologo statunitense, la matematica può essere appresa sviluppando l'abilità di utilizzare procedure di cui non si conosce il significato (è il caso strumentale) oppure avendo consapevolezza sia del come, sia del perché (comprensione relazionale). La differenza fra questi due tipi di comprensione viene esemplificata, dallo stesso Skemp, attraverso l'analogia con una lezione di musica.

Si immaginino due gruppi di studenti a cui viene insegnata musica come se fosse una materia da far con carta e penna. Viene loro mostrato il pentagramma con quel segno riccioluto all'inizio; viene spiegato che i segni sulle linee si chiamano Mi, Sol, Si, Re, Fa mentre quelli fra linee sono detti Fa, La, Do, Mi. Imparano che una linea con un ovale bianco è chiamata minima e che corrisponde a due con l'ovale annerito, dette semiminime o a quattro con l'ovale annerito e una coda dette crome e così via – delle tabelline musicali se si vuole. Per un gruppo di bambini, l'apprendimento sarà questo e nient'altro. Se hanno una lezione di musica al giorno, cinque giorni per ogni settimana e viene detto loro che questa cosa è importante, probabilmente nel tempo impareranno a scrivere i segni necessari per semplici melodie [...] Lo troveranno noioso e le regole da memorizzare saranno così numerose che problemi del tipo "scrivi un semplice accompagnamento per questa melodia" saranno troppo difficili per la maggior parte di loro. [...]

All'altro gruppo invece viene richiesto di associare alcuni suoni a questi segni sulla carta. Per i primi anni si tratta di suoni orecchiabili, che possono produrre da soli con semplici strumenti. Col passare del tempo potranno immaginare quei suoni ogniqualvolta ne vedranno o scriveranno il simbolo sulla carta. [...] Viene coinvolta molta meno memoria e ciò che deve essere ricordato è soprattutto nella forma di interi (come melodie) che le loro [dei bambini] memorie riescono a conservare più facilmente. Esercizi come quelli menzionati prima ("Scrivi un semplice accompagnamento") saranno a portata dei più. (Skemp, 1987, p. 157)

L'autore sostiene, inoltre, che questo tipo di apprendimento sia vantaggioso per la memoria a lungo termine. Di fatto, se apprendere conoscendo i complessi significati che si trovano alla base della matematica elementare risulta più complesso rispetto all'automatizzazione di procedure, è anche vero che la conoscenza delle relazioni che ci sono fra le procedure stesse permette di ricostruire una a partire da un'altra: è necessario meno ri-apprendimento il che risulta vantaggioso complessivamente nel lungo termine. Questa affermazione di Skemp può essere reinterpretata in termini dei modelli cognitivi presentati nel capitolo precedente: se una nuova informazione appresa viene collegata con diverse informazioni già presenti in memoria, allora è più probabile richiamarla (a partire da una qualsiasi delle informazioni a essa collegata) in un secondo momento. La costruzione di tali collegamenti, sebbene vantaggiosa, richiede una specifica istruzione che può risultare più complessa rispetto all'informazione oggetto di nuovo apprendimento.

L'idea originale di Skemp è stata rielaborata, nel particolare caso dell'aritmetica, da diversi autori attraverso l'introduzione del costrutto di *relational thinking* (pensiero relazionale). Fin qui si è parlato di comprensione/pensiero relazionale in termini molto generali; nelle sezioni seguenti si mette a fuoco il particolare caso delle espressioni aritmetiche e quindi il pensiero relazionale viene definito rispetto a questo specifico contesto.

3.2 Il pensiero relazionale

La crescita del numero delle ricerche sul pensiero relazionale è stata messa recentemente in luce. Molina (2011) mette in relazione diverse definizioni di pensiero relazionale, ma nota anche che alcuni costrutti denominati diversamente appaiono molto simili al pensiero relazionale nella loro definizione. Secondo questa autrice, il pensiero relazionale consiste nel

“riconoscimento e uso delle relazioni fra gli elementi di espressioni numeriche e algebriche e delle proprietà fondamentali delle operazioni” (p. 31); a seguito di questa definizione vengono citati lavori precedenti dell'autrice, ma anche il lavoro di Empson e colleghi (2011) che Molina mette in relazione con l'opera di Skemp (1987) sostenendo che l'apprendimento con comprensione di cui parlano i primi autori coincide con la comprensione relazionale così come definita da Skemp stesso. Altri lavori citati sono quelli del gruppo statunitense di Carpenter e Levi nonché dell'australiano Stephens. Ognuno di questi articoli e libri fornisce, in realtà, una definizione diversa di pensiero relazionale.

Carpenter, Franke e Levi (2003) sono i primi a introdurre il costrutto⁹. Nel libro si legge che il pensiero relazionale consiste nel riconoscere la verità di un'espressione che coinvolge l'uguaglianza senza dover però svolgere effettivamente i calcoli. Gli autori si riferiscono a consegne quali determinare il valore da inserire al posto del quadratino in equazioni del tipo $8+4=\square+5$ e sostengono che si abbiano istanze di pensiero relazionale quando un bambino, anziché calcolare i risultati delle operazioni indicate ai due membri per poi compararli, determina il numero da inserire attraverso strategie basate sulle relazioni fra le due operazioni ai lati del simbolo di uguaglianza. Un esempio fornito consiste nel notare che 5 è maggiore rispetto a 4 di un'unità e quindi il numero nel quadratino deve essere di un'unità minore rispetto a 8 perché le due operazioni siano equivalenti. Questa definizione appare legata alla particolare consegna, in questo senso assomiglia molto a quella fornita, successivamente, da Stephens (2006) secondo il quale il pensiero relazionale è basato sulla “capacità di vedere le possibili variazioni fra i numeri in un'uguaglianza numerica”. Quest'ultimo autore rimane fedele a questo tipo di definizione nei suoi lavori successivi (cfr Stephens, 2007; 2008) ma con alcune specifiche più recenti:

si ha pensiero relazionale quando gli studenti vedono il segno di uguaglianza come simbolo relazionale, focalizzano sulla struttura dell'espressione e sviluppano strategie ragionevoli per risolvere uguaglianze numeriche riferendosi alle operazioni coinvolte. (Stephens & Armanto, 2010, p. 524)

Il gruppo di Carpenter, nella collaborazione con altri autori, allarga invece la propria definizione generalizzandola rispetto al solo compito di completare un'uguaglianza numerica. Nel lavoro con Zeringue (Carpenter, et al., 2005) sostengono che:

Il pensiero relazionale coinvolge l'uso delle proprietà fondamentali dei numeri e delle operazioni per trasformare espressioni matematiche piuttosto che calcolare semplicemente una risposta seguendo una sequenza prescritta di procedure. Questo implica un certo livello di consapevolezza delle proprietà, ma non necessariamente una completa comprensione di esse o la conoscenza di definizioni formali. [Per esempio] gli studenti potrebbero avere un buon senso operativo su quando e come è appropriato usare la proprietà distributiva, ma non essere in grado di esprimere la proprietà a parole o con i simboli. (p. 54)

⁹ Questo fatto emerge dalle ricerche bibliografiche dell'autore ed è confermato da quanto scritto da Molina, Castro e Mason (2008) a pag. 77.

La caratterizzazione del pensiero relazionale viene inoltre arricchita specificando cosa non è da considerarsi pensiero relazionale: trucchi per svolgere calcoli mentali più rapidamente (ibidem), procedure computazionali da portare avanti passo dopo passo (Jacobs, et al., 2007). Gli stessi autori specificano, inoltre, che il pensiero relazionale include la capacità di guardare le espressioni e le equazioni nella loro interezza (Carpenter, et al., 2005; Jacobs, et al., 2007) il che sembra in accordo con la focalizzazione sulla struttura dell'espressione auspicata da Stephens (Stephens & Armanto, 2010).

Questa necessità di riconoscere la struttura dell'espressione viene sottolineata anche nella definizione di pensiero relazionale data da Molina, Castro e Mason (2008):

Gli studenti che risolvono le uguaglianze numeriche usando il pensiero relazionale usano il loro senso del numero e ciò che Slavit (1999) chiama "senso dell'operazione" per considerare le espressioni numeriche da una prospettiva strutturale piuttosto che semplicemente da quella procedurale. Quando viene usato il pensiero relazionale, le espressioni sono considerate come un tutt'uno piuttosto che un processo da portare avanti passo dopo passo. (p. 77)

In questa definizione, oltre all'introduzione del termine 'struttura' viene anche rimarcato il ruolo del *senso dell'operazione*. Un termine analogo (senso operativo) viene impiegato anche Carpenter e colleghi (2005; si veda la citazione nella pagina precedente) e negli altri articoli si trova riferimento alle proprietà delle operazioni. Comparando le diverse definizioni si può notare che questo non è l'unico elemento in comune. Infatti, viene spesso fatto riferimento all'interpretazione del simbolo di uguaglianza¹⁰ e di uguaglianze numeriche oltre che all'individuazione della struttura delle espressioni aritmetiche. Appare quindi lecito tentare una sintesi della definizione di pensiero relazionale a partire da questi elementi che accomunano le diverse formulazioni riscontrate in letteratura. A questo fine, nelle seguenti sotto-sezioni, si sviluppa il significato che viene dato in letteratura a ciascuno di essi. La tabella 3.1 mette in evidenza come questi elementi comuni appaiano (o meno) nelle diverse definizioni.

Articolo/Libro	Interpretazione di uguaglianze	Senso dell'operazione o proprietà	Senso della struttura
Carpenter, et al. (2003)	✓		
Carpenter, et al. (2005)	✓	✓	✓
Stephens (2006)	✓		
Jacobs, et al. (2007)	✓		✓
Molina, et al. (2008)	✓	✓	✓
Stephens & Armanto (2010)	✓	✓	✓
Empson, et al (2011)	✓	✓	✓
Molina (2011)		✓	✓

Tabella 3.1: Elementi comuni fra le diverse definizioni di pensiero relazionale.

¹⁰ Molti lavori, come quelli di Carpenter e colleghi (2003; 2005; Jacobs, et al., 2007; Empson, et al, 2011) e di Molina e colleghi (2008) contengono intere sezioni specificatamente dedicate a una discussione sul modo in cui gli studenti interpretano il simbolo di uguaglianza.

Altre definizioni che non fanno esplicitamente riferimento a questi elementi possono essere trovate in letteratura. Per esempio, Molina e colleghi (Molina, et al., 2005), citando Koehler, scrivono che:

una persona pensa relazionalmente o usa pensiero relazionale quando esamina due o più *idées* o oggetti matematici alternativamente cercando le connessioni fra essi e, analizza o usa queste relazioni per risolvere un problema, prendere una decisione, o imparare di più sulla situazione i concetti coinvolti. Nel contesto dell'aritmetica questo termine si riferisce anche a "le diverse relazioni che i bambini riconoscono e costruiscono fra numeri, espressioni e operazioni (Koehler, 2004, p. 2)".

La definizione fornita in questa citazione, così come quella di Koehler riportata, appare come estremamente generica, adattabile a molti contesti ma poco operativa; su questo si veda anche la discussione nella prossima sezione.

3.2.1 Il senso dell'operazione

Il primo ad aver parlato di *senso dell'operazione* è stato David Slavit (1999). L'autore afferma di voler introdurre tale costrutto al fine di costruire un quadro di riferimento per l'analisi della comprensione che gli studenti hanno delle operazioni. In particolare Slavit parte dall'assunto che l'algebra può essere intesa come aritmetica generalizzata e quindi lo sviluppo della comprensione degli studenti per le operazioni aritmetiche è un primo passo verso il pensiero algebrico. La conoscenza delle proprietà dell'operazione, i diversi contesti in cui l'operazione può esistere e il modo in cui l'operazione può essere messa in relazione con altri processi sono indicati come tasselli fondamentali per il senso dell'operazione. Più dettagliatamente, vengono elencati dieci aspetti che, nel complesso, servono a caratterizzare il senso dell'operazione.

1. Concettualizzazione delle componenti base dell'operazione: si intende l'abilità di suddividere l'operazione in componenti elementari (p.e. addizione come conteggio, moltiplicazione come addizione ripetuta).
2. Familiarità con le proprietà possedute dall'operazione (prima fra tutte l'eventuale invertibilità).
3. Relazioni con altre operazioni (p.e. la proprietà distributiva come relazione fra moltiplicazione e addizione).
4. Facilità con i sistemi di simboli associati all'operazione.
5. Familiarità con i contesti dell'operazione: si intende la conoscenza di diversi modelli per la stessa operazione (p.e. addizione come unione, moltiplicazione come schieramento).
6. Familiarità con i fatti dell'operazione: ci si riferisce alla conoscenza di quelli che, nel primo capitolo, sono stati definiti come *fatti aritmetici*.
7. Abilità di usare l'operazione senza referenti concreti o contestuali: in riferimento all'apprendimento mediato da manipolativi o altri strumenti, ci si riferisce all'abilità di effettuare l'operazione senza il bisogno di questi mezzi ma solo a livello simbolico.
8. Abilità di usare l'operazione su valori incogniti o arbitrari.
9. Abilità di mettere in relazione l'uso dell'operazione su oggetti matematici diversi (p.e. stessa operazione su diversi insiemi numerici).

10. Abilità di muoversi fra le diverse concezioni precedenti.

L'ultimo punto enfatizza il fatto che il senso dell'operazione è concepito nell'interazione di tutti questi aspetti. Ciascuno di essi può maturare nel tempo e quindi il senso dell'operazione può modificarsi. Osservando le componenti elencate sembra impossibile che il senso dell'operazione possa arrivare a compimento nel suo sviluppo nei primi anni della scuola primaria, per esempio sicuramente gli studenti non potranno mettere in relazione l'uso delle operazioni aritmetiche sui diversi insiemi numerici visto che sono noti loro soltanto i numeri naturali e razionali. Ancora, sembra difficile maturare una piena consapevolezza delle proprietà di un'operazione e delle relazioni che questa può avere con altre operazioni. Tuttavia, molti autori specificano che si possono avere istanze di pensiero relazionale anche quando non si è in grado di esprimere le proprietà in termini generali. Tali ricercatori (Jacobs, et al., 2007; Mason, et al., 2009; Empson, et al., 2011) fanno riferimento a ciò che Vergnaud (1985) ha definito come *teoremi in atto*, ossia teoremi (agli occhi dell'esperto di matematica) che sono applicati dagli studenti in particolari problemi e per particolari valori delle variabili, non nella loro forma più generale. In particolare Jacobs e colleghi (2007) sostengono che il pensiero relazionale implichi una certa flessibilità nel calcolo, per la quale le espressioni sono trasformate sulla base di proprietà fondamentali delle operazioni, almeno a livello implicito. Allo stesso modo Empson e colleghi (2011), parlando del fine per il quale il pensiero relazionale viene utilizzato, ritengono che l'uso delle proprietà delle operazioni per trasformare espressioni possa essere esplicito o implicito nel ragionamento del bambino, proprio come nel caso dei teoremi in azione.

Si deve inoltre considerare che l'esplicitazione delle proprietà delle operazioni richiede il riconoscimento di una relazione di equivalenza fra due espressioni aritmetiche rappresentabile col simbolo di uguaglianza. Lo studio delle difficoltà relative al simbolo "=" ha preceduto il problema del pensiero relazionale e ha avuto uno sviluppo approfondito che merita una trattazione a sé.

3.2.2 Il simbolo di uguaglianza

Il problema dell'interpretazione del simbolo di uguaglianza da parte degli studenti è stato affrontato sin dalla fine degli anni '70 del secolo scorso (Behr, 1980; Byers & Herscovics, 1977; Vergnaud, et al., 1979). Uno dei lavori più influenti è stato sicuramente quello di Carolyn Kieran (1981) che presentò su *Educational Studies in Mathematics* una rassegna di come questo simbolo fosse utilizzato dagli allievi nei diversi settori scolastici, a partire dalla scuola dell'infanzia fino all'insegnamento universitario. L'autrice classifica due differenti tipologie di interpretazione del simbolo:

1. il simbolo di uguaglianza è inteso come un operatore, è il segno che si deve fare qualcosa, svolgere un calcolo. Espressioni come $3 + 2 = 5 + 4 = 9$ sono tipici esempi di questa concezione.
2. Il simbolo di uguaglianza è inteso come simbolo di un'equivalenza. Il riconoscimento della verità di equazioni del tipo $3 + 4 = 6 + 1$ è indice di questo tipo di interpretazione del simbolo.

L'autrice sostiene che il primo tipo di interpretazione sia legato alla necessità di "chiudere" l'operazione, ovvero all'impossibilità di gestire termini che non siano stati ancora calcolati. Questo fenomeno era stato già osservato e chiamato *lack of closure*, ovvero bisogno di chiusura (Collins, 1974). Kieran, inoltre, sembra suggerire che lo sviluppo del secondo tipo di interpretazione non possa avvenire prima di una certa età e non sia quindi raggiungibile nella scuola primaria. Citando lo stesso Collins (*ibidem*) sostiene:

i dati non supportano l'ipotesi che se gli studenti (in prima primaria) hanno delle esperienze d'insegnamento appropriate in cui incontrano l'uso dell'uguaglianza in una varietà di espressioni diverse, acquisiranno una concettualizzazione dell'uguaglianza come relazione fra diverse rappresentazioni di uno stesso numero. [...] Dopo l'età di 13 anni, Collins evidenzia, lo studente è disposto a inferire, anche senza modelli fisici, e a usare casi specifici per formare generalizzazioni adeguate. (Kieran, 1981, pp. 319-320)

Tale risultato sembra essere confermato dal lavoro di Falkner e colleghi (1999) che hanno chiesto a studenti della scuola primaria di completare l'uguaglianza $8 + 4 = \square + 5$. I risultati confermano quello che era già stato rilevato da Kieran e dagli altri prima di lei: molti studenti rispondono con 12 o con 17, interpretano quindi il simbolo di uguaglianza come simbolo per la somma dei numeri che si trovano alla sua sinistra oppure per tutti i numeri presenti. In aggiunta a questo, Falkner e colleghi mostrano che non ci sono sostanziali differenze nei risultati ottenuti nei diversi anni della scuola primaria, argomentano quindi che il problema non sembra essere correlato all'età degli studenti e agli anni di scolarizzazione. Rosetta Zan (2007) mostra attraverso uno studio di caso quanto i bambini resistano a una visione di uguaglianza che sia diversa rispetto al considerare il simbolo = "come un operaio, come un uomo che fa tutte le azioni della matematica perché lui dà il risultato" (p. 81).

Carpenter, Franke e Levi (2003), anche a partire da risultati precedenti (Carpenter & Franke, 2001), mettono però in discussione l'impossibilità di far variare l'interpretazione del simbolo di uguaglianza nella scuola primaria. Osservano studenti alla prese con consegne simili durante un periodo di insegnamento specificatamente progettato per promuovere l'interpretazione del simbolo di uguaglianza come simbolo di equivalenza; ne ottengono una classificazione di livelli di sviluppo dell'interpretazione simbolo "=". Il primo livello consiste nell'essere in grado di esplicitare la propria concezione, anche se questa consiste nel pensare l'uguale come simbolo che indica che "si deve fare qualcosa". Gli studenti al secondo livello accettano la verità di uguaglianze diverse dalla forma standard $a+b=c$ (per es. $c=a+b$, $a+b=c+d$). Quando uno studente svolge i calcoli a entrambi i lati dell'uguale per verificare che le operazioni diano lo stesso risultato, allora è al terzo livello. Il quarto livello è invece raggiunto da chi non svolge i calcoli ma utilizza strategie di compensazione o scomposizione dei numeri coinvolti per determinare l'equivalenza fra i due membri dell'uguaglianza. Secondo di questi autori, quest'ultimo tipo di interpretazione è indice della presenza di pensiero relazionale e viene rilevata già dai primi anni di scolarizzazione in alcuni studenti:

Questi livelli sono una guida. Non tutti gli studenti in qualsiasi data classe raggiungeranno questi livelli nello stesso momento, e non tutti gli studenti seguiranno questa esatta sequenza. Infatti abbiamo scoperto che ci sono studenti che usano il pensiero relazionale

caratteristico del quarto livello quando iniziano a imparare che il simbolo di uguaglianza rappresenta una relazione fra due numeri. (Carpenter et al., 2003, p. 20).

Molina e Ambrose (2008), pur condividendo i risultati di Carpenter e colleghi (2003), ripropongono una diversa classificazione dello sviluppo dell'interpretazione dell'uguale. Di fatto le autrici non utilizzano la definizione di pensiero relazionale del gruppo di Carpenter ma quella di Koehler (si veda la citazione all'inizio di questa sezione), pertanto interpretano diversamente i propri risultati. In questo modo, ottengono tre stadi di sviluppo, due di carattere procedurale e uno relazionale:

- 1- Uguale come stimolo per una risposta: si riferisce all'interpretazione procedurale, lettura unidirezionale da sinistra a destra, comando per dare la risposta a un calcolo.
- 2- Uguale come espressione di azione: si riferisce ancora a un'interpretazione procedurale ma bidirezionale. Hanno questa concezione gli studenti che riescono a rispondere a $\_\_ = 8 + 4$ ma forniscono 12 come risposta per $8 + 4 = \square + 5$. Questa interpretazione viene associata alla *bisogno di chiusura* (Collins, 1974).
- 3- Uguale come espressione di equivalenza, si tratta dell'interpretazione relazionale corrispondente al quarto livello di Carpenter e colleghi (2003).

Gli autori fanno inoltre notare che l'evoluzione non è lineare per tutti gli studenti. Alcuni saltano il secondo stadio, altri sono "instabili" nel senso che, a seconda del problema, mostrano una concezione o un'altra. Inoltre, appare lecito pensare che questo percorso possa dipendere dall'insegnamento; pertanto si potrebbero riscontrare profonde differenze variando il contesto culturale.

Si noti che la classificazione di Molina e Ambrose appare come più operativa rispetto a quella di Carpenter e colleghi. Di fatto, è chiara la distinzione fra i diversi livelli a prescindere dalla particolare consegna, mentre nell'altra classificazione la differenza fra i primi livelli sembra dipendere solo dal tipo di consegna fornita agli studenti e sembra esserci un'intersezione fra i vari livelli di sviluppo presentati (per es. fra il primo e i successivi). Questa differenza è da ascriversi soprattutto alla diversa finalità con cui le due classificazioni sono fatte. I livelli presentati da Carpenter e colleghi vogliono servire a indirizzare nella creazione di traiettorie di apprendimento. Lo scopo è quello di lavorare sul simbolo di uguaglianza in modo coerente a quello che è l'uso che se ne fa in contesto algebrico; per questo propongono di lavorare su compiti come quello di completare uguaglianze del tipo visto finora oppure la discussione collettiva di uguaglianze vere o false. Nel corpo di ricerca portato avanti da questo gruppo di ricerca viene mostrato che interventi di questo tipo si rivelano efficaci nel far passare da un livello all'altro anche gli studenti dei primissimi anni di scuola primaria. Gli stadi di Molina e Ambrose, invece, sono utilizzati per classificare i risultati di ricerca con una prospettiva semplicemente descrittiva.

3.2.3 Il senso della struttura

Il costrutto di senso della struttura (*structure sense*) è stato introdotto da Linchevski e Livneh (1999) in riferimento all'abilità di "usare strutture equivalenti di un'espressione in modo flessibile e creativo" (p.191). Le autrici si riferiscono all'interpretazione strutturale di espressioni aritmetiche, pensata da molti (primi fra tutti Booth, 1988 e Kieran, 1988) come

prerequisito per il trattamento sintattico delle espressioni algebriche letterali. L'idea di senso della struttura, a detta delle autrici, rappresenta il caso aritmetico di quello che, nel contesto algebrico, Kieran (1988) definiva come conoscenza strutturale intendendo l'abilità di identificare forme equivalenti per un'espressione. Tale definizione è stata estesa da Linchevski e Vinner (1990) per includere l'abilità di discriminare fra le diverse forme scegliendo quella rilevante al particolare problema analizzato. Nel loro lavoro, Linchevski e Livneh mostrano come sia possibile trovare tracce delle difficoltà che la letteratura mette in evidenza in contesto algebrico, in particolare nella gestione dell'ordine delle operazioni (Herscovics & Linchevski, 1994), all'interno di consegne in ambito aritmetico. Tuttavia, non viene mai specificato esattamente che cosa sin intenda con 'struttura'.

Il senso della struttura è stato reinterpretato più recentemente da Hoch e Dreyfus che, nel corso degli anni 2000, hanno presentato in diverse conferenze internazionali la loro personale definizione (Hoch & Dreyfus, 2004; 2006; 2007). La definizione di struttura fornita da questi due autori è la seguente:

Una struttura in matematica può essere vista come una analisi con punto di vista ampio del modo in cui un'entità è fatta delle sue parti. Questa analisi descrive i sistemi di connessioni o relazioni fra le parti componenti¹¹. (Hoch & Dreyfus, 2004, p.50)

Gli autori specificano quindi che le espressioni algebriche e letterali sono da intendersi, in questo senso, come strutture. Arrivano perciò a definire il senso della struttura in questo modo:

Il senso della struttura, così come si applica nell'algebra delle scuole superiori, può essere descritto come un insieme di abilità. Queste abilità includono l'abilità di: vedere un'espressione algebrica come una entità, riconoscere in un'espressione algebrica una struttura incontrata precedentemente, dividere un'entità in sotto-strutture, riconoscere le reciproche connessioni fra strutture, riconoscere quale manipolazione è possibile eseguire, e riconoscere quale manipolazione è utile fare. (Hoch & Dreyfus, 2004, p.51)

Si noti che i due autori forniscono una definizione che si riferisce specificatamente al contesto della scuola superiore. Tuttavia, fra le abilità elencate nella definizione vi sono molte di quelle che vengono utilizzate nella definizione di pensiero relazionale dai vari autori citati precedentemente, come il fatto di vedere l'espressione come un tutt'uno ma di riconoscerne le parti e le relazioni che fra esse intercorrono. Si noti inoltre che questa definizione include quella di Linchevski e Livneh (1999). Nei lavori successivi (Hoch & Dreyfus, 2006; 2007) i due autori rendono la definizione maggiormente operativa, ancora una volta però riferendosi al caso dell'algebra. In particolare, vengono distinte le abilità di manipolazione da quelle legate al senso della struttura. Viene detto che uno studente dimostra abilità di manipolazione quando:

- risolve un'equazione o fattorizza seguendo esplicite istruzioni date,
- sostituisce correttamente in una formula assegnata.

Invece, viene dimostrato senso della struttura nelle situazioni in cui lo studente è in grado di:

- riconoscere una struttura familiare nella sua forma più semplice;
- scegliere le manipolazioni appropriate per fare il miglior uso della struttura.

¹¹ Structure in mathematics can be seen as a broad view analysis of the way in which an entity is made up of its parts. This analysis describes the systems of connections or relationships between the component parts.

Anche attraverso gli esempi di analisi forniti nei rispettivi articoli, si deduce che Hoch e Dreyfus intendano la loro definizione nel caso del calcolo letterale algebrico generalmente proposto nei primi anni della secondaria di secondo grado. Pertanto questa seconda definizione non si riferisce direttamente al senso della struttura auspicato nel caso del pensiero relazionale in ambito aritmetico. Appare degno di nota il fatto che in uno dei loro lavori (Hoch & Dreyfus, 2006) i due ricercatori mettano in evidenza che il senso della struttura si contrappone, quantomeno nel caso algebrico, a quella che Skemp (1976) chiamava comprensione strumentale. Il pensiero relazionale è stato associato alla comprensione relazionale (Molina, 2011). La definizione di senso della struttura di Hoch e Dreyfus sembra essere quindi adattabile al nostro contesto.

Ha trovato invece maggior impiego la definizione di Linchevski e Livneh (1999); per esempio Subramaniam & Banerjee (2004) riferiscono di un *teaching experiment* finalizzato a promuovere il senso della struttura in ambito aritmetico e citano esplicitamente la definizione delle due ricercatrici israeliane. Le consegne che vengono date agli allievi consistono nel confronto di uguaglianze fra espressioni numeriche e, nella loro analisi, gli autori sostengono che viene dimostrato senso della struttura quando gli studenti riescono a confrontare le espressioni numeriche senza calcolare i risultati ma basandosi sulle relazioni fra le espressioni stesse, il che coincide con la definizione di pensiero relazionale di Carpenter e colleghi (2003).

Il ruolo della capacità di identificazione della struttura nelle espressioni aritmetiche per lo sviluppo del pensiero relazionale viene messo ancor più in evidenza da Mason e colleghi (2009) che, per sottolineare questo legame, arrivano a ribattezzare il pensiero relazionale come pensiero strutturale. Infatti, parlando del contesto dell'aritmetica, affermano che

L'importanza della comprensione strutturale in questi contesti consiste nel fatto che offrono agli studenti una risorsa di controllo che permette loro di andare oltre la particolare situazione. Sarà chiaro, nelle parti successive, che l'estensione di tale controllo può crescere – cioè, può aumentare in livello di generalità. Diversi autori, fra cui Carpenter e Franke (2001) e Stephens (2006), si riferiscono al pensiero che sta alla base di questo tipo di pensiero come *pensiero relazionale*, ma dal nostro punto di vista potrebbe altrettanto facilmente essere chiamato pensiero *strutturale*. (Mason et al, 2009, p. 20)

3.3 Una definizione operativa di pensiero relazionale

In questa sezione si vuole dare una sintesi di quanto emerge dalla letteratura studiata nelle sezioni precedenti al fine di giungere a una definizione operativa del costrutto di 'pensiero relazionale'. Con definizione operativa si intende una definizione che permetta di riconoscere le istanze del costrutto definito attraverso l'osservazione diretta, quindi senza far riferimento a "entità private" (Sfard, 2009) che possono essere riconosciute solo da chi agisce e non da chi osserva agire. In pratica, si intende descrivere il termine "pensiero" che appartiene alla sfera personale in termini di azioni e comportamenti rilevabili da un osservatore esterno (il ricercatore in questo caso).

La letteratura degli ultimi quarant'anni ha messo a fuoco diverse componenti del pensiero relazionale pertanto si ritiene opportuno fornire una definizione che passi attraverso queste componenti. Inoltre, molti autori mettono in evidenza come il pensiero relazionale si sviluppi progressivamente passando attraverso differenti stadi. Quindi, appare necessario precisare in che modo possa essere riconosciuto lo sviluppo e l'uso del pensiero relazionale stesso. Dato che l'oggetto di studio di questo lavoro è l'aritmetica elementare, al fine di utilizzare la definizione qui fornita nei capitoli successivi, si contestualizzeranno le definizioni rispettivamente di sviluppo e di uso del pensiero relazionale, a questo particolare ambito della matematica scolastica.

Pertanto, si dirà che uno studente sta *sviluppando il proprio pensiero relazionale* in ambito aritmetico quando:

- ancora soggetto al bisogno di chiusura, riconosce il simbolo di uguaglianza come *espressione di azione* (Molina & Ambrose, 2008) ovvero confronta due espressioni fra le quali viene inserito il simbolo di uguaglianza ricorrendo al calcolo del risultato di ciascuna delle due per poi confrontare i risultati delle espressioni stesse.
- Sviluppa le abilità che concorrono al *senso dell'operazione* (Slavit, 1999), ovvero
 - riconosce un'operazione in un contesto diverso da quello in cui gli è stata inizialmente presentata (per es. risolve un problema di ripartizione con una divisione dopo che questa è stata introdotta per la prima volta attraverso le sottrazioni ripetute),
 - ha una conoscenza, almeno intuitiva, di alcune delle proprietà dell'operazione (anche in forma di *teoremi in atto*, Vergnaud, 1985).
- Interpreta un'espressione aritmetica non seguendo l'ordine di scrittura da sinistra verso destra ma divide l'espressione in alcune delle sue *componenti* (nel senso di Hoch & Dreyfus, 2004) anche individuando l'eventuale precedenza di operazioni.

Si dirà invece che si ha un'istanza di *uso del pensiero relazionale* in ambito aritmetico quando lo studente:

- Dimostra *senso dell'operazione* (Slavit, 1999) ovvero
 - riconosce e applica diversi modelli e rappresentazioni della stessa operazione aritmetica,
 - usa in modo intenzionale le proprietà dell'operazione anche se non è in grado di enunciarle in forma generale (Jacobs, et al., 2007; Mason, et al., 2009; Empson, et al., 2011).
- interpreta il simbolo di uguaglianza posto fra due espressioni aritmetiche come *espressione di un'equivalenza*, ovvero non svolge i calcoli ma utilizza strategie basate sulle proprietà delle operazioni coinvolte per determinare l'equivalenza fra i due membri dell'uguaglianza (Carpenter et al., 2003; Molina & Ambrose, 2008).
- Dimostra una o più delle abilità che concorrono al *senso della struttura*, che di seguito ridefiniamo adattando la definizione di Hoch e Dreyfus (2004, p.50, cfr sez. 3.2.2) all'ambito aritmetico.

Il **senso della struttura**, così come si applica nell'aritmetica della scuola primaria, può essere definito operativamente come un insieme di abilità. Queste abilità includono l'abilità di:

- vedere un'espressione aritmetica come un'unica entità,
- riconoscere in un'espressione aritmetica una struttura incontrata precedentemente,
- dividere un'espressione nelle operazioni che la costituiscono,
- riconoscere le mutue connessioni fra le operazioni,
- riconoscere quale manipolazione è possibile eseguire (in base alle proprietà delle operazioni),
- riconoscere quale manipolazione è utile fare (per raggiungere un particolare obiettivo).

3.4 L'apprendimento della moltiplicazione e delle sue proprietà

Finora si è parlato di pensiero relazionale per applicarlo al particolare caso dell'aritmetica elementare. Per poter affrontare il problema di ricerca presentato nel primo capitolo, appare necessario approfondire quelli che sono i risultati finora raggiunti dalla ricerca sulla didattica della moltiplicazione anche al fine di mettere in evidenza altri costrutti rilevanti e quindi la terminologia specifica di questo particolare settore della ricerca in didattica della matematica.

La ricerca in didattica della matematica, nel suo complesso, ha seguito diverse tendenze: negli anni '70 e '80 ci si è concentrati maggiormente sugli oggetti della matematica analizzandoli da un punto di vista più strettamente epistemologico (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998). Successivamente si è insistito maggiormente sugli aspetti cognitivi concentrandosi sulle difficoltà che lo studente incontra quando affronta nuovi problemi della matematica (Tsatsaroni, Lerman, & Guo-Rong, 2003) e più recentemente si sono approfonditi gli aspetti più prettamente didattici concentrandosi sulla relazione fra i diversi agenti del processo di insegnamento/apprendimento, ovvero lo studente e l'insegnante, con un focus particolare su quest'ultimo (Sfard, 2005).

Anche la ricerca sulla moltiplicazione sembra aver seguito la stessa dinamica e pertanto si presenteranno i maggiori risultati riscontrati in letteratura dividendoli secondo questi diversi focus di attenzione, seguendo così l'ordine cronologico con cui tali risultati sono emersi (seppure con diverse intersezioni temporali). In particolare, la prima parte di questa sezione riguarda l'operazione di moltiplicazione e la sua rappresentazione attraverso vari modelli; nella seconda parte ci si concentra sull'apprendimento dell'operazione di moltiplicazione e quindi sullo sviluppo del campo moltiplicativo da parte dello studente; l'ultima parte è dedicata invece all'insegnamento della moltiplicazione (in particolare la memorizzazione dei fatti moltiplicativi) con un focus sugli strumenti didattici studiati dalla ricerca.

3.4.1 L'operazione di moltiplicazione: modelli e situazioni problematiche

La parola 'modello' è usata in matematica in modo ambiguo. Infatti, si parla di modelli sia nel caso di situazioni reali, legate al mondo e ai fenomeni naturali (ovvero ai cosiddetti processi di *modelling* o modellizzazione) sia nel caso di diverse definizioni dell'operazione stessa di

moltiplicazione. In questa sezione ci si occuperà di analizzare entrambe le questioni. Si parlerà di modelli per riferirsi alla definizione dell'operazione, nell'altro caso di userà l'espressione 'situazioni problematiche' o più brevemente *situazioni*.

Uno dei primi cataloghi dei diversi modelli coinvolti nella didattica dell'operazione di moltiplicazione (se non proprio il primo) è stato stilato da Floyd R. Vest (1971). Questo autore individua undici diverse "famiglie" di modelli. Vest raggruppa nella stessa famiglia quei modelli che "sono utilizzati insieme nella didattica, sono stati sviluppati da uno stesso autore o programma matematico, hanno attributi distintivi comuni o sono costruiti in modo simile" (ibidem, p. 221). Le famiglie individuate sono definite come segue.

1. *Set union models*. Si tratta di tutti i modelli in cui si uniscono diversi insiemi equivalenti disgiunti per formare un unico insieme. Seguendo questo tipo di modelli, un prodotto $a \times b$ è "la cardinalità dell'unione di a insiemi di b elementi a due a due disgiunti" (Ohmer & Aucoin, 1966, p.51, citato in Vest, 1971).
2. *Decomposition models*. Un singolo insieme viene visto come composto di sottoinsiemi disgiunti equivalenti. Si tratta di un modello generalmente associato sia all'operazione di moltiplicazione sia alla divisione.
3. *Number line models*. In questi casi la moltiplicazione viene vista come un ripetersi di passi o di salti di ugual lunghezza sulla linea dei numeri.
4. *Cartesian product models*. Se a e b sono numeri naturali, $a \times b$ è "la cardinalità del prodotto cartesiano degli insiemi A e B dove la cardinalità di A è a e la cardinalità di B è b " (Vest, 1971, p.223).
5. *Rectangular array models*. Esempi di questi modelli sono schieramenti rettangolari di pallini (o altri simboli) o griglie rettangolari. Un fattore è da associarsi al numero di righe nello schieramento, l'altro al numero di colonne; quindi il prodotto è rappresentato dalla totalità degli oggetti rappresentati. Una variazione è il caso in cui i fattori sono associati alle dimensioni di un rettangolo e il risultato all'area. Secondo lo stesso Vest, "questi modelli possono essere facilmente mappati su altri modelli come i Set union e i Cartesian product models e sono particolarmente utili nell'illustrare la proprietà distributiva della moltiplicazione sull'addizione" (ibidem, p. 223).
6. *Comparison models*. Ricadono in questa categoria i modelli legati ai rapporti. Si tratta del confronto di due insiemi in termini di "uno è tante volte l'altro". L'autore ritiene che si tratti di uno dei modelli più diffusi per moltiplicazione e divisione facendo però forse riferimento al caso anglosassone in cui $a \times b$ è letto " a times b " cioè " a volte b ", struttura linguistica che richiama, appunto, questo tipo di modello.
7. *Rod models*. La moltiplicazione viene intesa come l'accostamento (agli estremi) di molte stecche della stessa lunghezza. Il risultato è rappresentato da una stecca lunga come tutte le stecche accostate e allineate.
8. *Machine type models*. Esempi di modelli di questo tipo sono tabelle e schemi, macchine binarie o esperimenti con molle o ingranaggi tali da poter modellizzare la moltiplicazione. Vengono inseriti in questa categoria esperimenti di probabilità empirica sull'intersezione di eventi indipendenti.
9. *Two-dimensional models*. Un modello di questo tipo è proposto da Adler (1958): prese due rette s e t che formino un angolo acuto, detto O il loro punto di intersezione, si

riporta un segmento OU di grandezza unitaria con un estremo in O su s . Su t si riporta un segmento OA di lunghezza a e si collegano gli estremi U e A . Su s si riporta anche un segmento OB di lunghezza b . Si traccia una retta parallela ad UA e passante per B . Tale retta interseca t in un punto X . Sia x la lunghezza di OX , allora si definisce $a \times b = x$ (Fig.3.4.1.1). Altri modelli proposti utilizzano grafici di funzioni del tipo $y=nx$ per determinare il valore del prodotto $n \times a$ come l'ordinata del punto del grafico che ha ascissa a .

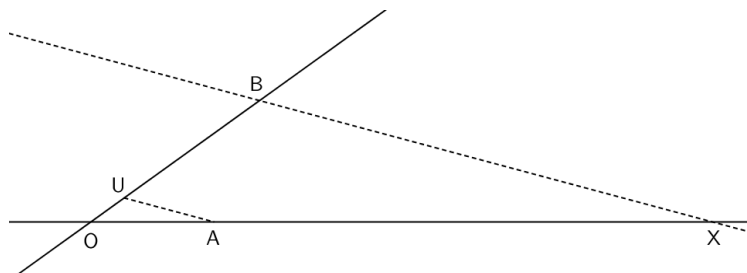


Fig. 3.4.1.1: Modello di moltiplicazione proposto da Adler (1958).

10. *Repeat-addition and repeated-subtraction models.* Nella moltiplicazione per somme ripetute si considera uno dei due fattori come moltiplicando e l'altro come moltiplicatore. Uno dei due è quindi l'addendo e l'altro indica il numero di volte in cui l'addendo deve essere ripetuto. Analogamente, la sottrazione ripetuta è generalmente associata alla divisione.
11. *Counting models.* L'autore presenta questo modello che lui definisce di "conteggio meccanico" (*mechanical counting*). Si forniscono strisce di carta numerate; per calcolare il prodotto 2×3 si uniscono due strisce che sono numerate fino a 3 e si affianca una striscia di carta lunga come l'unione delle due, sarà quella numerata fino a 6. Questo sarà considerato come risultato del prodotto.

La classificazione proposta da Vest e qui presentata non sembra aver riscontrato un forte successo nella letteratura successiva sebbene sia così ampia e variegata. Una delle ragioni per cui ciò è accaduto potrebbe essere il fatto che alcune delle categorie proposte da questo autore si sovrappongono parzialmente o, meglio, può essere difficile distinguere una categoria dall'altra quando si devono classificare delle situazioni problematiche legate all'operazione di moltiplicazione. Per esempio Anghilleri (1989) dovendo catalogare il compito di creare gruppi composti dallo stesso numero di cubi di colori diversi, sostiene che si tratta sia di *equal grouping* (ovvero un caso di *Set union*) sia di addizione ripetuta. Lo stesso Vest (1971) sostiene che ci siano alcuni modelli facilmente mappabili in altri. Ancora, si deve tener conto del fatto che nelle diverse tradizioni locali possono essere state usate diverse parole per riferirsi a situazioni simili, ottenendo così nomenclature diverse: per esempio, nel lavoro di Anghilleri (1989) i problemi in cui compaiono *Comparison models* sono classificati come "*rate problems*" (problemi di tasso/rapporto).

Ai fini della nostra trattazione, può quindi essere utile un tentativo di uniformazione del linguaggio, cercando di individuare delle categorie distinguibili. Si propone di accorpate alcune delle categorie proposte da Vest (1971) nella seguente classificazione:

- **Modelli iterativi.** Si tratta dei modelli in cui la moltiplicazione è ottenuta come condensazione di processi iterativi di somma, unione di insiemi equivalenti o affiancamento di oggetti di ugual lunghezza (a loro volta modelli diversi per l'operazione di addizione). Rientrano quindi in questa categoria le famiglie 1, 2, 3, 7, 10 e 11 proposte da Vest.
- **Modelli rettangolari.** In questi modelli la moltiplicazione è rappresentata dal rettangolo che ha per dimensioni i fattori, la sua area rappresenta il prodotto. Rientrano in questo modello anche tutte le rappresentazioni del prodotto cartesiano e quindi le famiglie 4 e 5 nella classificazione di Vest.
- **Modelli di proporzionalità.** Sono tutte quelle situazioni in cui viene sfruttata la proporzionalità fra due grandezze (siano esse in contesto geometrico, meccanico, ecc.) per definire un processo finalizzato alla determinazione di un prodotto; negli esempi di Vest si tratta delle famiglie 6, 8 e 9.

Una classificazione diversa, ma paragonabile a quella qui proposta, viene fatta da Gerard Vergnaud (1983). Lo psicologo francese analizza il sapere matematico nella forma di *conceptual fields* (campi concettuali) sostenendo che molte volte è assurdo analizzare separatamente l'acquisizione di concetti fra loro strettamente interconnessi. Nella definizione di Vergnaud (1988) un campo concettuale è una tripletta di insiemi $C=(S, I, S)$ dove "S è l'insieme delle situazioni che rendono il concetto significativo, I è l'insieme degli invarianti (oggetti, proprietà e relazioni) che possono essere riconosciuti e usati dal soggetto per analizzare e gestire queste situazioni, e S è l'insieme delle rappresentazioni simboliche che possono essere usate per indicare e per rappresentare questi invarianti e quindi per rappresentare le situazioni e le procedure con cui affrontarle" (p.85). Con questo l'autore intende che "il significato di un concetto non venga da una sola situazione ma da una varietà e che, reciprocamente, una situazione non può essere analizzata con un solo concetto, ma piuttosto con una varietà di concetti, che formano un sistema" (Vergnaud, 2009, p.86). Secondo Vergnaud (1988) il campo concettuale delle strutture moltiplicative "consiste in tutte le situazioni che possono essere analizzate come problemi di proporzioni semplici o composte per i quali, usualmente, serve moltiplicare o dividere" (p.141). Ne individua tre principali tipi (cfr sez. 1.2.1).

- **Isomorfismi di misure.** Si tratta di una struttura che consiste in un'unica proporzione diretta fra due spazi di misura. Questa categoria include i problemi di ripartizione equa ma anche situazioni di prezzi costanti, velocità costante, densità costante, ecc. cioè i cosiddetti problemi del tre semplice.
- **Prodotto di misure.** Si riferisce a una struttura che consiste nella composizione di due spazi di misura da cui si ottiene un terzo spazio di misura. Ne sono un esempio il calcolo di aree e volumi, i problemi di prodotto cartesiano ma anche alcuni problemi che coinvolgono concetti fisici (come il lavoro definito come prodotto fra forza e spostamento).
- **Proporzioni multiple.** Si tratta delle situazioni in cui c'è uno spazio di misura proporzionale ad altri due. In questa categoria si trovano quindi situazioni analoghe a quelle degli isomorfismi di misure ma in cui sono coinvolti tre spazi di misura anziché due. Rientrano quindi i cosiddetti problemi del tre composto.

Le differenze fra le situazioni moltiplicative sono analizzate anche da Kaput (1985) e da Schwartz (1988), in termini di grandezze *intensive* (I) ed *extensive* (E). Secondo questi ricercatori il numero può provenire dal conteggio o dalla misura (si hanno quindi grandezze estensive) oppure da operazioni su di esse. Quando, in particolare, si ha un rapporto fra due misure (km/h, g/cm³, euro/kg, ...) si ha una grandezza intensiva. Secondo Greer (1992), i problemi del tipo $E \times E' = E''$ corrispondono ai prodotti di misure di Vergnaud, mentre quelli del tipo $E \times I = E'$ (ovvero $E'/E = I$) corrispondono agli isomorfismi di misure. Ancora, una distinzione di questo tipo viene fatta anche da Pearla Nesher (1988) che però, oltre a identificare le due categorie *mapping rule* (regola di mappatura) e *cartesian multiplication* (moltiplicazione cartesiana), distingue anche una terza categoria detta *multiplicative comparison* (comparazione moltiplicativa) che corrisponde ai *comparison models* di Vest (1971). Quest'ultima categoria è presentata attraverso esempi che sembrerebbero da includere nella categoria degli isomorfismi di misure (insieme ai problemi di tipo *mapping rule*) di Vergnaud (1983). Valutando gli esempi che vengono forniti, appare analoga alla classificazione di Nesher (1988) quella fatta da Kouba (1989), che però parla, rispettivamente, di *scalar problems* (problemi scalari), *cross product problems* (problemi di prodotto incrociato) e *common equivalent set problems* (problemi su insiemi equivalenti).

Queste diverse classificazioni sono state analizzate e comparate da Greer (1992) che ne ricava le analogie riassunte in tabella 3.4.1.1¹². Le categorie suggerite a sua volta da Greer (che sono divise anche secondo l'insieme numerico coinvolto) sono definite dall'autore stesso per mezzo di diversi esempi, lasciando (almeno in parte) al lettore la distinzione fra una categoria e l'altra. Gli esempi riportati nell'articolo sono riassunti nella tabella 3.4.1.2 (traduzione della tab. 13-1 di Greer, 1992, p.280).

Greer (1992)			Vergnaud (1983)	Kaput (1985) & Schwartz (1988)	Nesher (1988)	Kouba (1989)
<u>Interi</u>	<u>Frazioni</u>	<u>Decimali</u>				
Equal groups Equal measures	Rate	Rate	Isomorphism of measures	$E \times I = E'$	Mapping rule	Equivalent set problems
Multiplicative comparison	Multiplicative comparison part/whole	Measure conversion Multiplicative comparison part/whole Multiplicative change			Multiplicative comparison	Scalar problems
Rectangular array Rectangular area	Rectangular area	Rectangular area	Product of measures	$E \times E' = E''$	Cartesian Product	Cross product problems
Cartesian product		Product of measures				

Tab. 3.4.1.1: Comparazione delle classificazioni proposte dagli autori analizzati.

¹² La tabella è ottenuta integrando la tabella 13-2 di Greer (1992, p.290) inserendo il lavoro di Kouba (1989) che da lui non veniva considerato.

Categoria	Problema moltiplicazione	Problema divisione (per il moltiplicatore)	Problema divisione (per il moltiplicando)
Equal groups	Ci sono 3 bambini ognuno dei quali ha 4 arance. Quante arance hanno tutti insieme?	12 arance vengono suddivise equamente fra 3 bambini. Quante ne ottiene ciascuno?	Se hai 12 arance, a quanto bambini potrai dare 4 arance?
Equal measures	Ci sono 3 bambini ognuno dei quali ha 4,2 litri di succo di arancia. Quanto succo hanno tutti insieme?	12,6 litri di succo d'arancia sono distribuiti equamente fra 3 bambini. Quanto ne ottiene ciascuno?	Se hai 12,6 litri di succo di arancia, a quanti bambini potrai darne 4,2 litri?
Rate	Una nave si muove alla velocità costante di 4,2 metri al secondo. Quanto si sposta in 3,3 secondi?	Una nave si muove di 13,9 metri in 3,3 secondi. Qual è la velocità media in metri al secondo?	Quanto tempo serve a una nave per percorrere 13,9 metri alla velocità di 4,2 metri al secondo?
Measure conversion	Un pollice corrisponde a circa 2,54 centimetri. Quanto sono lunghi 3,1 pollici in centimetri?	3,1 pollici corrispondono a circa 7,84 centimetri. Quanti centimetri ci sono in un pollice?	Un pollice corrisponde a circa 2,54 centimetri. Quanti pollici corrispondono a 7,84 centimetri?
Measure comparison	Il peso del ferro è 0,88 volte quello del rame. Un pezzo di rame pesa 4,2 kg. Quanto pesa un pezzo di ferro delle stesse dimensioni?	Il peso del ferro è 0,88 volte quello del rame. Se un pezzo di ferro pesa 3,7 kg quanto pesa un pezzo di rame delle stesse dimensioni?	Se due pezzi di rame e ferro delle stesse dimensioni pesano rispettivamente 4,2 kg e 3,7 kg, quanto pesa il ferro rispetto al rame?
Part/whole	Una scuola ha promosso i 3/5 degli studenti più bravi in un esame. Se 80 studenti hanno fatto l'esame, quanti ne sono stati promossi?	Una scuola ha promosso i 3/5 degli studenti più bravi in un esame. Se 48 studenti sono stati promossi, quanti hanno fatto l'esame?	Una scuola ha promosso 48 studenti su 80 che hanno affrontato un esame. Quale frazione di studenti è stata promossa?
Multiplicative change	Un pezzo di elastico può essere allungato fino a 3,3 volte la lunghezza originale. Qual è la lunghezza di un pezzo di 4,2 metri completamente allungato?	Un pezzo di elastico può essere allungato fino a 3,3 volte la lunghezza originale. Quand'è completamente allungato è lungo 13,9 metri. Qual era la lunghezza originale?	Un pezzo di elastico di 4,2 metri può essere allungato fino a raggiungere 13,9 metri. Di quale fattore viene allungato?
Cartesian Product	Se ci sono 3 strade per andare da A a B e 4 strade per andare da B a C, quante diverse strade ci sono per andare da A a C passando per B?	Se ci sono 12 diverse strade per andare da A a C passando per B e 3 strade permettono di andare da A a B, quante diverse strade permettono di andare da B a C?	
Rectangular area	Qual è l'area di un rettangolo di dimensioni 3,3 metri e 4,2 metri?	Se l'area di un rettangolo è 13,9 m ² e la base è 3,3 m, quanto misura l'altezza?	
Product of measures	Se un calorifero usa 3,3 kW di elettricità in 4,2 ore, a quanto kWh corrisponde?	Un calorifero usa 3,3 kW ogni ora. Per quanto tempo può essere usato a 13,9 kWh di elettricità?	

Tab. 3.4.1.2: Tassonomia di Greer: esempi.

Sintetizzando: sembra che ci sia un generale consenso nel separare i modelli per la moltiplicazione in almeno due diverse categorie assimilabili ai casi $E \times E' = E''$ e $E \times I = E'$. La tabella 3.4.1.2 permette di notare che queste due categorie sono facilmente distinguibili

quando si osservano i problemi di divisione: nel caso di prodotto $E \times E'$ (cioè i problemi delle ultime tre righe) non si distinguono due tipi diversi di problema di divisione, dato che non si distingue il moltiplicando dal moltiplicatore. D'ora in poi si classificheranno le diverse situazioni problematiche utilizzando la tassonomia di Vergnaud (1983) e quella di Greer (1992) presentata in tabella 3.4.1.2.

3.4.2 Lo sviluppo del concetto di moltiplicazione

Alla fine degli anni '80, i ricercatori in Didattica della Matematica hanno iniziato a interessarsi al modo in cui i bambini apprendono la moltiplicazione studiando sia le difficoltà incontrate di fronte alle situazioni modellizzabili come prodotti, sia le procedure di calcolo messe in atto e il loro sviluppo durante il periodo di scolarizzazione. In questa sezione si presenteranno le classificazioni che sono state fatte per le procedure usate dagli studenti per affrontare le situazioni problematiche presentate nella sezione precedente.

Anghilleri (1989) propone diverse situazioni problematiche (risolvibili con moltiplicazioni di numeri naturali a una cifra) a bambini dai 7 agli 11 anni e mette a confronto i diversi processi risolutivi. I bambini più piccoli utilizzano un **conteggio** che lei definisce **unitario** (*unitary counting*) che sembra aver origine nel considerare la moltiplicazione come unione di insiemi disgiunti di ugual cardinalità: il bambino conta gli elementi del primo insieme e poi prosegue nella sua conta mettendo in evidenza il momento in cui finisce di contare gli elementi di un insieme e passa a quelli di un altro. Questo viene fatto ripetendo il conteggio sempre sulle stesse dita alzate (Fig. 3.4.2.1a) oppure alzando un dito ogni volta che si sono contati gli elementi di un insieme (Fig. 3.4.2.1b). La ricercatrice nota che invece i bambini più grandi utilizzano dei **number pattern**, ovvero delle sequenze di numeri memorizzate. In pratica, invece che procedere col conteggio degli elementi di ogni singolo insieme, dichiarano soltanto i numeri che avrebbero al termine della conta di un insieme (per es. per calcolare 4×3 si direbbe soltanto "quattro, otto, dodici"). Fra il conteggio unitario e l'uso dei number pattern c'è una fase intermedia detta di **conteggio ritmico** (*rhythmic counting*) che consiste sempre nell'elencare tutti i numeri ma dando una particolare intonazione all'ultimo numero nel conteggio degli elementi di uno degli insiemi oppure nel lasciare una pausa fra la conta di un insieme e quella di un altro. Secondo la Anghilleri (ibidem) queste fasi rappresentano l'evoluzione di un conteggio interno necessario per riconoscere il fatto di aver terminato gli elementi di un gruppo e per passare a quelli del successivo (Fig. 3.4.2.2). Secondo la ricercatrice, il progressivo passaggio da una tipologia di conteggio all'altra è indice dell'interiorizzazione delle sequenze di numeri che vengono nominati di volta in volta. La successiva fase è quella dell'uso di fatti aritmetici moltiplicativi, che a loro volta deriverebbero dall'interiorizzazione dei pattern, dimostrato soltanto dai bambini più grandi nel campione.

Una classificazione di questo tipo viene proposta anche da Kouba (1989) che, sulla base delle interviste fatte, identifica cinque strategie risolutive. La prima viene chiamata **rappresentazione diretta** (*direct representation*) e consiste nel rappresentare con oggetti fisici o tramite il disegno la moltiplicazione per poi contare complessivamente il numero di oggetti rappresentati (nel suo caso si tratta solo di problemi di tipo equal groups, secondo la terminologia di Greer, 1992). Questo tipo di strategia viene chiamata **doppio conteggio** (*double counting*) quando viene usata nel caso della divisione; infatti in questo caso si

raggruppano gli oggetti dovendo tenere il conto sia di quanti oggetti si mettono in ogni gruppo, sia di quanti gruppi si vengono così a formare. L'uso di quelli che Anghilleri (1989) definisce come *number patterns* viene ribattezzato come **conteggio transitorio** (*transitional counting*) da Kouba (1989). Questo autore osserva poi alcune strategie che definisce **additive o sottrattive** e consistono nell'uso ripetuto dell'addizione per calcolare un prodotto e della sottrazione per calcolare un quoziente. L'ultima strategia individuata è detta **fatto numerico richiamato** (*recalled number fact*) e consiste nell'uso di un prodotto conosciuto a memoria. In realtà l'autore specifica che sono stati inclusi anche i casi in cui lo studente ha applicato una proprietà per determinare un risultato (per es. la proprietà associativa per calcolare 6×4 come $6 \times 2 \times 2$); in questo caso Kouba (ibidem) parla di fatti derivati (*derived fact*).

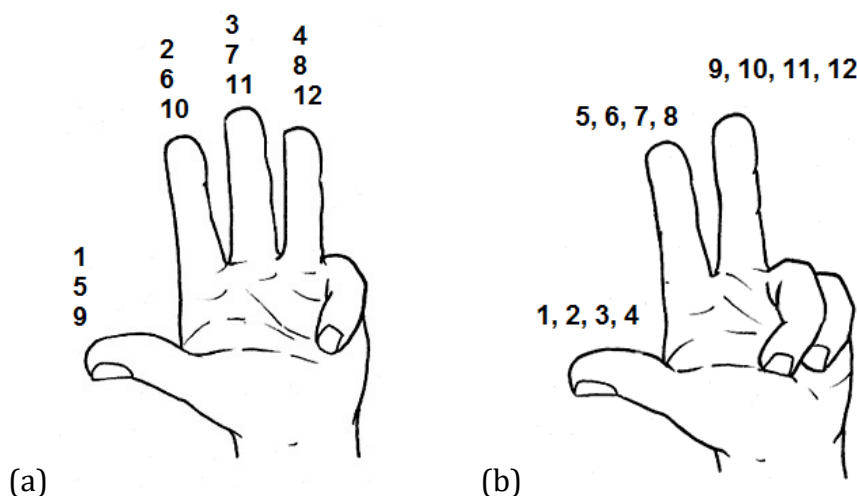


Fig. 3.4.2.1: Due usi delle dita per calcolare 4×3 tramite il conteggio unitario. Su ogni dito sono riportati i numeri che vengono detti a voce quando lo si solleva.

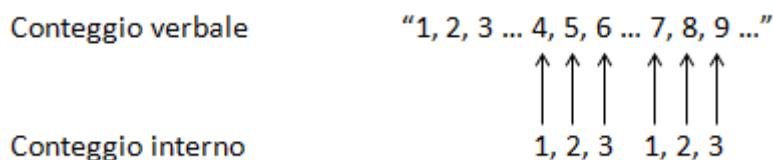


Fig. 3.4.2.2: Rappresentazione del conteggio interno che, secondo Anghilleri (1989), è necessario per calcolare il prodotto come somma ripetuta.

Questa importante distinzione era già stata fatta precedentemente da Ter Heege (1985) che, attraverso interviste a bambini che risolvono moltiplicazioni, mette in luce la differenza fra il *figuring out* (letteralmente, comprendere) e il *knowing by hearth* (conoscere a memoria). In particolare, l'autore classifica sei diverse "strategie informali" per ricostruire il risultato di un prodotto che non si conosce a memoria (cioè per il *figuring out*):

1. applicazione della **proprietà commutativa**, eventualmente seguita da altre operazioni. Per es. un bambino per calcolare 8×7 dice che $5 \times 8 = 40$ quindi aggiunge due volte 8.
2. **Usare la regola** per cui moltiplicare **per 10** comporta solo l'aggiunta di uno zero.
3. **Raddoppiare un prodotto** noto, per es. 7×8 è il doppio di 7×4 .

4. Uso di **moltiplicazioni più familiari** come quelle che coinvolgono 10 e 5 come fattori. Si traduce anche nel dimezzamento di prodotti noti, come 6×5 ottenuto come la metà di 6×10 .
5. **Aumento di prodotti** noti, per es. $6 \times 7 = 5 \times 7 + 7$.
6. **Decremento di prodotti** noti, per es. $7 \times 8 = 7 \times 10 - 7 - 7$.

Si può notare che la seconda strategia differisce dalle altre in quanto non si tratta di una strategia utilizzabile per qualsiasi prodotto ma soltanto nel caso di prodotti che coinvolgono un particolare numero (in questo caso il 10). Altre “regole” (così come sono chiamate da Cooney et al., 1988, e da LeFevre et al., 1996) di questo tipo possono essere quelle riguardanti l’elemento neutro (un numero per 1 dà sempre se stesso) o lo zero (cfr Butterwoth et al, 2005, citato in sez. 2.3.2).

Un tentativo di unificazione di tutti questi risultati è stato fatto, più recentemente, da Sherin e Fuson (2005) che, oltre ai lavori già citati, analizzano anche la pubblicazione di Mulligan e Mitchelmore (1997) che a sua volta può essere considerata un primo tentativo (incompleto) di ricerca di un linguaggio condiviso. I due autori arrivano a classificare sei diverse strategie per il calcolo della moltiplicazione cercando di unificare quanto emerso nella letteratura analizzata.

Contare tutto (*count all*). Si rappresenta la moltiplicazione creando dei gruppi di oggetti concreti, di segni grafici (iconici o simbolici) oppure usando le dita (sia il conteggio unitario sia il conteggio ritmico della Anghilleri, 1989).

Calcolo additivo (*additive calculation*). Si riferisce all’addizione ripetuta: si sceglie uno dei fattori della moltiplicazione come addendo e l’altro come indicatore del numero di addendi. Viene incluso anche il caso in cui, invece che ripetere l’addizione di uno stesso numero, si usi la proprietà associativa dell’addizione per ottenere delle “somme parziali” ($5 \times 6 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 10 + 10 + 10 = 30$).

Calcolo con sequenze di conteggio (*count-by sequence*). Si individua uno dei due fattori della moltiplicazione come elemento che genera una sequenza di multipli, si elencano i multipli alzando un dito ogni volta che se ne dice uno, utilizzando dei segni grafici per controllare a quale termine della sequenza si è arrivati oppure tenendo il conteggio a mente .

Calcolo basato su pattern (*pattern based*). In questa categoria sono raccolte tutte le ‘regole’ (secondo la terminologia di Cooney et al., 1988) e quindi i già citati prodotti per 0 e per 1 oltre al prodotto per 10 considerato da Ter Heege (1985). Le autrici inseriscono anche la determinazione di un prodotto per 9 abbassando il corrispondente dito di una delle due mani (per es. il medio della mano sinistra per calcolare 9×3) in modo che le decine del risultato siano date dalle dita che si trovano alla sinistra del dito abbassato e le unità da quelle che si trovano alla sua destra (LeFevre, et al., 1996).

Calcolo con prodotti appresi (*learned products*). Si classificano in questo modo le risposte che vengono ottenute senza l’uso di nessun supporto materiale (ivi comprese le dita) e senza riportare verbalmente altro numero se non il risultato del prodotto richiesto.

Ibridi (*hybrids*). Si tratta di strategie di calcolo in cui sono mescolate le precedenti. Per esempio si usa un prodotto appreso e poi si aggiunge un numero oppure si va avanti a contare dal risultato noto. Rientrano quindi in questa categoria la maggior parte delle strategie informali di Ter Heege (1985). Viene considerata ibrida anche l'applicazione della proprietà distributiva o associativa per "spezzare" la moltiplicazione in prodotti già appresi (Sherin e Fuson fanno l'esempio di 7×8 che viene calcolato come $7 \times 4 + 7 \times 4$).

Come si può notare, le categorie sono comprensive di tutte le strategie elencate nella letteratura fin qui analizzata, anche se la terminologia utilizzata non è la stessa (Tab. 3.4.2.1). Nel resto di questo lavoro si utilizzerà questa tassonomia proposta da Sharin e Fuson (2005).

Sherin & Fuson (2005)	Count all		Additive calculation	Count-by sequence	Pattern based	Learned products	Hybrids
Mulligan & Mitchelmore (1997)	Unitary counting	Rithmic counting		Skip counting		Known facts	Derived facts
LeFevre et al. (1996)			Repeated addition	Number series	9's rule 1's rule 0's rule	Retrieval	Derived facts
Anghileri (1989)	Unitary counting	Rithmic counting		Number pattern		Known facts	
Kouba (1989)	Direct representation		Additive strategy	Transitional counting		Recalled number facts	Derived facts
Cooney et al. (1988)	Counting				Rules	Memory retrieval	
Ter Heege (1985)					Multiply by 10	Knowing by hearth	Figuring out
			Commutative property "twin sum"	Doubling a known fact	Halving a known fact	Increase (known fact + something)	Decrease (known fact - something)

Tab. 3.4.2.1: Confronto fra le tassonomie nei diversi lavori analizzati.

Sharin e Fuson (*ibidem*) affermano in maniera esplicita che il cambiamento nelle strategie è frutto della crescita e dell'istruzione e affermano che le prime strategie sono più immature mentre le ultime sono maggiormente legate all'istruzione. In particolare, citando Mulligan & Mitchelmore (1997), descrivono il conteggio e la somma ripetuta come intuitivi. Questo termine viene citato a partire dal lavoro di Fischbein et al. (1985) che definiscono un modello intuitivo come un'azione pratica da cui l'operazione aritmetica scaturisce e che a essa rimane fortemente legata. Questi autori, analizzano le soluzioni che gli studenti danno per problemi moltiplicativi di diverso tipo e che coinvolgono diversi insiemi numerici. Concludono il loro lavoro ipotizzando che

il modello primitivo associato alla moltiplicazione è l'addizione ripetuta, in cui un numero di collezioni della stessa dimensione sono messe insieme. Anche se altri modelli, come i diagrammi rettangolari, sono stati proposti per l'insegnamento della moltiplicazione, i loro sostenitori riconoscono che il modello dell'addizione ripetuta debba essere mantenuto come strumento d'istruzione basilare (Freudenthal, *Mathematics as an educational task*,

1973, pp. 248-249). Non sosteniamo che l'insegnamento della moltiplicazione debba obbligatoriamente iniziare con questo modello o che alcune caratteristiche della mente del bambino lo presuppongano, ma solo che per varie ragioni – che devono essere ancora investigate – questo è il modello che tacitamente influenza il significato e l'uso della moltiplicazione, anche in persone con una considerevole educazione matematica. Nell'interpretazione del modello di addizione ripetuta, 3×5 significa $5+5+5$ o $3+3+3+3+3$. Questa interpretazione non vede la moltiplicazione come commutativa. Un fattore (il numero di collezioni equivalenti) è preso come operatore; l'altro (la grandezza di ciascuna collezione), come operando. L'operando può essere una qualsiasi quantità positiva, ma l'operatore deve essere un numero naturale. (Fischbein, et al., 1985, p.6)

Il ruolo del decimale nella struttura di un problema moltiplicativo è chiaramente decisivo nel richiamo dell'operazione corretta. Un problema moltiplicativo diventa più difficile quanto l'operatore è un decimale (cioè quando si viola il modello dell'addizione ripetuta). Se la parte intera del decimale è abbastanza grande rispetto a quella frazionaria, tuttavia, un effetto di assorbimento sembra aver luogo, il che diminuisce l'effetto di contro-intuitività dell'operatore decimale¹³. (ibidem, p. 11)

Dato che questo modello primitivo sembra contro-produttore quando la moltiplicazione viene estesa ad altri insiemi numerici rispetto ai naturali, appare lecito domandarsi se tale modello primitivo sia innato oppure se possa essere evitato. Il dilemma che si pone da un punto di vista didattico è se introdurre gli studenti al modello che appare come intuitivo oppure provare a proporre qualcosa di meno intuitivo ma che potrebbe permettere di evitare difficoltà nel lungo termine.

Quali sono le origini di questi modelli primitivi? Ci sono due possibili spiegazioni. La più diretta è che un modello rifletta il modo in cui il concetto corrispondente o l'operazione è stato inizialmente insegnato a scuola. In quanto prima interpretazione imparata dal bambino, tende a diventare fortemente radicata nel suo comportamento mentale. Usando le parole di Bachelard (1980), è "l'esperienza che qualcuno mette avanti e al di sopra di ogni attitudine critica" (p.23).

Una seconda spiegazione è che questi modelli primitivi siano così resistenti al cambiamento e così influenti perché corrispondono a caratteristiche primarie, naturali e basiche del comportamento mentale umano. Le persone tendono naturalmente a interpretare fatti e idee in termini di modelli strutturati che sono significativi in modo comportamentale ed enattivo. Questa tendenza potrebbe mantenere la presenza dei modelli primitivi sopra e oltre ogni regola formale appresa. Dal nostro punto di vista, sono

¹³ the primitive model associated with multiplication is repeated addition, in which a number of collections of the same size are put together. Although other models, such as the rectangular pattern, have been proposed for teaching multiplication, their advocates recognize that the repeated addition model should be kept as a basic intuitive instructional device (Freudenthal, 1973, pp. 248-249). We do not claim that the teaching of multiplication must begin with this model or that characteristics of the child's mind presuppose it but only that for various reasons-which need to be investigated-this is the model that tacitly affects the meaning and use of multiplication, even in persons with considerable training in mathematics. Under the repeated addition interpretation, 3×5 means $5+5+5$ or $3+3+3+3+3$. This interpretation does not view multiplication as commutative. One factor (the number of equivalent collections) is taken as the operator; the other (the magnitude of each collection), as the operand. The operand can be any positive quantity, but the operator must be a whole number. [...] the role of the decimal in the structure of a multiplication problem is clearly decisive in retrieving the correct operation. A multiplication problem becomes more difficult when the operator is a decimal (thus violating the repeated addition model). If the whole part of the decimal is large enough relative to the fractional part, however, an absorption effect appears to take place, which diminishes the counterintuitive effect of the decimal operator.

corrette entrambe le spiegazioni [...] I modelli didattici iniziali sembrano divenire così profondamente radicati nella mente del discente che continuano a esercitare un controllo inconscio sul comportamento mentale anche dopo che il discente ha acquisito nozioni matematiche formali che sono solide e corrette. Lo sviluppo del pensiero operativo formale nell'adolescenza non risolve di per sé il dilemma¹⁴. (Fischbein, et al., 1985, pp. 15-16)

Fischbein e colleghi (1985) appaiono quindi a favore dell'uso didattico del modello della somma ripetuta pur sottolineando che non sia necessario iniziare con questo modello. Evidenziano invece che il modello ha il difetto di non mostrare la commutatività della moltiplicazione. Un parere analogo viene dato da Freudenthal (1973) che, come descritto nella citazione sopra riportata, si esprime a favore dei modelli rettangolari in quanto questi mostrano la "simmetria" (*ibidem*, p. 252) dell'operazione di moltiplicazione, è possibile utilizzarli sia per la moltiplicazione sia per la divisione (di qualsiasi tipo) e permettono di introdurre l'area del rettangolo. Tuttavia, questo autore sostiene che non si possa rinunciare ai modelli iterativi (che lui chiama *systematic counting* o costruzione induttiva della moltiplicazione) in quanto molti problemi (come quelli dei tipi *equal groups* o *equal measures*) sono facilmente riconducibili al modello dell'addizione ripetuta. Per un confronto più dettagliato fra questi due modelli si veda la sezione 4.2. Nella sezione successiva si focalizzerà sulla ricerca che, a partire dai modelli di sviluppo del concetto di moltiplicazione qui esposti, si è occupata di indagare strumenti per l'insegnamento di questa operazione aritmetica.

3.4.3 Strumenti per l'insegnamento dei fatti moltiplicativi

L'insegnamento nella scuola primaria si avvantaggia spesso di strumenti manipolabili volti a "esplorare, acquisire o investigare i concetti e i processi matematici e per svolgere attività di problem-solving facendo affidamento a evidenze percettive (visuali, tattili o, più in generale, sensoriali)" (Bartolini Bussi & Martignone, 2014, p. 365). La tradizione di utilizzare artefatti¹⁵ concreti per l'insegnamento della matematica è storica¹⁶, più recentemente sono stati introdotti nella didattica anche artefatti di tipo virtuale.

Per l'apprendimento dei fatti moltiplicativi sono piuttosto diffusi materiali in cui le moltiplicazioni che coinvolgono numeri minori di 10 sono associate ai loro risultati. Ne sono

¹⁴ What are the sources of these primitive models? Two explanations seem plausible. The most direct explanation is that a model reflects the way in which the corresponding concept or operation was initially taught in school. As the first interpretation learned by the child, it tends to become strongly rooted in his or her mental behavior. In Bachelard's (1980) phrase, it is "the experience that someone gets before and above any critical attitude" (p. 23).

A second explanation is that these primitive models are so resistant to change and so influential because they correspond to features of human mental behavior that are primary, natural, and basic. People naturally tend to interpret facts and ideas in terms of structured models that are behaviorally and enactively meaningful. This tendency may maintain the presence of the primitive models above and beyond any formal rules one has learned. In our view, both explanations are correct. [...] The initial didactical models seem to become so deeply rooted in the learner's mind that they continue to exert an unconscious control over mental behavior even after the learner has acquired formal mathematical notions that are solid and correct. The development of formal operational reasoning in adolescence does not by itself resolve the dilemma.

¹⁵ La parola artefatto viene qui utilizzata riferendosi a un qualsiasi oggetto prodotto dall'uomo con una qualche finalità. Una distinzione precisa fra i termini 'artefatto' e 'strumento' sarà fatta nei capitoli successivi (sez. 5.3).

¹⁶ A titolo d'esempio si possono citare i regoli di Nepero.

un esempio le cosiddette *Flash Cards* (fig. 3.4.3.1) particolarmente diffuse nei Paesi anglosassoni. Questo tipo di strumento viene presentato soprattutto nella letteratura relativa al recupero di abilità di base per studenti con disturbi dell'apprendimento. Diversi studi mostrano che gli studenti hanno successo nella memorizzazione di semplici fatti aritmetici attraverso la continua ripetizione dei risultati rappresentati sulle carte soprattutto se questi vengono presentati con opportuni raggruppamenti e con tempistiche appropriate. Presentando per primi i fatti che generalmente sono più semplici da memorizzare, ovvero i multipli di 2 e di 5 (cfr sez. 2.3), e le modalità per determinare i prodotti per 0, per 1 e per 10 si ottengono risultati migliori in termini di correttezza nel richiamo (Wood, Frank, & Wacker, 1998). Varie tecniche di memorizzazione fra cui l'inserimento di particolari intervalli di tempo fra diverse sessioni di memorizzazione sono stati testati con efficacia (Cybriwsky & Schuster, 1990) anche per fatti moltiplicativi generalmente difficili da memorizzare (Greene, 1999).

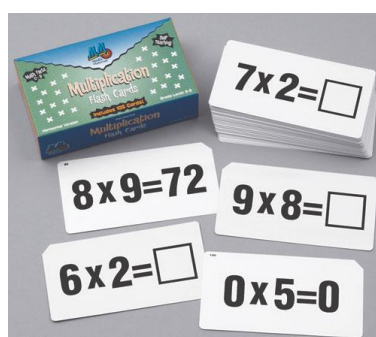


Fig. 3.4.3.1: Esempio di Flash Cards per la moltiplicazione; alcune carte riportano il risultato altre no.

Queste carte, possono essere trovate anche nelle scuole italiane, a volte inserite all'interno di giochi familiari ai bambini, quali il memory o la tombola (Fig. 3.4.3.2). Questo tipo di strumento spinge verso una codifica di tipo strutturale o fonologico (Craick & Lockhart, 1972; cfr sez. 2.2) ma non di tipo semantico. Pertanto la memorizzazione che ne consegue potrebbe non essere duratura nel lungo periodo e nel momento in cui l'associazione operazione-risultato risultasse non più disponibile in memoria, il compito di risolvere una moltiplicazione risulterebbe impossibile.



Fig. 3.4.3.2: Esempio di gioco utilizzato per la memorizzazione dei fatti moltiplicativi.

Attività di ripetizione di fatti aritmetici (il cosiddetto *drill and practice*) sono state inserite anche in numerosi software. Tuttavia, anche se il computer può essere utile come ambiente di apprendimento più motivante, alcuni studi rivelano che se la pratica è comunque solo quella della ripetizione di fatti aritmetici, i risultati con Flash Cards o programmi sono equivalenti in termini di efficacia di richiamo successivo (Fuson & Brinko, 1985)

Nel panorama italiano, un passo avanti è stato fatto con la creazione di software in cui, oltre alla ripetizione dei risultati della moltiplicazione, sono inserite consegne volte all'acquisizione di consapevolezza su alcune proprietà delle operazioni. Un esempio è dato dal software didattico e riabilitativo "Memocalcolo" (Poli et al., 2006): gli autori affermano esplicitamente che uno degli obiettivi con cui il programma è stato progettato è quello di "costruire una rete di fatti collegati gli uni agli altri, su cui basare il recupero in caso di bisogno" (Poli et al, 2007, p. 614). Per farlo, viene proposto di rendere consapevoli gli studenti di alcune proprietà delle operazioni come la commutatività e l'associatività. Inoltre, per il caso dei numeri moltiplicati per se stessi (ovvero l'elevamento alla seconda potenza) viene proposta una rappresentazione spaziale (Fig. 3.4.3.3). L'ordine con cui vengono proposte le consegne sembra suggerire che scopo di questo software sia quello di permettere al bambino di memorizzare molti fatti aritmetici (attraverso l'uso di sequenze di conteggio) per poi metterli in relazione successivamente. Anche se viene dichiarato lo scopo di lavorare sulla memoria semantica (Poli et al., 2006, p. 9), si afferma anche che il modello di apprendimento previsto dal programma prevede "l'attivazione di processi controllati per memorizzare i fatti, preferibilmente (ma non necessariamente) di tipo semantico e di ragionamento" (ibidem, p. 8) e di fatto sembrano comunque essere predilette pratiche di ripetizione di fatti per assicurarne l'automatizzazione. Purtroppo non sembrano essere reperibili studi sull'efficacia di uno strumento di questo tipo.

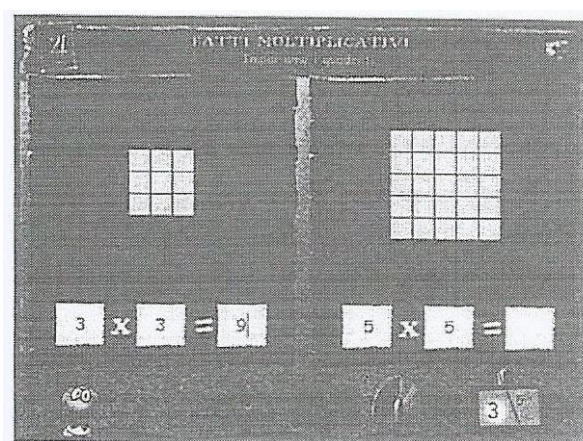


Fig. 3.4.3.3: Rappresentazione spaziale in Memocalcolo. Tratto da (Poli et al, 2007, p. 614)

Il modello rettangolare della moltiplicazione viene impiegato anche da Harries e Barmby (2007) in un programma realizzato con Macromedia Flash. Il programma permette di mostrare una moltiplicazione come schieramento attraverso una rappresentazione in cui gli elementi dello schieramento sono dei piccoli cerchi raggruppati in righe e colonne da cinque elementi (cioè in quadrati da 25 pallini, Fig. 3.4.3.4). Analizzando il comportamento di alcuni bambini che utilizzano il software per calcolare i risultati di alcune moltiplicazioni, notano che

questo tipo di rappresentazione sembra favorire l'uso della proprietà commutativa e della proprietà distributiva (in forma di teoremi in atto). Tuttavia, gli autori mettono in evidenza che la connessione di questa rappresentazione con l'operazione di moltiplicazione già nota ai bambini non è sempre immediato. Alcuni studenti non riconoscono intuitivamente che uno schieramento di n righe e m colonne corrisponde al prodotto $n \times m$ (o viceversa). Ne concludono che quindi questo tipo di rappresentazione non è sempre intuitiva e quindi può richiedere uno specifico insegnamento (Barmby et al, 2009).

Si noti, inoltre, che questo software non è pensato esclusivamente come programma riabilitativo per studenti con disturbi dell'apprendimento ma più in generale come strumento per l'apprendimento della moltiplicazione in modo relazionale (gli autori citano la definizione di Skemp, 1976).

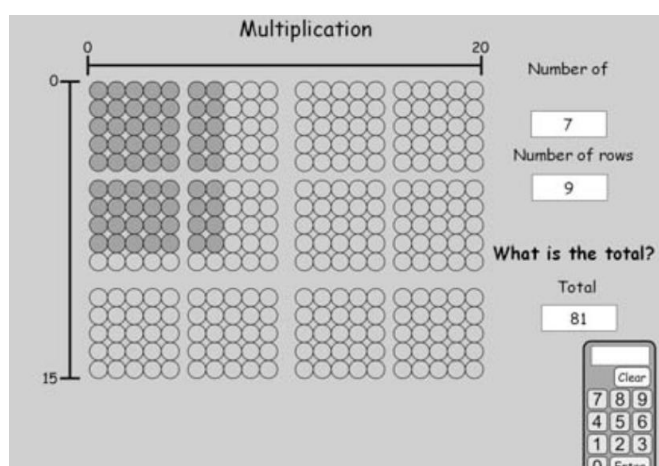


Fig. 3.4.3.4: Screenshot del software di Harries e Barmby (2007).

Recentemente, il Massachusetts Institute of Technology (TERC) e il Office of Digital Learning del MIT hanno sviluppato un programma chiamato *Technology for Mathematical Argumentation* (TMA) in cui la moltiplicazione viene rappresentata attraverso rettangoli quadrettati che possono essere manipolati ruotandoli, dividendoli in parti o “incollandoli” (Mwangi, 2013). Lo scopo di questo strumento virtuale è quello di guidare gli studenti ad argomentare sulle proprietà della moltiplicazione o su uguaglianze numeriche (Fig. 3.4.3.5).

A detta degli sviluppatori, questo software è basato sull'idea di *representation-based proof* riportata da Russel, Schifter e Bastable (2011a). Una *representation-based proof* (dimostrazione basata sulla rappresentazione) è “il mezzo degli studenti di scuola media ed elementare per giustificare le loro affermazioni generali argomentando a partire da rappresentazioni visive” (Russell et al., 2011b, p. 57); si tratta quindi di un caso di *dimostrazione visuale* così come intesa da Dreyfus e colleghi (Dreyfus, Nardi, & Leikin, 2011). Russel e colleghe mostrano come alcuni studenti utilizzino la rappresentazione rettangolare della moltiplicazione per dimostrare che dimezzando un fattore e raddoppiandone un altro il prodotto resta invariato (Russell et al, 2011b).

Più in generale, in diversi lavori viene mostrato che l'uso della rappresentazione rettangolare permette agli studenti di terza, quarta e quinta primaria di argomentare, anche in modo generale, le tre proprietà della moltiplicazione (Schifter, 2009; Russel et al, 2011a-b).

Comportamenti simili sono documentati anche quando gli studenti utilizzano il TMA (Koile & Rubin, 2014).

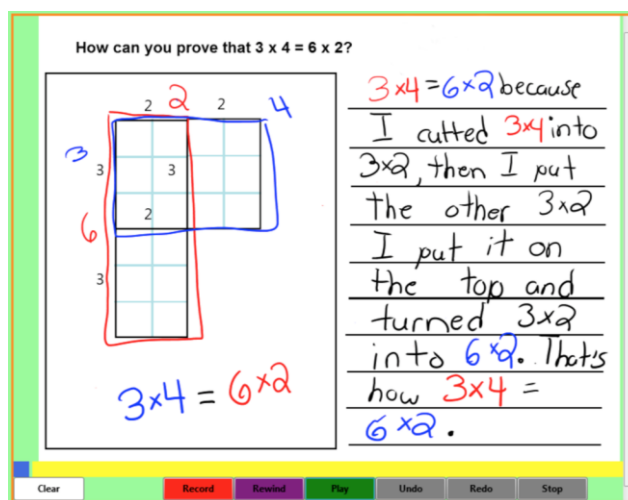


Fig. 3.4.3.5: Screenshot del software TMA. Immagine tratta da <http://tma.mit.edu>

Chiaramente la lista qui presentata non esaurisce tutti gli strumenti didattici che possono essere impiegati nell'apprendimento dei fatti moltiplicativi dato che a questi esempi riportati nella letteratura di ricerca si aggiungono le molteplici intuizioni che non sono state ancora oggetto di studi scientifici. Tuttavia, questi pochi esempi permettono di individuare due dimensioni lungo le quali i diversi approcci possono essere classificati. In prima battuta si nota che esiste della letteratura specificatamente orientata al recupero di abilità per studenti con disturbi dell'apprendimento che si contrappone a un filone di ricerca che propone strumenti pensati per tutta la classe senza esplicitare una particolare attenzione per gli studenti con specifiche difficoltà.

Inoltre, il primo strumento presentato (le Flash Cards) è specificatamente pensato per un'automatizzazione meccanica mentre l'ultimo (il software TMA) è volto all'argomentazione di principi generali sulla moltiplicazione. Gli altri strumenti rappresentano diverse sfumature che stanno fra questi due poli.

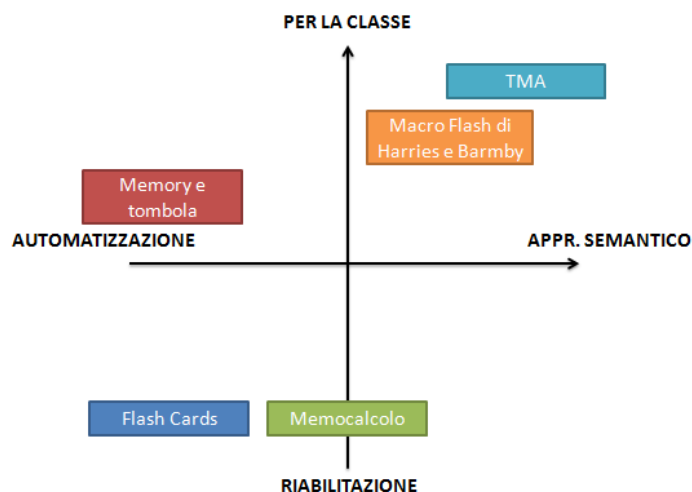


Fig. 3.4.3.6: Classificazione degli strumenti in base al tipo di apprendimento promosso e all'uso.

Appare evidente che in tutti i contesti in cui si vuole promuovere una conoscenza di tipo semantico della moltiplicazione e delle sue proprietà, l'impiego del modello rettangolare della moltiplicazione viene valutato come auspicabile; altri elementi a favore di questa tesi saranno forniti nel capitolo successivo.

4 Scelta dell'artefatto

4.1 Descrizione dell'artefatto

Al termine del primo capitolo (sez. 1.3) si sono messi in evidenza due aspetti ricorrenti nelle memorie degli adulti sull'apprendimento della moltiplicazione:

- le proprietà della moltiplicazione giocano un ruolo importante nella ricostruzione dei fatti non direttamente accessibili. In particolare la proprietà commutativa e quella distributiva sono utilizzate da tutti i soggetti intervistati.
- La tavola pitagorica appare come uno strumento importante nell'organizzazione dei fatti moltiplicativi nella memoria.

Si tratta di un artefatto e di un contenuto disciplinare usuali nella pratica didattica italiana e non, sin da tempi assai lontani. Per esempio, agli inizi del secolo scorso, il matematico francese Charles-Ange Laisant includeva la tavola pitagorica (Fig. 4.1.1) nel suo *Initiation Matématique* (Laisant, 1915) dedicato espressamente alla didattica nella matematica per l'infanzia.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 11.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Lern wol mit fleiß das ein male ein So wirt
dir alle rechnung gemein

Fig. 4.1.1: Tavola pitagorica tratta da (Laisant, 1915, p. 45).

Fig. 4.1.2: Tavole pitagoriche tratte dal testo del XVI sec. *Beilerle und Izbusche h'echrung auffletz Kayfinalschafft* di Johann Widman. Immagine tratta da (Bidwell, 1993, p. 86).

Ovviamente la tavola pitagorica appare in testi che precedono di gran lunga¹⁷ quello di Laisant (Bidwell, 1993; Fig. 4.1.2) ma nell'opera del matematico francese compare, affiancata alla tradizionale tabella, una tavola senza numeri (Fig. 4.1.3). L'autore la descrive così:

Ce qu'il y a d'assez remarquable, par exemple, c'est qu'on pourrait faire une table de multiplication sans écrire un seul chiffre; il suffirait pur cela (fig. 12) d'avoir un papier quadrillé à cases assez petites. La table que nous donnons ici est poussée jusqu'à 10. La construction consiste à porter successivement sur une ligne horizontale 1, 2, 3, ... 10 côtés d'une case, et à marquer les points de division. Puis sur une ligne verticale, en prenant le même point de départ, on fait la même chose; en menant les lignes en traits forts par les points de division, on obtient de grandes cases; et chacune de ces grandes cases contient

¹⁷ Ad oggi, le più antiche tavole pitagoriche risalgono alla civiltà babilonese e sono in base 60. Recentemente è stata scoperta una tavola pitagorica in base 10 trascritta su strisce di bambù. Le strisce, custodite e studiate presso l'università di Pechino risalgono al 305 a.C. (fonte: *Nature*, doi 10.1038/nature.2014.14482)

un nombre de petites qui est précisément celui qui se trouvait tout à l'heure dans notre table en chiffres. La raison de cette identité est simple; car notre table de la fig. 12 ne fa que exécuter graphiquement les opérations qui dans la fig.11 résultent du calcul.¹⁸ (Laisant, 1915, p. 47)

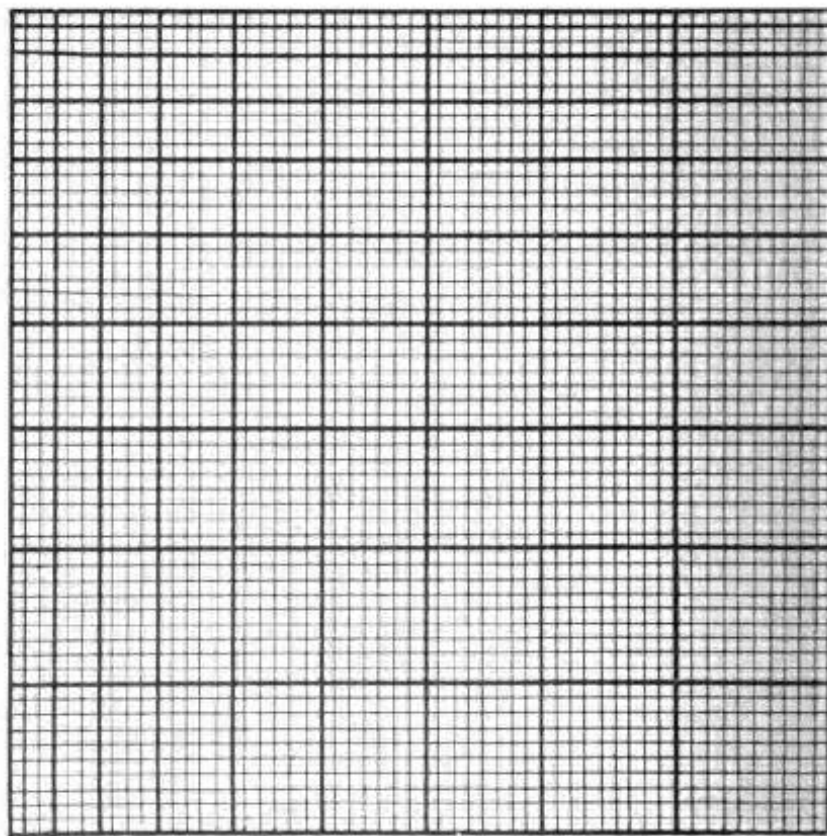


Fig. 12.

Fig. 4.1.3: Tavola pitagorica di Laisant. Immagine tratta da (Laisant, 1915, p. 46).

La tavola pitagorica di Laisant è in pratica costituita da 10 righe e 10 colonne tali che la prima riga abbia altezza pari ad uno, la seconda pari a due e così via. Allo stesso modo la prima colonna ha larghezza di un'unità, la seconda di due, ecc. In questo modo la tabella contiene cento caselle diverse tali che la casella che si trova nella n -esima colonna e nella m -esima riga contenga $n \times m$ quadretti. In questo senso, nella tabella sono mostrate graficamente le moltiplicazioni della tavola pitagorica. L'evidente differenza è che, diversamente dalle usuali tavole pitagoriche, in questa tavola, per ciascuna moltiplicazione, non è rappresentato soltanto il risultato (superficie della casella) ma anche i fattori (dimensioni della casella) in modo ordinato.

¹⁸ Una cosa degna di nota, per esempio, è che potremmo fare una tabella della moltiplicazione senza scrivere una sola cifra; sarà sufficiente avere un foglio di carta con una quadrettatura piuttosto piccola (fig. 12). La tabella qui proposta arriva fino a 10. La costruzione consiste nel segnare in successione su una linea orizzontale 1, 2, 3 ... 10 quadretti e segnare i punti di divisione. Poi su una linea verticale, con la stessa origine, facciamo la stessa cosa; tracciando le linee più marcate a partire dai punti di divisione, si ottengono le caselle grandi; e ciascuna di queste caselle contiene un gran numero di quadretti, che corrispondono ai numeri della nostra tabella [la tavola pitagorica]. La ragione di questa identità è semplice; perché la nostra tabella di fig. 12 non fa altro che eseguire graficamente le operazioni che nella fig.11 risultano dal calcolo.

Questa differenza di rappresentazione si traduce in alcuni vantaggi dal punto di vista epistemologico, cognitivo e didattico. Tali vantaggi sono analizzati nelle successive sezioni di questo capitolo.

Da qui in avanti, si farà riferimento alla tavola pitagorica mostrata in Fig. 4.1.3 col nome di *Tavola di Laisant*¹⁹. Di fatto, non si è riscontrata la presenza di questo tipo di rappresentazione della tavola pitagorica in testi precedenti a quello sopra-citato. Tuttavia, appare plausibile che il matematico francese si sia ispirato alle tavole utilizzate da Pestalozzi per la didattica dell'aritmetica (e.g. Pestalozzi, 1980; Fig. 4.1.4). Infatti, fra queste, compare una tavola finalizzata a rappresentare il prodotto fra due frazioni unitarie attraverso suddivisioni successive dei lati di quadrati congruenti (Fig. 4.1.5).

4.2 Aspetti epistemologici

4.2.1 Cenni storici sull'aritmetica-geometrica

Nel capitolo 1 si è mostrato come gli adulti intervistati associno alla moltiplicazione fra numeri naturali situazioni del tipo *isomorfismi di misure* (Vergnaud, 1983) piuttosto che *prodotti di misure* (ibidem). Inoltre, si è messo in evidenza che il modello dell'isomorfismo di misure – in particolare la moltiplicazione intesa come addizione ripetuta – è un modello primitivo (cfr. cap. 3; Fischbein et al, 1985). A partire dall'aritmetica di Peano (cfr sez. 4.2.2), questo modello appare come universalmente accettato, ma se si procede a ritroso nel tempo, si può notare che non è sempre stato così. Si consideri, per esempio, la proposizione 1 del secondo libro degli Elementi di Euclide:

Qualora siano due rette, e l'una o l'altra di esse sia secata in quanti mai si voglia segmenti, il rettangolo compreso dalle due rette è uguale ai rettangoli compresi dalla retta non secata e da ciascuno dei segmenti. (Acerbi, 2007)

Anche attraverso la lettura della dimostrazione di questa proposizione, è possibile inferire che le parole sopra-riportate significano che l'area di un rettangolo è pari alla somma delle aree dei rettangoli che condividono con questo una dimensione e le cui altre dimensioni, sommate, corrispondono all'altra dimensione del rettangolo.

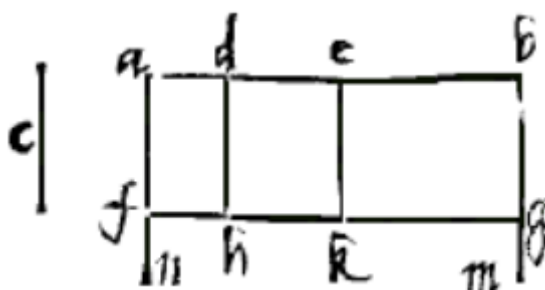


Fig. 4.2.1.1: Figura inserita a fianco della proposizione 1 del libro 2 della versione degli Elementi realizzata da Tartaglia (1565).

¹⁹ Chiaramente questo lavoro non è l'unico in cui viene fatto uso di tale tavola. Altri autori utilizzano denominazioni diverse. Si vedano per esempio Millan Gasca (2016) oppure Bruscalioni et al (2000).

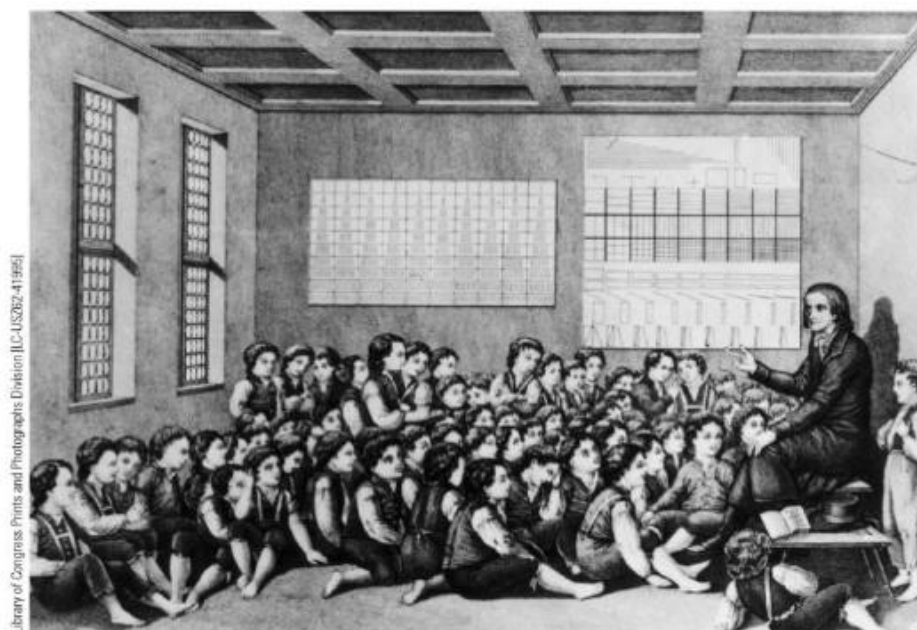


Fig. 4.1.4: Pestalozzi insegna nell'istituto di Burgdorf, Svizzera. Alla parete sono appese le sue tavole.

Figs *Tab. 3.*

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

Fig. 4.1.5: Tavola di Pestalozzi per il prodotto fra frazioni unitarie. Immagine tratta da (Chavannes, 1809, p. 208) citato in (Costa, 2014).

Facendo riferimento alla figura che Niccolò Tartaglia (1565) riporta nella sua versione degli Elementi (Fig. 4.2.1.1) si può scrivere questa relazione per mezzo della moderna simbologia aritmetico-algebrica come

$$af \cdot ab = af \cdot ad + af \cdot de + af \cdot eb$$

In pratica Euclide enuncia la proprietà distributiva facendo uso del modello rettangolare. Lo stesso avviene spesso nel secondo libro, le cui “prime 10 proposizioni su 14 possono essere viste come identità algebriche provate per via geometrica” (Charbonneau, 1996, p. 17). Ogni volta che viene fatto riferimento a quella che oggi leggiamo come operazione di moltiplicazione, il matematico ellenistico parla di rettangoli. In sintesi, il modello rettangolare è *il modello* di moltiplicazione adottato da Euclide.

The use of equalities in Euclid's *Elements* is characterized by a non-numerical environment. Magnitudes are compared, but not their measures. There are operations on those magnitudes, operations like “putting together” and “obtaining a rectangle with two given sides”. We may then speak of an “arithmetic” of magnitudes by analogy to the arithmetic of number.²⁰ (ibidem, p. 19).

Questo tipo di interpretazione è corroborato dal modo in cui proposizioni come quella mostrata precedentemente sono poi applicate negli stessi Elementi o in opere successive²¹: “in quasi tutte le applicazioni si nota che linee, quadrati, rettangoli e parallelogrammi non sono coinvolti, lo sono invece le loro dimensioni, i “quadrati” [nel senso di elevamento alla seconda potenza], i prodotti” (Freudenthal, *What is Algebra and What has it been in History?*, 1977, p. 190). Katz e Barton (2007) arrivano a sostenere che fino all'epoca ellenistica l'algebra stessa è in uno stadio “geometrico”.

Sino alla seconda metà del XIX secolo, gli Elementi di Euclide sono stati il prototipo della teoria matematica, il linguaggio di questa raccolta di libri era il linguaggio universale della matematica (Freudenthal, 1977); quindi le dimostrazioni si sono basate sul modello geometrico di stampo euclideo anche nell'ambito aritmetico-algebrico. Se ne trovano esempi nelle giustificazioni dei metodi di risoluzione delle equazioni del matematico Al-Khwarizmi (IX sec.), in quelli di Bhaskara (XIII sec.) così come nelle proposte di Cardano nel XVI sec. (Charbonneau, 1996).

Con questa affermazione non si vuole intendere che la moltiplicazione abbia avuto le sue origini attraverso il modello rettangolare. Di fatto questa affermazione è facilmente falsificabile notando che nel papiro di Rhind, risalente circa al 1650 a.C., sono proposti metodi additivi iterativi per determinare il risultato di moltiplicazioni (Gillings, 1972). Si vuole invece sostenere che il modello rettangolare per la moltiplicazione ha permeato per lungo tempo la matematica occidentale (e non solo), è parte integrante dello sviluppo del pensiero deduttivo e quindi tassello fondamentale della nostra cultura matematica così come è oggi. Riferendosi

²⁰ L'uso di uguaglianze negli *Elementi* di Euclide è caratterizzato da un ambiente non-numerico. Le grandezze sono confrontate, non le loro misure. Ci sono operazioni su queste grandezze, operazioni come “mettere insieme” e “ottenere un rettangolo con due lati dati”. Possiamo quindi parlare di un' “aritmetica” delle grandezze in analogia con l'aritmetica del numero.

²¹ Alcuni esempi possono essere trovati nei *Data* di Euclide e sono citati in (Freudenthal, 1977).

al legame fra algebra (come meta-aritmetica) e geometria, Katz e Barton (2007) sostengono che:

experiencing multiple uses for numbers and mathematical objects, and multiple ways of representing and describing them, as happened throughout the long history of numbers is essential if sufficient practice at generalization and abstraction are to be achieved.²² (p. 199)

Questo è apertamente in linea con l'idea di sviluppo del senso dell'operazione presentata nel capitolo 3 (cfr. Slavit, 1999). Pertanto, il primo vantaggio nell'uso della tavola di Laisant consiste nella possibilità di avere un artefatto che "incorpora" un modello di moltiplicazione che è parte integrante nello sviluppo storico dell'aritmetica sebbene non così praticato nella didattica attuale. Nella più moderna ristrutturazione dei fondamenti della matematica, i modelli iterativi sembrano aver preso il sopravvento; tuttavia è possibile rileggere la rappresentazione della moltiplicazione attraverso rettangoli anche nell'ottica della matematica moderna. Questo sarà fatto nella sezione successiva.

4.2.2 Aspetti logici

Nella sezione 3.4.1 si sono catalogati diversi modelli per l'operazione di moltiplicazione raggruppando le diverse casistiche evidenziate dalla letteratura in tre macro-gruppi: modelli iterativi, modelli rettangolari e modelli di proporzionalità. Quest'ultima categoria sembra non prestarsi per una prima introduzione alla moltiplicazione in quanto è necessario far riferimento a due spazi di misura (cfr. Vergnaud, 1983); nelle altre due tipologie è sufficiente far riferimento ad unico spazio. Fra le altre due tipologie, i modelli iterativi sono quelli generalmente più adottati nella pratica didattica.

Il prototipo di tutti i modelli iterativi è sicuramente quello fornito da Peano nella sua aritmetica (Peano, 1889). Nel definire l'insieme dei numeri naturali (N), Peano elenca nove assiomi che, oltre a quelli che identificano l'uguaglianza fra numeri naturali come relazione di equivalenza, comprendono i seguenti:

- $\exists 0 \in N$
- $\forall x \in N, \exists x^{+1}$
- $\forall x, y \in N, x \neq y \rightarrow x^{+1} \neq y^{+1}$
- $\nexists x \in N \text{ t. c. } x^{+1} = 0$
- $\forall A \subseteq N \text{ t. c. } 0 \in A \text{ e } (x \in A \rightarrow x^{+1} \in A), A = N.$

Peano postula innanzitutto l'esistenza di un elemento di partenza, che qui è indicato con lo zero (anche se nell'opera originale si inizia da 1). Successivamente definisce l'operazione 'successivo' e le sue proprietà. Infine indica il *principio di induzione* fra i postulati che definiscono l'insieme dei naturali. A partire da questi assiomi è possibile definire in modo ricorsivo l'operazione di addizione calcolando la somma di un numero con il successivo di un altro numero come il successivo della somma tra i due numeri:

²² Fare esperienza di usi multipli dei numeri e degli oggetti matematici, e di multipli modi di rappresentarli e descriverli, così come è successo nel corso della lunga storia dei numeri è essenziale se si vuole raggiungere una pratica sufficiente nella generalizzazione e nell'astrazione.

- $\forall x \in N, x + 0 = x$
- $\forall x, y \in N, x + y^{+1} = (x + y)^{+1}$

Allo stesso modo, Peano arriva a definire la moltiplicazione fra numeri naturali per iterazione sull'operazione di somma. Anche in questo caso è sufficiente specificare il caso dello zero e quindi indicare il prodotto fra un numero e il successivo di un altro.

- $\forall x \in N, x \cdot 0 = 0$
- $\forall x, y \in N, x \cdot y^{+1} = x \cdot y + x$

Fra i modelli di tipo rettangolare presentati nella sezione 3.4.1, è stata inclusa quella che Vest chiama moltiplicazione per prodotto cartesiano, ovvero $a \times b$ è "la cardinalità del prodotto cartesiano degli insiemi A e B dove la cardinalità di A è a e la cardinalità di B è b " (Vest, 1971, p.223). Nel dettaglio, presi due insiemi A e B, il loro *prodotto cartesiano* è l'insieme di tutte le coppie ordinate che possono essere formate prendendo un elemento da ciascun insieme, ovvero:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Per poter applicare questa definizione ai numeri naturali, è utile definire i numeri stessi a partire dagli insiemi. Si assumano gli assiomi di Zermelo-Fraenkel²³, definiamo i numeri naturali, per via ricorsiva, identificando lo zero con l'insieme vuoto (la cui esistenza è postulata) e l'operazione 'successivo' con l'unione di un insieme col singoletto che ha per unico elemento l'insieme stesso:

- $0 = \emptyset$
- $x^{+1} = x \cup \{x\}$

Così, l'insieme successivo a 0 contiene un solo elemento, quello successivo ne contiene due e così via. In questo senso, ogni numero rappresenta la cardinalità dell'insieme che lo definisce. In generale, si può dire che la cardinalità di un insieme è un dato numero naturale n se esiste una funzione biunivoca fra l'insieme ed n , definito come sopra. Fatte queste premesse, si può esplicitare il modello di moltiplicazione come prodotto cartesiano (Vest, 1971) definendo l'operazione di moltiplicazione (*) come segue:

$$\forall x, y \in N, x * y = |x \times y|$$

Le due linee verticali sono utilizzate per denotare la cardinalità dell'insieme. Anche la definizione di moltiplicazione data da Peano continua a essere valida, di fatto gli assiomi di Peano sono deducibili dalla definizione dell'insieme dei numeri naturali appena data. Pertanto questa definizione dei numeri naturali permette di mettere a confronto le due definizioni di moltiplicazione. Innanzitutto si può notare che le due definizioni sono del tutto equivalenti,

²³ Gli assiomi di Zermelo-Fraenkel sono un insieme di nove assiomi (a cui si aggiunge eventualmente l'assioma della scelta) attualmente riconosciuti come fondamento della teoria degli insiemi moderna. Fra questi, gli assiomi che postulano l'esistenza dell'insieme vuoto e dell'insieme unione. Questo elenco di assiomi è stato riportato nella sua interezza per la prima volta da Thoralf Skolem nel 1922 (van Heijenoort, 1967).

ovvero che presi due numeri naturali qualsiasi, entrambe le operazioni associano a questi lo stesso numero naturale.

Proposizione 0 $\forall x, y \in N, |x \cdot y| = |x \times y|$

Dimostrazione Si definisca $f: x \cdot y \rightarrow x \times y$ t.c. $f(n) = (q, r)$ dove q e r sono tali che $n = q \cdot y + r$ e $r < y$. Questa funzione è banalmente invertibile, il numero più grande che può essere generato dall'inversa è $n = (x - 1) \cdot y + (y - 1) = x \cdot y - 1 \in x \cdot y$. La funzione è anche iniettiva, infatti siano n e m tali che $f(n) = f(m)$ allora $n = q \cdot y + r$ ma anche $m = q \cdot y + r$ quindi $n = m$.

Si osservi che questa dimostrazione si basa sul teorema di unicità di quoziente e resto nella divisione Euclidea senza il quale la funzione definita nella dimostrazione non sarebbe una funzione. Se non si vuole far uso di tale teorema, è possibile ottenere un'altra dimostrazione utilizzando il principio di induzione. Per farlo, è utile definire l'operazione di sottrazione come inversa dell'addizione, quindi si dirà che $a - b = c$ se e soltanto se $c + b = b + c = a$. Occorre inoltre definire l'insieme differenza: sia B un sottoinsieme di A , allora si definisce l'insieme differenza $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$. Inoltre, sono necessari i seguenti lemmi.

Lemma 1 Sia $B \subseteq A$ allora $|A \setminus B| = |A| - |B|$

Dimostrazione Sia $|A \setminus B| = n$ allora, per definizione di cardinalità, $\exists f: A \setminus B \rightarrow n$ biunivoca. Sia $|B| = m$ allora $\exists g: B \rightarrow m$ biunivoca.

Si definisce $h: A \rightarrow n + m$ tale che $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \setminus B \\ n + g(x) & \text{se } x \in B \end{cases}$

Si dimostra che h così definita è biunivoca.

Siano $x, y \in A$ allora se $x, y \in B$ $h(x) \neq h(y)$ per la biunivocità di g . Lo stesso vale se i due elementi appartengono entrambi all'insieme differenza. Siano quindi $x \in A \setminus B, y \in B$, allora $h(x) = f(x) < n$ mentre $h(y) = n + g(y) \geq n$. Quindi h è iniettiva.

La suriettività è garantita dal fatto che h è invertibile attraverso la funzione $h^{-1}: n + m \rightarrow A$,

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & \text{se } x < n \\ g^{-1}(x) - n & \text{se } x \geq n \end{cases}$$

Pertanto h è biunivoca e quindi $|A| = n + m = |A \setminus B| + |B|$ ovvero il lemma è dimostrato.

Lemma 2 $|n \times m^{+1}| = |n \times m| + n$

Dimostrazione $n \times m^{+1} \setminus n \times m = \{(x, m) | x \in n\}$. Attraverso $f: n \times m^{+1} \setminus n \times m \rightarrow n$ tale che $f((x, m)) = x$ si verifica che $n \times m^{+1} \setminus n \times m$ è isomorfo a n . Quindi $n = |n \times m^{+1} \setminus n \times m| = |n \times m^{+1}| - |n \times m|$ da cui segue la tesi per definizione dell'operazione di sottrazione.

Proposizione 0-bis $\forall x, y \in N, x \cdot y = x * y$.

Dimostrazione Siano $x, y \in N$. Se $y = 0$ allora $x \cdot 0 = 0 = |x \times 0| = x * 0$. Valga $x \cdot y = x * y$ allora $x \cdot y^{+1} = x \cdot y + x = x * y + x = |x \times y| + x = |x \times y^{+1}| = x * y^{+1}$. Per induzione segue quindi la tesi.

Adesso che si è dimostrata l'equivalenza fra le due, vista la rilevanza che si vuole dare alle proprietà della moltiplicazione, ci si chiede quali differenze ci siano nel dimostrare tali proprietà se si adotta una definizione oppure l'altra.

Si consideri la *proprietà commutativa*: si vuole dimostrare che $n \cdot m = m \cdot n$ e anche che $n * m = m * n$.

Proposizione 1 $n \cdot m = m \cdot n$

Dimostrazione Innanzitutto, si vuole dimostrare la proposizione nel caso in cui $m=0$. Per definizione vale $n \cdot 0 = 0$. Resta da dimostrare che $\forall n, 0 \cdot n = 0$. Per farlo si ricorre a un'induzione.

Se $n = 0$ allora $0 \cdot 0 = 0$ per definizione. Per ipotesi induttiva, valga $0 \cdot n = 0$ allora $0 \cdot n^{+1} = 0 \cdot n + 0 = 0 + 0 = 0$.

Per il principio di induzione è quindi vero che $\forall n, 0 \cdot n = 0 = n \cdot 0$. Si è così dimostrata la proposizione nel caso in cui $m=0$.

Dimostrato il caso in cui $m=0$, passiamo adesso al passo induttivo. Per ipotesi induttiva, valga $n \cdot m = m \cdot n$. Per definizione vale $n \cdot m^{+1} = n \cdot m + n$.

Inoltre, si può dimostrare per induzione che $m^{+1} \cdot n = m \cdot n + n$. Infatti, nel caso in cui $n=0$, $m^{+1} \cdot 0 = 0 = m \cdot 0 + 0$. Se assumiamo l'ipotesi induttiva $m^{+1} \cdot n = m \cdot n + n$ allora $m^{+1} \cdot n^{+1} = m^{+1} \cdot n + m^{+1} = m \cdot n + n + m^{+1} = m \cdot n + (n + m)^{+1} = m \cdot n + n^{+1} + m = m \cdot n + m + n^{+1} = m \cdot n^{+1} + n^{+1}$.

Dato che abbiamo assunto per ipotesi induttiva che $n \cdot m = m \cdot n$, vale $n \cdot m^{+1} = n \cdot m + n = m \cdot n + n = m^{+1} \cdot n$. La proposizione è così dimostrata.

Si noti che si sono sfruttate la commutatività e l'associatività della somma, qui non dimostrate ma verificabili applicando il principio di induzione alla definizione di somma riportata sopra.

Proposizione 2 $n * m = m * n$

Dimostrazione Definiamo la funzione $f: n \times m \rightarrow m \times n$
 $(x, y) \rightarrow (y, x)$.

f è iniettiva dato che se $(a, b) \neq (c, d)$ allora $a \neq c$ e $b \neq d$ e quindi $(b, a) \neq (d, c)$.

f è anche suriettiva perché la funzione $f^{-1}: m \times n \rightarrow n \times m$
 $(y, x) \rightarrow (x, y)$ associa ad ogni elemento di $m \times n$ un elemento di $n \times m$.

Quindi i due insiemi hanno la stessa cardinalità, ovvero $n * m = |n \times m| = |m \times n| = m * n$.

In sintesi, la dimostrazione della commutatività nel caso del modello iterativo richiede l'applicazione di quattro induzioni, annidate una dentro l'altra. Nel caso del modello del prodotto cartesiano invece è sufficiente applicare una funzione che scambia l'ordine degli

elementi delle coppie di $n \times m$. Se si associa il modello del prodotto cartesiano a quello rettangolare, la trasformazione realizzata dalla funzione f utilizzata nella dimostrazione può essere pensata come una rotazione del rettangolo che rappresenta $n \times m$ attraverso la quale si ottiene proprio il rettangolo che rappresenta $m \times n$ (Fig. 4.2.2.1).

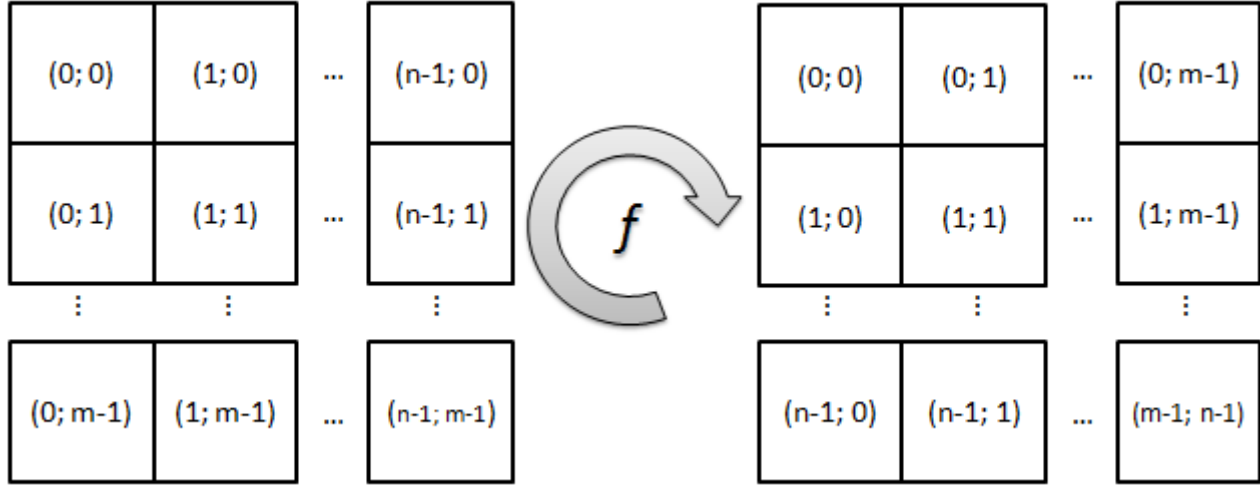


Fig. 4.2.2.1: Rappresentazione della dimostrazione della proposizione 2 mediante modello rettangolare.

Andiamo adesso a considerare la *proprietà distributiva* del prodotto sulla somma. Si vuole quindi dimostrare che $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ma anche che $a * (b + c) = a * b + a * c$.

Proposizione 3 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Dimostrazione Sia $a = 0$, allora $0 \cdot (b + c) = 0$ ma anche $0 \cdot b + 0 \cdot c = 0 + 0 = 0$.

Assumiamo, per ipotesi induttiva, che sia vero $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

$a^{+1} \cdot (b + c) = a \cdot (b + c) + (b + c) = a \cdot b + a \cdot c + b + c = a \cdot b + b + a \cdot c + c = a^{+1} \cdot b + a^{+1} \cdot c$. Per il principio di induzione, la proposizione è quindi dimostrata.

Proposizione 4 $a * (b + c) = a * b + a * c$

Dimostrazione $a * (b + c) = |a \times (b + c)|$. Si osservi che $a \times b \subseteq a \times (b + c)$ dato che $b < b + c$ e quindi tutte le coppie che hanno per secondo elemento un elemento di b appartengono a entrambi gli insiemi prodotto. Si osserva che $a \times c$ è isomorfo ad $a \times (b + c) \setminus a \times b$ attraverso la funzione $f((x, y)) = (x, y + b)$ che è banalmente iniettiva ed è suriettiva perché la funzione $f^{-1}((x, y)) = (x, y - b)$ applicata su tutto $a \times (b + c) \setminus a \times b$ ha come immagine tutto $a \times c$.

Per il Lemma 1, $|a \times (b + c) \setminus a \times b| = |a \times (b + c)| - |a \times b|$ ma si è appena visto che vale anche $|a \times (b + c) \setminus a \times b| = |a \times c|$. Dalla transitività dell'uguaglianza si ottiene quindi che $|a \times c| = |a \times (b + c)| - |a \times b|$, il che, per definizione dell'operazione di sottrazione, equivale a dire $|a \times (b + c)| = |a \times b| + |a \times c|$, ovvero la tesi.

Differentemente da quel che avveniva per la proprietà commutativa, la dimostrazione della proprietà distributiva è più laboriosa nel caso del modello del prodotto cartesiano rispetto a

quello iterativo. Questo è dovuto al fatto che la proprietà distributiva è in qualche modo “contenuta” nella definizione stessa di moltiplicazione iterativa. Invece, nel caso del prodotto cartesiano si è utilizzata l’operazione di sottrazione sugli insiemi, il che complica l’apparato teorico necessario per arrivare alla dimostrazione. Questa complicazione permette però di ottenere un notevole vantaggio nella dimostrazione della proprietà distributiva (proposizione 4) in quanto tutta la dimostrazione consiste nel definire due funzioni f e f^{-1} che, rilette nel modello rettangolare, non sono altro che le operazioni di “incollare” e “tagliare” rettangoli (Fig. 4.2.2.2). D’altra parte, si può notare che utilizzando il risultato ottenuto nel Lemma 2, è possibile seguire i passaggi utilizzati nella dimostrazione della proposizione 3 per dimostrare la proposizione 4. Si passerebbe quindi dall’uso del principio di induzione.

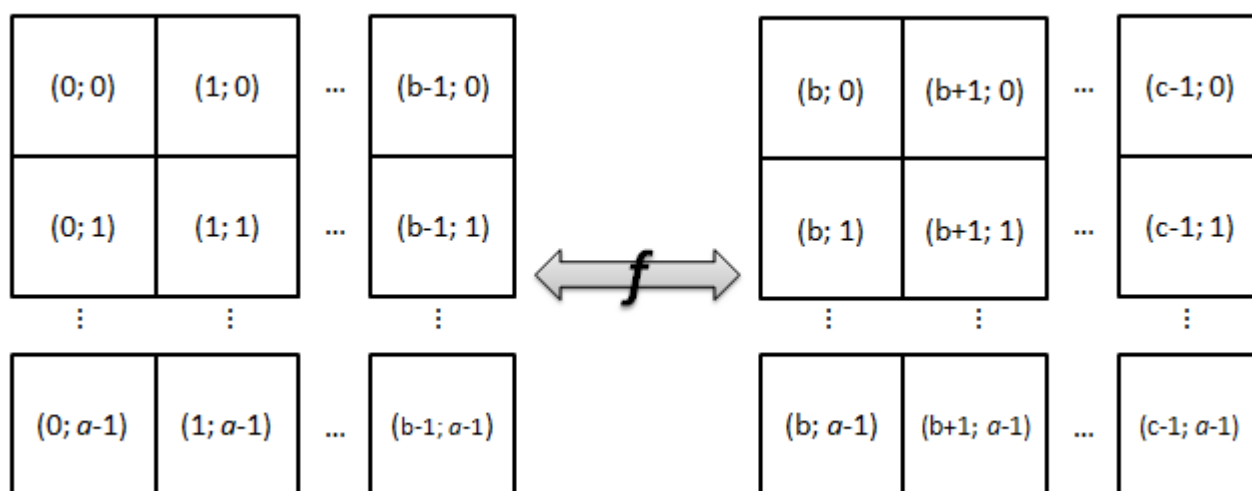


Fig. 4.2.2.1: Rappresentazione della dimostrazione della proposizione 4 mediante modello rettangolare.

Si può notare una sostanziale differenza fra le due definizioni. Quella dell’aritmetica di Peano, facendo uso di una definizione ricorsiva, richiede il principio di induzione (eventualmente anche applicato più volte) per poter dimostrare queste due proprietà. Nel caso della moltiplicazione per prodotto cartesiano si può decidere se far ricorso a questo principio oppure no.

Alcuni autori (Harel, 2002; Pedemonte, 2007) sottolineano l’importanza di passare per la generalizzazione di processi piuttosto che di risultati per riuscire ad arrivare a dimostrazioni per induzione matematica. In particolare, Harel (2002) introduce il termine *quasi-induzione* per riferirsi al caso in cui lo studente riesce a dimostrare il teorema per un caso particolare n e, a partire da questo risultato, lo dimostra anche per $n+1$. Secondo l’autore, questo tipo di processo può essere un primo passo verso la dimostrazione per induzione. Pertanto, si potrebbe ipotizzare che un primo avvio alle proprietà della moltiplicazione iterativa possa passare attraverso la presentazione di quasi-induzioni. Prendiamo il caso della proprietà commutativa: può non essere difficile verificare che $5 \times 2 = 2 \times 5$ calcolando che $5 + 5 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$. Una volta ottenuto questo risultato, ci si potrebbe convincere della veridicità della proprietà dimostrando che $5 \times 3 = 3 \times 5$ partendo proprio da $5 \times 2 = 2 \times 5$. La procedura così applicata permetterebbe infatti di andare avanti nel dimostrare proposizioni del tipo $5 \times n = n \times 5$.

Tuttavia, dimostrare che $5 \times 3 = 3 \times 5$ partendo da $5 \times 2 = 2 \times 5$ non è banale. Infatti, per passare da 5×2 a 5×3 è sufficiente aggiungere 5 ma la relazione che lega 2×5 a 3×5 è data dalla proprietà distributiva: $3 \times 5 = 2 \times 5 + 1 \times 5$. Ovvero, se immaginiamo 2×5 come cinque insiemi da 2 oggetti ciascuno, sarà necessario aggiungere 1 oggetto a ognuno dei cinque insiemi per passare alla rappresentazione di 3×5 .

La quasi-induzione sarebbe di questo tipo: $5 \times 2 = 2 \times 5$ e quindi $5 \times 2 + 5 = 2 \times 5 + 5$ ovvero $5 \times 2 + 5 = 2 \times 5 + 1 \times 5$ e quindi, applicando la proprietà distributiva al membro di destra, si ha $5 \times 3 = 3 \times 5$. In pratica, per poter giustificare la proprietà commutativa alla sua prima introduzione, sarebbe necessario passare prima per la distributiva. Questo è logicamente possibile, dato che la dimostrazione della proprietà distributiva non richiede la commutativa, tuttavia non appare una pista percorribile dal punto di vista didattico. Di fatto, in letteratura è mostrato che, pur conoscendo il modello iterativo della moltiplicazione, gli studenti incontrano notevoli difficoltà nell'applicare questa proprietà anche al termine della scuola primaria (Larsson, 2015).

Usando la definizione data attraverso il prodotto cartesiano, non è mai necessario far ricorso al principio di induzione (sebbene possibile). Tuttavia, questa seconda definizione richiede di svolgere delle operazioni non solo su N o sui suoi elementi ma sui prodotti cartesiani dei suoi elementi. Si noti inoltre che si è fatto largo uso di funzioni ossia di trasformazioni. Queste trasformazioni sono traducibili in azioni su rettangoli: come visto in precedenza (Figg. 4.2.2.1 e 4.2.2.2), coincidono con la rotazione di un rettangolo (per la proprietà commutativa) e con il taglio/incollaggio di una parte di rettangolo (nel caso della proprietà distributiva). Pertanto un secondo vantaggio nell'uso del modello rettangolare è la possibilità di tradurre possibili giustificazioni per le proprietà in azioni da effettuare direttamente su rettangoli; eventualmente anche concreti.

4.3 Aspetti cognitivi

Nella tavola di Laisant, ogni casella rappresenta varie “facce” di una moltiplicazione: le dimensioni della casella sono i fattori mentre il numero di quadretti contenuti nella casella ne rappresenta il risultato. Il numero e l'operazione non sono quindi rappresentati attraverso l'usuale simbolismo aritmetico ma con una quantità discreta di quadratini (per il risultato) e con segmenti di diversa lunghezza (per i fattori). Usando la terminologia del *modello del triplo codice* (Dehaene, 1992), si tratta di rappresentazioni *analogiche*. Secondo questo modello, i numeri sono processati dal cervello umano secondo tre diversi codici, ciascuno in relazione con l'altro: formato visuale nel codice arabico (intendendo la scrittura in cifre), formato verbale a parole e rappresentazione analogica (Fig. 4.3.1).

Seguendo questo modello, le diverse consegne numeriche che le persone sono in grado di portare a termine si basano sulla lettura dei numeri in uno di questi codici, il processamento dell'informazione nello stesso codice o attraverso una transcodifica e quindi la resa di un output in uno di questi codici. Un impedimento nella gestione di uno dei codici oppure nella transcodifica da un codice all'altro risulta nella difficoltà a portare a termine uno specifico compito. Questo assunto è stato messo a confronto con numerosi risultati sperimentali

ottenuti da diversi autori analizzando pazienti con danni cerebrali in particolari aree del cervello (che risultano in specifici impedimenti) oppure attraverso diverse tecniche di neuro-imaging (Dehaene & Cohen, 1995).

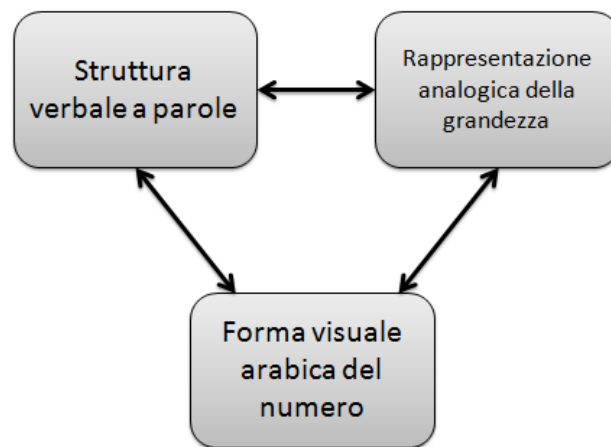


Fig. 4.3.1: Rappresentazione schematica del modello del triplo codice.

Relativamente alla rappresentazione analogica, gli autori affermano che è l'unica rappresentazione che si trova sul livello semantico, mentre gli altri due codici sono da considerarsi puramente sintattici. In particolare il codice analogico sarebbe quello a cui si fa riferimento per mettere a confronto quantità, ovvero per fare riferimento alla grandezza (magnitude) del numero. Tali grandezze possono essere rappresentate come una sorta di linea dei numeri mentale su cui le quantità sono rappresentate attraverso una distribuzione locale di attivazione. Le relazioni fra i numeri sono implicitamente rappresentate sia dalla distanza tra picchi di attivazione sia dalla sovrapposizione di distribuzioni di attivazione; le rappresentazioni di numeri più grandi sono meno precise (Dehaene, 1992). “Quando un insieme di oggetti visuali o uditivi viene presentato, la sua numerosità può essere ricavata direttamente e rappresentata sulla ‘linea dei numeri’ attraverso processi dedicati di subitizing e stima” (Dehaene & Cohen, 1995, p. 86).

A favore dell'esistenza di un processamento analogico del numero, Dehaene e colleghi (1990) mostrano che per stabilire quale fra due numeri sia maggiore, è necessario meno tempo quando i due numeri sono molto distanti. Viceversa, il tempo richiesto aumenta all'avvicinarsi dei numeri. Per mettere in evidenza che l'effetto non dipende dalla codifica simbolica del numero, gli autori forniscono i numeri dando le decine e le unità separatamente, variando anche l'ordine di presentazione. Mostrano che non ci sono differenze significative nei tempi di risposta dovute alla modalità di presentazione ma solo alla distanza fra i numeri (ibidem).

Altre evidenze a favore del processamento analogico sono riportate da Dehaene e Cohen (1991). Questi ricercatori mostrano uno studio di caso su un paziente afasico con discalculia acquisita. Il paziente dimostra gravissime difficoltà nella determinazione del risultato esatto di semplicissime addizioni; tuttavia, è in grado di determinare se a un'operazione viene associato un risultato diverso da quello corretto quando questi due numeri sono molto distanti fra loro. Gli autori ne concludono che il danno cerebrale del paziente compromette soltanto il processamento simbolico del numero ma non quello analogico.

Nel modello del triplo codice iniziale (ovvero quello presentato in Dehaene, 1992) i fatti aritmetici non sono messi in relazione con la rappresentazione analogica del numero, ma solo con quella fonologica. Tuttavia, Whalen e colleghi (2002) descrivono casi di pazienti con gravissime difficoltà nel leggere ad alta voce i numeri che però sono in grado di richiamare fatti moltiplicativi per rispondere a domande scritte in simboli. Questo risultato quindi dimostra che la memoria per i fatti moltiplicativi non è solo di tipo fonologico ma anche gli altri codici possono essere mobilitati. Pertanto il processamento dei fatti aritmetici è stato reinterpretato nel modello del triplo del codice.

Secondo Dehaene e Cohen (1995) si possono distinguere quattro diversi livelli di complessità per le operazioni. Il primo livello consiste nel calcolo di fatti aritmetici molto semplici (come $2 \times 3 = 6$) che sono richiamati direttamente dalla memoria, non necessariamente in forma solo fonologica. Per il secondo livello invece è necessaria una prima elaborazione semantica prima dell'accesso alla memoria. Di fatto

quando si trovano di fronte a fatti non noti o non richiamabili, i soggetti possono far ricorso a strategie diverse dal richiamo dalla memoria [...] Queste strategie di ricostruzione richiedono ovviamente una buona comprensione delle quantità coinvolte nel problema originale (per es. notare che 9 è vicino a 10) [...] In particolare, l'accesso a una rappresentazione delle grandezze può permettere di filtrare i risultati grossolanamente falsi come nel caso della confusione fra operazioni (per es. $5 + 6 = 30$). (Dehaene & Cohen, 1994, p. 102)

La differenza fra questi due livelli è dovuta a una differenza nel processamento del numero, confermata da alcune osservazioni su pazienti. In particolare Cohen e Dehaene (1994) mostrano il caso di una paziente in grado di effettuare ogni genere di transcodifica fra codici di rappresentazione e in grado di svolgere ogni forma di calcolo ma con fortissime difficoltà a richiamare risultati di fatti aritmetici direttamente dalla memoria. Hittmair-Delazer e colleghi (1994) documentano un paziente con difficoltà nel richiamo diretto di fatti aritmetici ma in grado di calcolare 4×9 sia come $9 \times 2 + 9 \times 2$ sia come $90 : 2 - 9$.

Per quanto riguarda i livelli di complessità successivi, questi riguardano le operazioni con più cifre e quindi vanno oltre il richiamo di semplici fatti aritmetici.

In sintesi, i risultati qui riportati confermano quanto era già stato detto nel capitolo 2 a proposito del richiamo dei fatti moltiplicativi e aggiungono un nuovo importante elemento: la codifica dei fatti aritmetici non riguarda soltanto il codice verbale ma può passare anche attraverso gli altri due. La tavola di Laisant presenta i numeri nel codice analogico fornendo così una rappresentazione che, secondo quanto detto prima, è particolarmente efficace nei compiti di confronto fra numeri e nel controllo dei risultati ottenuti. Tuttavia, i risultati mostrati sembrano anche suggerire l'importanza di tutte le tre modalità di rappresentazione. Pertanto appare importante utilizzare la tavola di Laisant all'interno di consegne che prevedano una messa in relazione della rappresentazione analogica con quella verbale e con la scrittura simbolica. Esempi in tal senso sono reperiti dalla letteratura in didattica e mostrati nella sezione successiva.

4.4 Aspetti didattici

L'uso di rappresentazioni analogiche per la rappresentazione della moltiplicazione non è una novità sul piano didattico e sembra essere ben radicato nella tradizione didattica del nostro Paese. In particolare i cosiddetti "schieramenti" sono adottati come contesto di applicazione della moltiplicazione e come particolare forma di rappresentazione dell'operazione stessa. Nella tradizione didattica italiana tuttavia, uno schieramento che rappresenta un prodotto $n \times m$ consiste di n file di m oggetti discreti fra loro sconnessi (Fig. 4.4.1). Il ricorso al modello rettangolare è auspicato nei curricoli nazionali dei paesi anglosassoni²⁴, per esempio negli Standards del Regno Unito viene indicato l'uso di schieramenti sin dalla prima classe della scuola primaria e il collegamento del modello dello schieramento con l'area del rettangolo nella classe quarta. Nello stesso anno viene proposto di introdurre gli studenti alla proprietà distributiva. Per quanto riguarda il caso italiano invece, nelle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012) non viene fatto esplicito riferimento a nessun modello di moltiplicazione e le proprietà delle operazioni sono citate per la prima volta nella scuola secondaria, facendo riferimento alla proprietà distributiva e all'associativa ma non alla commutativa.

Questa differenza sembra rispecchiarsi anche nella letteratura di ricerca in Didattica della Matematica. Di fatto nella letteratura italiana non si riscontrano lavori in cui il modello rettangolare venga utilizzato per l'introduzione della moltiplicazione e delle sue proprietà. In realtà, la letteratura su questo tema non è vasta neanche a livello internazionale; la maggior parte dei lavori proviene dagli Stati Uniti e dal Regno Unito. Tuttavia, ci sono delle eccezioni: per esempio, Ridha Asy-Syifaa (2013) riporta un'esperienza di utilizzo degli schieramenti per giustificare la proprietà commutativa con studenti indonesiani del secondo anno di scuola primaria. Nell'intervento didattico presentato, gli schieramenti sono usati dall'insegnante per giustificare la proprietà commutativa stessa, lasciando poco spazio agli studenti per scoprire tale proprietà. Tuttavia, questa semplice esposizione alla rappresentazione permette già ad alcuni studenti di utilizzare la proprietà in altri problemi proposti successivamente. L'autrice sostiene che il fatto che non tutti gli studenti riconoscano nello schieramento un modello della moltiplicazione infici l'efficacia della presentazione della commutatività attraverso questa rappresentazione (*ibidem*).

Risultati più promettenti sono stati ottenuti da Izsak (2004; 2005) nel caso dell'apprendimento di algoritmi per il calcolo di moltiplicazioni contenenti almeno un numero di due cifre. Il caso riportato da Izsak riguarda una classe quarta che ha già iniziato ad utilizzare il modello rettangolare e che quindi già concepisce ogni rettangolo come uno schieramento di quadretti unitari. "Per fare un esempio, gli studenti sono in grado di calcolare l'area di un rettangolo tre per cinque contando i 15 quadretti unitari, sommando tre gruppi di cinque quadretti, sommando cinque gruppi di tre quadretti o richiamando $3 \times 5 = 15$ " (Izsak, 2004, p. 43). Pertanto in questo caso, diversamente da quello di Asy-Syifaa (2013), tutti gli studenti sono in grado di riconoscere nello schieramento una moltiplicazione.

²⁴ Oltre agli Standards del Regno Unito, è possibile trovare riferimento al modello rettangolare anche negli Standards Americani prodotti da NCTM e negli Standards della Nuova Zelanda.

A partire dalla rappresentazione rettangolare nota, gli studenti dell'esperimento di Izsak, sono invitati a suddividere l'area del rettangolo ottenuto moltiplicando due numeri a due cifre in quadrati di lato 10. Chiaramente possono rimanere altri rettangoli che rappresentano prodotti contenenti fattori minori di 10. In questo modo si ottiene una suddivisione del risultato in centinaia, decine e unità che possono essere rappresentate con l'usuale simbolismo aritmetico-algebrico (Fig. 4.4.2).

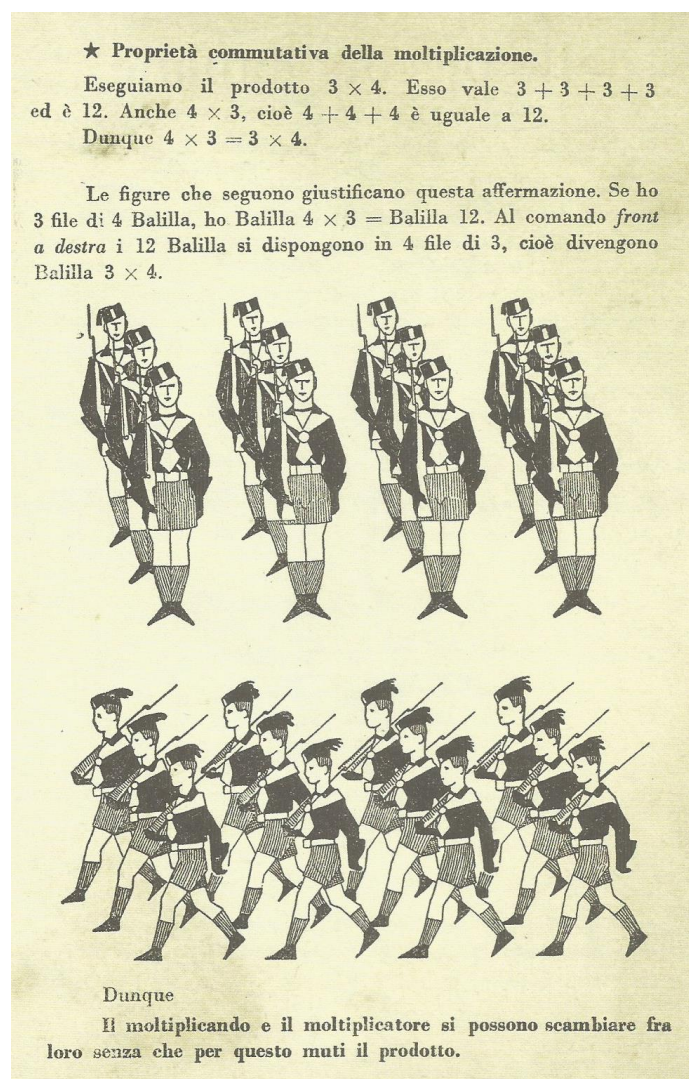


Fig. 4.4.1: Spiegazione della proprietà commutativa della moltiplicazione tratta da un sussidiario degli inizi del XX sec. Immagine tratta da (Gabrielli & Guerrini, 2011, p. 91)

L'autore mette da subito in evidenza il fatto che il tipo di rappresentazione utilizzata per le moltiplicazioni fornisce la possibilità di utilizzare diverse strategie per determinare la moltiplicazione rappresentata. In particolare, Izsak (2004) rappresenta i rettangoli indicando lungo il lato la lunghezza della dimensione espressa in cifre. Pertanto, esistono quattro modi diversi per determinare il prodotto (Fig. 4.4.3): contando quanti quadretti ci sono in ogni fila e determinando il numero di file, determinando la lunghezza dei lati contando il numero di lati di quadretto che li compongono, determinando la lunghezza dei lati contando i quadretti, guardando direttamente la rappresentazione in cifre. In questo senso, vengono messe in relazione diverse rappresentazioni di tipo analogico e la rappresentazione scritta in cifre.

L'attività della classe coinvolta nella sperimentazione di Izsak viene analizzata da due punti di vista: lo svolgimento del processo di insegnamento/apprendimento guidato dall'insegnante e i prodotti di tale processo in termini di strategie utilizzate da alcuni studenti per risolvere individualmente problemi moltiplicativi. Per quanto riguarda l'evoluzione della discussione di classe guidata dall'insegnante, è possibile mettere in evidenza due risultati. Il largo numero di strategie utilizzabili messo in evidenza prima risulta in una varietà di approcci da parte degli studenti: alcuni propongono strategie che coordinano i prodotti parziali, la scomposizione dei fattori in somme e la proprietà distributiva, ma altri non lo fanno. Pertanto l'insegnante porta continuamente l'attenzione degli studenti sulle dimensioni dei rettangoli al fine di mettere in relazione le etichette numeriche con i metodi già noti per determinare i quadretti dentro un rettangolo (ibidem). Questo tipo di intervento da parte dell'insegnante appare efficace perché gli studenti convergono sulla modalità di uso della rappresentazione proposta, ma non è sufficiente. Di fatto l'insegnante nota che una studentessa aggiunge altre etichette numeriche alla rappresentazione riportando in alcuni rettangoli i prodotti parziali che i rettangoli stessi rappresentano. L'insegnante condivide questa modifica della rappresentazione con la classe. Pertanto la rappresentazione complessiva si arricchisce ulteriormente.

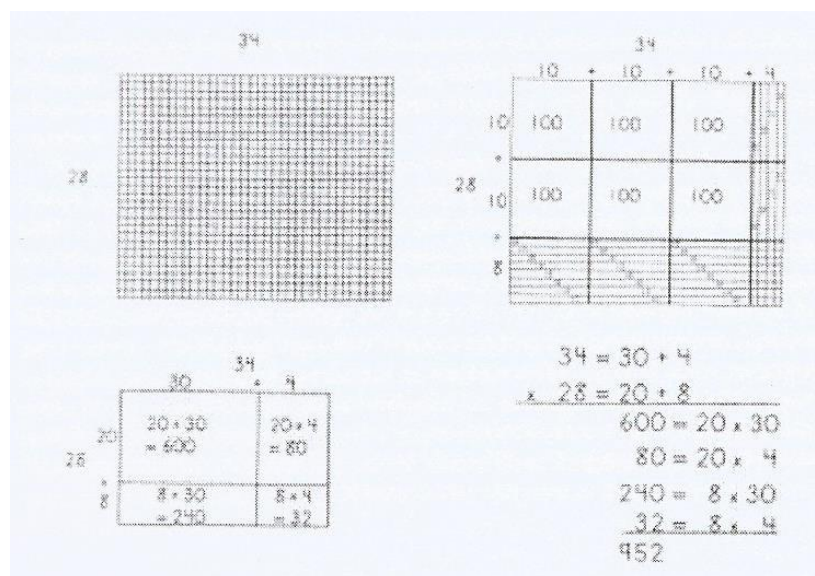


Fig. 4.4.2: Catena di rappresentazioni della moltiplicazione fra due numeri a due cifre a partire dal modello rettangolare fino ad un algoritmo "in colonna". Immagine tratta da (Izsak, 2004).

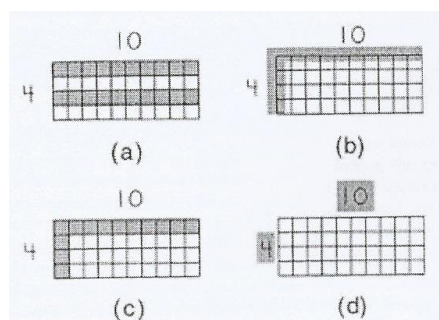


Fig. 4.4.3: Diverse strategie per la determinazione della moltiplicazione rappresentata da un rettangolo. Immagine tratta da (Izsak, 2004).

Questa ricchezza di rappresentazioni si ripresenta anche nelle interviste individuali. Tutti gli studenti intervistati sono in grado di utilizzare varie rappresentazioni nello svolgimento di un prodotto che coinvolge un solo numero a due cifre rendendo “chiaro che questi studenti sono in grado di fare connessioni appropriate fra le etichette numeriche, i quadrati unitari e l’area dei rettangoli quando i quadretti unitari sono presenti” (Izsak, 2004, p. 73). Alcuni studenti trovano invece difficoltà a gestire la rappresentazione in cui non sono più indicati i quadretti (si veda la Fig. 4.4.2) quando affrontano un prodotto fra due numeri a due cifre. Quelli che invece riescono ad affrontare entrambe le tipologie di prodotto danno evidenza di aver compreso “le connessioni sottostanti fra le etichette numeriche, i quadrati unitari, l’area dei rettangoli variando le strategie di classe in modi che riflettono una comprensione quantomeno implicita della proprietà distributiva quando i fattori e i prodotti sono rappresentati geometricamente” (Izsak, 2004, p. 64). In un test finale è stato chiesto a tutti gli studenti di eseguire alcuni prodotti fra numeri a due cifre. Nel caso del prodotto 45×26 circa tre quarti degli studenti hanno utilizzato la rappresentazione rettangolare testimoniando quindi di preferire questo tipo di approccio nel caso di prodotti complessi. Le percentuali sono invece più basse nel caso del prodotto 17×12 .

Simon e Blume (1994) ipotizzano che gli studenti possano costruire la formula per il calcolo dell’area di un rettangolo a partire dagli schieramenti come rappresentazione della moltiplicazione. Tale ipotesi viene confermata nel lavoro di Izsak, secondo il quale “gli studenti possono iniziare a costruire l’area come schieramento di quadrati unitari rifinando e ordinando una varietà di comprensioni, inclusa quella di schieramenti discreti” (Izsak, 2005, p. 398). Huang (2014) evidenzia che tale associazione non è biunivoca. Infatti, fra studenti di terza e quarta primaria, coloro che sono in grado di utilizzare gli schieramenti come modello della moltiplicazione risolvono correttamente problemi sull’area di rettangoli ma non è vero il viceversa. Tuttavia, gli studenti che al termine della scuola primaria sono in grado di utilizzare gli schieramenti per spiegare la formula dell’area del rettangolo sembrano essere ben pochi nei contesti in cui non c’è uno specifico insegnamento (Huang & Witz, 2013). Nel suo studio più recente, Huang rileva alcune implicazioni didattiche a partire dai risultati ottenuti:

this study suggests that instructors should draw students’ attention to how multiplication is connected with area measurement and the structure of rectangular arrays. Based on the interview data, third- to fourth-grade children may advance their knowledge of multiplication; however, not all of the interviewed children who had received additional multiplication lessons demonstrated progress in interpreting the area formula. As noted earlier, when engaging students in mathematical discussions, instructors should pay attention to how students explain their thinking regarding multiplication and its application to solving area measurement problems to help students construct coordination between multiplication and area measurement.²⁵ (Huang, 2014, p.462)

²⁵ Questo studio suggerisce che i docenti dovrebbero porre l’attenzione degli studenti su come la moltiplicazione è connessa alla misura dell’area e alla struttura degli schieramenti rettangolari. Basandosi sui dati tratti dalle interviste, gli studenti di terza e quarta primaria dovrebbero avanzare la loro conoscenza sulla moltiplicazione; tuttavia, non tutti gli studenti che hanno ricevuto lezioni addizionali sulla moltiplicazione hanno dimostrato progressi nell’interpretazione della formula dell’area [del rettangolo]. Come notato precedentemente, quando coinvolgono gli studenti in discussioni matematiche, i docenti dovrebbero fare attenzione a come gli studenti spiegano il loro pensiero sulla moltiplicazione e

In sintesi, gli studi qui presentati suggeriscono che l'uso del modello rettangolare per l'introduzione delle proprietà della moltiplicazione può avere risultati molto positivi purché tale modello sia stato opportunamente associato agli altri modelli di moltiplicazione noti agli studenti (Ridha Asy-Syifaa, 2013) e venga utilizzato dall'insegnante facendo attenzione a mettere in evidenza le connessioni fra le diverse modalità di rappresentazione (compreso l'uso dei simboli aritmetici), eventualmente integrando anche le rappresentazioni proposte dagli studenti stessi (Izsak, 2004). Il rafforzamento dell'uso dei modelli rettangoli della moltiplicazione può avere effetti positivi anche sulle future conoscenze in merito alla misura dell'estensione superficiale dei rettangoli (Huang, 2014).

4.5 Scelta della tavola di Laisant

Il senso dell'operazione (Slavit, 1999) è una delle componenti del pensiero relazionale definito nel terzo capitolo. Lo sviluppo di tale senso richiede l'abilità di coordinare diverse rappresentazioni di una operazione e la capacità di applicarne le proprietà. La rappresentazione delle moltiplicazioni come rettangoli integrata nella *tavola di Laisant* (sez. 4.1) sembra utile per sviluppare queste abilità. Di fatto il modello rettangolare è parte integrante nello sviluppo storico dell'operazione di moltiplicazione (sez. 4.2.1) ed è compatibile anche con la più moderna concezione della stessa operazione (sez. 4.2.2). In particolare, la dimostrazione delle proprietà della moltiplicazione attraverso questo modello non richiede l'uso del principio di induzione (a differenza dei modelli iterativi) e si affida invece a trasformazioni (ovvero funzioni) che sono direttamente traducibili in azioni su rettangoli; eventualmente anche concreti.

L'uso di rappresentazioni di tipo analogico appare fondato anche dalle teorie di stampo neuro-scientifico e psicologico (sez. 4.3). Di fatto la rappresentazione di quantità discrete trova un riscontro nel modo in cui i numeri sarebbero rappresentati nella nostra mente. La rappresentazione analogica appare particolarmente rilevante nei compiti di confronto e controllo. Inoltre, le tre possibili modalità di rappresentazione proposte nel modello del triplo codice (Dehaene, 1992) concorrono tutte al richiamo dei fatti moltiplicativi (non solo quella fonologica) e quindi sembra fondamentale lavorare su di esse in modo collegato. Appare importante lavorare con tutte le diverse modalità.

Questo tipo di approccio è già stato sperimentato in alcune ricerche in didattica (sez. 4.4) mostrando che l'uso del modello rettangolare per l'introduzione delle proprietà della moltiplicazione può avere risultati molto positivi solo nel caso in cui tale modello sia stato opportunamente associato agli altri modelli di moltiplicazione noti agli studenti (Ridha Asy-Syifaa, 2013) e venga utilizzato dall'insegnante facendo attenzione a mettere in evidenza le connessioni fra diverse modalità di rappresentazione ivi comprese le rappresentazioni proposte dagli studenti stessi (Izsak, 2004). Sebbene in questi studi non venga adoperata proprio la tavola di Laisant, i risultati di ricerca forniscono utili indicazioni per la progettazione e l'implementazione di interventi didattici volti a utilizzare tale tavola (e quindi

il modello di moltiplicazione da essa mediato) per la didattica delle proprietà della moltiplicazione.

Il fatto che l'uso dei modelli rettangoli della moltiplicazione possa avere effetti positivi anche sulle conoscenze in merito alla misura dell'estensione superficiale dei rettangoli (Huang, 2014) apre dei quesiti sul momento in cui è più opportuno proporre il lavoro con la tavola di Laisant. Da una parte infatti sembra positivo introdurla precocemente, così che il modello rettangolare della moltiplicazione appartenga al campo concettuale moltiplicativo (Vergnaud, 1983) sin dall'inizio del suo sviluppo. D'altra parte l'uso di questo modello potrebbe essere opportuno anche dopo che gli studenti hanno acquisito alcune conoscenze sull'area dei rettangoli; così i due temi potrebbero essere messi in collegamento. Questa doppia possibilità influenzerà il design della ricerca presentato nel sesto capitolo.

In conclusione, per tutti i motivi sopraesposti, e alla luce della letteratura citata nei precedenti capitoli, si ipotizza che la tavola di Laisant possa costituire un utile mediatore per la memorizzazione di nuovi fatti moltiplicativi e per l'apprendimento delle proprietà della moltiplicazione, eventualmente anche per una riorganizzazione di quanto già appreso. Facendo uso del quadro teorico della *Mediazione Semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) si è deciso quindi di progettare una serie di *cicli didattici* (ibidem) che si avvalgono di tale artefatto. Il prossimo capitolo sarà dedicato alla presentazione del quadro concettuale e teorico.

5 Quadro concettuale e teorico

Il quadro teorico necessario per questo lavoro deve soddisfare numerose e variegata esigenze. Il problema di ricerca che viene a delinearsi riguarda infatti l'apprendimento degli studenti attraverso l'uso di un particolare artefatto impiegato in consegne ancora da progettarsi. Pertanto la teoria deve fornire elementi per il design delle consegne ma anche descrivere il processo di insegnamento/apprendimento (tenendo conto del ruolo dell'artefatto stesso) indagando il ruolo dei suoi diversi attori. La necessità di studiare le prestazioni degli studenti anche dal punto di vista individuale, tenendo conto della tipologia di pensiero attivato (relazionale o procedurale), impone strumenti per l'analisi dei protocolli individuali e anche l'esplicitazione di cosa si intenda per pensiero. Il tipo di problema discusso e questo insieme di esigenze spingono verso l'approccio indicato da Arzarello e Bartolini (1998) come *ricerca per l'innovazione*. Di fatto, secondo gli autori, questo trend di ricerca abbraccia i lavori che hanno contemporaneamente lo scopo di:

1. produrre esempi paradigmatici di miglioramento dell'insegnamento della matematica;
2. indagare le condizioni che permettono od ostacolano tali processi.

In questo tipo di approccio la teoria e la pratica si intrecciano generando approcci misti ai problemi della didattica: gli insegnanti e i ricercatori agiscono insieme sia nella fase di progettazione sia come osservatori partecipanti all'implementazione. Ne viene chiaramente influenzato il design della ricerca, sarà presentato nel prossimo capitolo. Dal punto di vista del quadro concettuale, Arzarello e Bartolini (ibidem) sostengono che in questo trend di ricerca "non viene assunto un quadro teorico coerente globale, per via della sua complessità e del numero di variabili interconnesse di cui tener conto. Piuttosto gli strumenti sono presi in prestito da vari approcci teorici o prodotti internamente, e applicati come strumenti di una cassetta degli attrezzi²⁶. La coerenza locale dei quadri di riferimento è necessaria, ma la coerenza globale è considerata impossibile o quantomeno non rilevante" (p. 250).

Prediger e colleghi (2008) mettono in evidenza diverse modalità attraverso le quali teorie differenti possono essere messe in comunicazione. Tali modalità sono rappresentate attraverso la metafora di un asse continuo (Fig. 5.1) che vede ai suoi estremi la totale noncuranza e l'unificazione completa delle teorie. Chiaramente si tratta di estremi irraggiungibili o comunque non interessanti, nel mezzo si trovano invece una serie di strategie.

Nel caso particolare di questo lavoro, sarà necessario utilizzare diversi approcci teorici e metodologici a seconda che si stia analizzando il processo di insegnamento/apprendimento piuttosto che i suoi prodotti, che si guardi alla dimensione collettiva del gruppo classe o a quella individuale del singolo alunno. Pertanto le diverse teorie saranno utilizzate *coordinandole* ovvero alternando gli approcci a seconda della particolare analisi affrontata. Tuttavia, secondo Radford (2008) due teorie possono essere utilizzate insieme solo nel momento in cui non confliggono in termini di principi.

²⁶ In inglese viene utilizzato il termine *tool-kit* oppure *kit of tools* (cfr Bartolini Bussi, 1996).

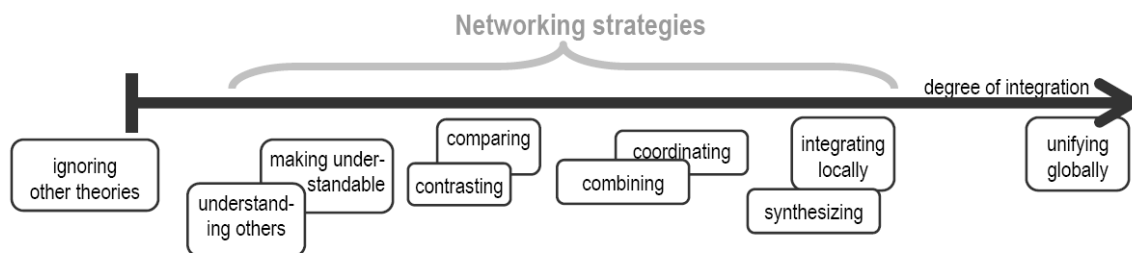


Fig. 5.1: Diverse strategie per il networking di teorie (Prediger et al., 2008, p. 170).

La prima sezione di questo capitolo sarà dedicata proprio all'esplicitazione dei principi fondamentali sui quali si incardina il quadro concettuale. Le sezioni successive, invece, presentano gli strumenti teorici che concorrono al design dell'intervento e all'analisi dei dati. In particolare viene presentato l'**approccio discorsivo** (Sfard, 2009) come *background theory*, nel senso di Mason e Waywood (1996), ovvero come teoria utile a "discernere e definire quali tipologie di oggetti devono essere studiati" (p. 1058). Successivamente, si introdurrà la **Teoria della Mediazione Semiotica** (TMS, Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) come *foreground theory*, ovvero come teoria che descrive cosa accade e può accadere in alcuni contesti della didattica della matematica (Mason & Waywood, 1996).

5.1 Approccio semiotico

La semiotica è generalmente intesa come la 'scienza dei segni' ovvero lo studio dei segni, della loro manipolazione, del loro significato e del loro uso. La rilevanza della semiotica nello studio dell'insegnamento/apprendimento della matematica viene espressa nelle seguenti parole di Raymond Duval.

We do not have any perceptive or instrumental access to mathematical objects, even the most elementary, as for any object or phenomenon of the external world. We cannot see them, study them through a microscope or take a picture of them. The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings. But, at the same time, mathematical objects must not be confused with the used semiotic representations. *This conflicting requirement makes the specific core of mathematical knowledge.*²⁷ (Duval, 2000, p. 61)

Il ricercatore francese mette in evidenza chiaramente come la matematica sia fatta di oggetti²⁸ che non sono percepibili con i cinque sensi e esistono nelle rappresentazioni che di essi possiamo realizzare, ma con esse non devono essere confusi. Questa visione porta a considerare fondamentali le rappresentazioni nello studio dell'evoluzione di un concetto

²⁷ Non abbiamo nessun accesso percettivo o strumentale agli oggetti matematici, anche i più elementari, allo stesso modo degli oggetti e fenomeni del mondo esterno. Non possiamo vederli, studiarli attraverso un microscopio o farne una foto. L'unico modo di ottenere accesso a essi è usando segni, parole o simboli, espressioni o disegni. Ma, allo stesso tempo, gli oggetti matematici non devono essere confusi con le rappresentazioni semiotiche utilizzate. L'esigenza di questo conflitto crea il nucleo specifico della conoscenza matematica.

²⁸ L'uso della parola 'oggetto' sembra richiamare qui una visione platonista della matematica. Si definirà in seguito (sez. 5.2.2) cosa si intende effettivamente per oggetto matematico e si chiarirà che la visione platonista non è adottata in questo lavoro.

matematico durante il processo di apprendimento. Si è già notato che Vergnaud (1988) definisce un campo concettuale anche a partire dalle rappresentazioni dell'oggetto. Lo studio di tali rappresentazioni, ovvero dei segni prodotti per manipolare l'oggetto matematico stesso, è l'unico possibile accesso al campo concettuale di una persona. Di fatto, nell'osservare l'attività matematica di uno studente che apprende, possiamo inferire le motivazioni del suo comportamento e interpretare i processi messi in atto ma l'unico dato oggettivo a nostra disposizione sono le rappresentazioni fornite dallo studente per l'oggetto matematico che si vuole studiare.

Lo studio dei segni nasce esternamente all'ambito matematico, principalmente nel lavoro di Peirce, per il quale un segno è "qualcosa che sta per qualcos'altro" (Colapietro, 1993, p. 179), ma negli ultimi decenni ha influenzato una parte della ricerca in didattica della matematica differenziandosi anche in diverse correnti di pensiero su come i segni possano o debbano essere studiati nel processo di apprendimento della matematica (Presmeg et al, 2016). I diversi filoni teorici evoluti in seno alla ricerca in didattica della matematica prendono avvio da diverse tradizioni di ricerca semiotica. Un primo trend di ricerca si diparte dai lavori di de Saussure (1959). Il segno viene visto come una relazione fra due parti, il significante, ovvero ciò che rappresenta, e il significato, ciò che è rappresentato. Significato e significante non sono separabili, come due facce di una stessa medaglia. I lavori di de Saussure non sono stati tanto influenti per la visione diadica di segno, che alcuni hanno considerato inadeguata (Presmeg, 2006), quanto piuttosto per le nozioni di **sincronicità** e **diacronicità** (Fried, 2007). Una visione sincronica è una istantanea di un momento; permette di studiare i segni utilizzati e le relazioni che fra essi intercorrono. La visione diacronica invece è longitudinale nel tempo e riguarda lo sviluppo di un oggetto matematico nella storia dell'umanità o nell'apprendimento di un individuo.

Per quanto riguarda la definizione di segno, come si è già anticipato, ha avuto un impatto maggiore il lavoro di Peirce. Nei suoi lavori, è presentata una visione triadica di segno: l'*oggetto*, il *rapresentamen* (che sta per l'oggetto in qualche modo) e l'*interpretant*.

I define a Sign as anything which is so determined by something else, called its Object, and so determines an effect upon a person, which effect I call its Interpretant, that the latter is thereby mediately determined by the former²⁹. (Peirce, 1998, p. 478)

Pertanto uno stesso rapresentamen può rappresentare oggetti diversi, si hanno quindi due segni diversi sebbene il rapresentamen sia lo stesso. Ancora, due segni possono essere diversi per quanto riguarda il rapresentamen ma, in certe situazioni e per certe persone, indicare lo stesso oggetto. La teoria di Peirce elabora diverse classificazioni in relazione al tipo di rapresentamen utilizzato, al modo in cui i diversi interpretanti sono influenzati da uno stesso rapresentamen e così via. Questo tipo di quadro teorico ha trovato varie applicazioni in campo didattico (per es. nei lavori di Roth, 2003; Roth et al., 2002).

²⁹ Definisco un Segno come qualsiasi cosa che è così determinata da qualcos'altro, chiamato Oggetto, e quindi determina un effetto su una persona, tale effetto lo chiamo il suo Interpretant, quest'ultimo è perciò determinato in modo mediato dal primo.

Chiaramente, nella ricerca educativa appare di particolare interesse il ruolo cognitivo dei segni. Questo aspetto è centrale nella ricerca in didattica della matematica e prende le mosse, principalmente, a partire dai lavori dello psicologo Lev Semënovič Vygotskij. Il concetto di segno viene elaborato da Vygotskij durante i suoi lavori sulla didattica speciale

Left to himself and to his own natural development, a deaf-mute child will never learn speech, and a blind person will never master writing. In this case education comes to the rescue ... [by] creating artificial, cultural techniques, that is, a special system of cultural signs and symbols.³⁰ (Vygotsky, 1929, p. 168 citato in Presmeg et al, 2016)

Il segno secondo Vygotskij non è quindi caratterizzato dalla sua natura rappresentativa ma dal suo ruolo funzionale come mezzo esterno di regolazione e auto-controllo. Attraverso i segni, le forme più elementari e primitive di comportamento divengono atti e processi culturali (Vygotskij, 1993). I segni sono contemporaneamente strumenti psicologici e mediatori culturali: "The inclusion in any process of a sign [...] remodels the whole structure of psychological operations just as the inclusion of a tool remodels the whole structure of a labor operation"³¹ (Vygotskij, 1929, p. 421). I segni quindi non servono semplicemente a portare a termine una certa consegna ma vengono inclusi nell'attività del bambino modificando il modo stesso in cui il bambino interagisce col mondo (Presmeg, Radford, Roth, & Kadunz, 2016). Tale trasformazione dipende dal ruolo sociale, storico e culturale dei segni; ovvero, il significato che un segno acquista dipende da come viene utilizzato dalla collettività:

Every [psychic] function in the child's cultural development appears twice: first, on the social level, and later, on the individual level.³² (Vygotskij, 1978, p. 57)

Il passaggio dalle forme collettive di comportamento alle funzioni intra-psicologiche, ovvero la ricostruzione interna di operazioni prima esterne, viene detto **interiorizzazione** (Vygotskij, 1978). Un noto esempio di interiorizzazione è dato dal gesto di indicare che viene considerato come evoluzione del tentativo di afferrare un oggetto lontano, tentativo a cui è seguita una risposta da parte di un adulto che ha avvicinato l'oggetto al bambino.

Le idee di Vygotskij qui sommariamente riassunte hanno trovato un fertile terreno di sviluppo nella ricerca in didattica della matematica, soprattutto nella tradizione italiana. Per esempio, Arzarello (2006) parte dal quadro concettuale vygotškiano per mettere in evidenza le relazioni che ci sono fra diversi **insiemi semiotici**, formali e informali. Secondo questo autore, un insieme semiotico è

a) A set of signs which may possibly be produced with different actions that have an intentional character, such as uttering, speaking, writing, drawing, gesticulating, handling an artefact.

³⁰ Lasciato a se stesso e al suo sviluppo natural, un bambino sordo-muto non imparerà mai a parlare, e una persona cieca non padroneggerà mai la scrittura. In questo caso l'educazione viene in soccorso ... [attraverso] la creazione di tecniche artificiali culturali, cioè, uno speciale sistema di segni e simboli culturali.

³¹ L'inclusione di un segno in un qualsiasi processo [...] rimodella l'intera struttura delle operazioni psicologiche allo stesso modo in cui l'inclusione di uno strumento rimodella l'intera attività in un laboratorio.

³² Ogni funzione [psichica] nello sviluppo culturale del bambino appare due volte: prima, a livello sociale, e successivamente, a livello individuale.

b) A set of modes for producing signs and possibly transforming them; such modes can possibly be rules or algorithms but can also be more flexible action or production modes used by the subject.

c) A set of relationships among these signs and their meanings embodied in an underlying meaning structure.³³ (Arzarello, 2006, p. 281)

In questa definizione viene messo subito in evidenza come i segni possano essere introdotti con una varietà di azioni che includono la parola, la scrittura, il gesto e l'uso di artefatti. La relazione fra i segni e gli artefatti è il focus del quadro teorico elaborato da Bartolini Bussi e Mariotti (2008). In questo quadro teorico lo studio dei segni è funzionale a studiare la relazione che intercorre fra artefatti di vario tipo e la conoscenza matematica che si costruisce nel processo di insegnamento/apprendimento:

Taking a semiotic perspective means to interpret the teaching-learning process recognizing the central role of signs in the construction of knowledge, and focusing on the link that it is possible to establish between artifacts and mathematical knowledge³⁴ (Maracci et al., 2013, p. 467)

I riferimenti finora elencati si occupano principalmente dello studio della relazione fra sintattica e semantica dei segni. Altri studi si muovono maggiormente sul piano pragmatico; si tratta di quelli che fanno riferimento al lavoro di Wittgenstein e le sue *Philosophical investigation* (1953/1997). Secondo questo filosofo, il significato di un segno coincide col suo uso e la sua funzione. “Il segno ‘cilindro’, usato da un bambino, è un segnaposto per tutte le situazioni in cui lui/lei l’ha incontrato e ne ha fatto uso (per es. nel porre una domanda, facendo asserzioni constative o contestando osservazioni categoriche per altri)” (Presmeg et al., 2016, p. 24). Seguendo un approccio di questo tipo, i segni evolvono grazie al dialogo con gli altri, specialmente attraverso l’incontro con altri usi e funzioni dello stesso segno, diversi da quelli a cui lo studente è solito. Questo approccio dialogico trova fondamento nei lavori di Bakhtin, secondo il quale il dialogo non è da intendersi solo fra due persone diverse ma può essere anche il dialogo di una persona con se stessa, allo stesso modo in cui si può avere un monologo anche quando due persone sono presenti (Bakhtin, 1984). Questo tipo di approccio è quello seguito dai cosiddetti approcci discorsivi. Nella recente *Enciclopedia della Didattica della Matematica* (Lerman, 2014) un’intera voce è dedicata a questi tipo di approccio. In tale opera, viene definito come “un quadro di ricerca basato sull’idea che l’apprendimento di materie come la matematica, la fisica o la storia sia un’attività comunicativa e debba essere studiato come tale. Gli educatori che adottano un tale approccio trattano il discorso e il suo sviluppo come oggetti primari di esplorazione piuttosto che meri mezzi per lo studio di qualcos’altro (p.e. lo sviluppo di schemi mentali)” (Sfard, 2014, p. 187). La teoria della

³³ a) Un insieme di segni che possono essere prodotti con differenti azioni che hanno un carattere intenzionale come affermare, parlare, scrivere, gesticolare, manipolare un artefatto. b) Un insieme di modalità di produzione dei segni e, possibilmente, di trasformazione degli stessi; tali modalità possono essere regole o algoritmi ma possono essere anche azioni e modi di produzioni più flessibili utilizzati dal soggetto. c) Un insieme di relazioni tra questi segni e i loro significati incorporati in una struttura di significato sottostante.

³⁴ Assumere una prospettiva semiotica significa interpretare il processo di insegnamento/apprendimento riconoscendo il ruolo centrale dei segni nella costruzione di conoscenza, e focalizzando sul collegamento che è possibile stabilire tra artefatti e conoscenza matematica.

comognizione presentata nella sezione successiva configura esattamente un approccio di questo tipo e ha nei discorsi il suo principale oggetto di ricerca.

5.2 L'approccio discorsivo: cognizione come comunicazione

Il principio fondamentale (e forse anche il più controverso) dell'approccio discorsivo presentato da Sfard in *Thinking as Communicating* (2008) risiede nella visione non-dualistica su pensiero e comunicazione. Anziché essere intesi come due distinte attività dell'essere umano, sono invece considerate come una unica, caratterizzante il genere umano stesso, che può essere rivolta agli altri o a se stessi. L'idea fondamentale da cui si parte è che lo sviluppo di ogni persona non è altro che un processo di **individualizzazione** di modi di vivere storicamente stabiliti e collettivamente implementati. La cognizione è quindi vista come comunicazione rivolta verso se stessi, come interiorizzazione del dialogo con gli altri (Sfard & Kieran, 2001). Cognizione e comunicazione sono due facce della stessa medaglia, viene quindi coniato un unico termine per parlare di questa unica attività: **comognizione**. Questo approccio prende le mosse da una rilettura delle opere di due autori

- quella dello psicologo sovietico Lev S. Vygotskij secondo il quale funzione appare due volte (o su due piani) nello sviluppo culturale del bambino. Prima appare sul piano sociale (inter-psicologico) ed è poi interiorizzata su quello individuale (intra-psicologico) (Vygotskij, 2010);
- quella del filosofo e logico Ludwig Wittgenstein che non fa distinzione fra concetti e modo di comunicarli intendendo che “per una larga classe di casi – se non per tutti – nei quali si usa la parola ‘significato’ questa può essere definita così: il significato di una parola è il suo uso nel linguaggio” (1953/1997, p. 18).

All'interno di questo quadro concettuale, l'oggetto di ricerca è il **discorso**, definito come modalità di comunicazione particolare che si distingue per il suo repertorio di atti (verbali e non) ammissibili e per le reazioni che a questi seguono (Sfard, 2008). Ogni discorso definisce una comunità di discorsanti e ha un suo linguaggio ovvero un vocabolario, dei segni, delle routine di comportamento e un insieme di narrazioni ammissibili. La matematica è il discorso che definisce (ed è definito da) la comunità dei matematici attraverso un insieme di vocaboli e simboli, modi di utilizzarli e modalità di accettazione di nuove narrazioni (nel caso della matematica, la deduzione logica).

5.2.1 Evoluzione del discorso: le routine

Se si adotta la prospettiva presentata nella sezione precedente, l'apprendimento è il processo di individualizzazione dei discorsi altrui. Gli studenti acquisiscono un nuovo vocabolario matematico e ne imparano l'uso partendo da un **uso passivo** dei termini, ripetendo le frasi degli esperti. Passano poi a un uso stereotipato, circoscritto ad alcuni contesti e a particolari modi d'espressione, **guidato da routine**, per poi comprendere in quali tipologie di frasi una certa parola può essere utilizzata (**uso guidato dalla frase**³⁵). Infine, la conoscenza delle

³⁵ Nel testo italiano viene utilizzata l'espressione “uso guidato dalla frase” che traduce fedelmente l'inglese “*phrase-driven*”. In lavori precedenti l'autrice ha però usato altre espressioni come “*template-driven*” (Sfard, 2001, p. 7).

modalità di uso della parola, cioè del suo significato, sarà così profonda e varia che si avrà l'impressione di poter parlare di un oggetto a sé stante, sarà avvenuta una **oggettivazione**³⁶ (Fig. 5.2.1).

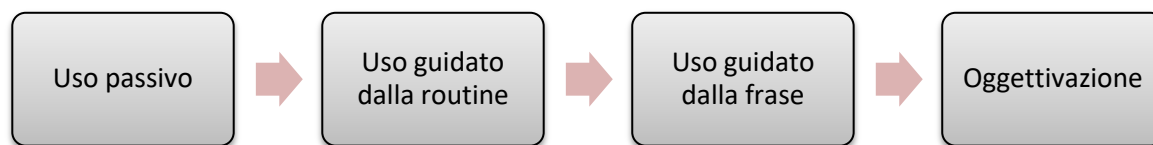


Fig. 5.2.1: Evoluzione del discorso.

Per spiegare meglio quel che si intende, si trae un esempio direttamente dal libro della Sford (2009, p. 213). Si consideri la seguente frase:

Un krasnal si svegliò e si alzò dal suo letto

Avendo sentito o letto questa frase non si sa molto su cosa siano i krasnal, ma si può già essere d'accordo sul fatto che alcune delle seguenti frasi potrebbero avere un senso e altre meno:

1. Ieri un krasnal è andato al supermercato.
2. Un krasnal è stato diviso per tre e poi elevato al quadrato.
3. Questo krasnal è stato tirato su con una sottoscrizione pubblica.
4. Questo krasnal è più giovane di quest'altro

Ancora, molti possono sentirsi autorizzati a completare una frase del tipo "Un krasnal è felice, un'altro ..." ma ci si può domandare se potrebbero essere in grado di creare una nuova frase a proposito dei krasnal e, soprattutto, decidere se tale frase è vera o meno. Probabilmente, se si avessero a disposizione più frasi sui krasnal ci si sentirebbe agevolati in questo compito. Quando ci si riesce allora si ha un uso oggettivato della parola 'krasnal', questo termine indica qualcosa (concreto o astratto che sia) che, per chi parla, esiste.

La fase intermedia fra l'uso passivo e l'uso oggettivato consiste nel far ricorso a routine. Questa parola non è da intendersi come ripetizione meccanica e cieca di azioni ma, più in generale, come modello discorsivo che si ripete in certi tipi di situazioni. Una **routine** è definita dalle condizioni di applicabilità (fra cui il *prompt* che dà l'avvio alla routine), l'insieme di atti che costituiscono la routine e le condizioni che ne individuano il termine.

Le routine possono essere a loro volta classificate in base a quello che è l'obiettivo per cui sono svolte (Sford & Lavie, 2005). Tutte le routine il cui scopo è quello di realizzare cambiamenti sull'ambiente fisico (per es. attraverso l'uso di un artefatto) sono dette **deed**³⁷. Invece, una routine il cui obiettivo è quello di produrre nuove narrazioni viene classificata

³⁶ Il termine utilizzato nella versione inglese è *objectification*, che in italiano potrebbe essere tradotto anche come *oggettificazione*. Qui si usa la parola oggettivazione rimanendo fedeli alla versione italiana del libro. Si noti che tale termine viene usato in modo diverso da altri autori. Per es. si confronti la definizione di Sford (2000) con quella di Radford (2002).

³⁷ Nella versione italiana del libro, il termine *deed* è tradotto come 'atto'. Qui si è preferito utilizzare il termine inglese per non confondere questo costrutto con quello di atto comunicativo (*utterance* nella versione inglese) precedentemente usato.

come **rituale** se le narrazioni sono prodotte per soddisfare le aspettative di altri mentre si dice **esplorazione** se le nuove narrazioni sono prodotte per se stessi (per es. per risolvere un problema). Secondo Sfard (2009)

nel loro percorso verso nuove routine che coinvolgono nuove meta-regole o nuovi oggetti matematici, i discenti devono passare, anche se solo per pochissimo, attraverso lo stadio della prestazione ritualizzata. In questo stadio transitorio, possono acquisire una buona familiarità con il *come* della nuova routine, ma saranno molto meno consapevoli del suo *quando*. [...] La trasformazione del rituale in esplorazione non è un processo separato che avviene soltanto quando il bambino ha raggiunto una piena padronanza del corso d'azione routinario. L'imitatore ponderante, mentre regola costantemente le sue prestazioni su quelle degli altri, valuta anche le ragioni per cui i matematicisti esperti fanno ciò che fanno. La crescita della competenza è accompagnata da una graduale de-ritualizzazione. (pp. 289-291)

5.2.2 Oggettivazione

Nell'apprendimento della matematica, la possibilità di manipolare gli oggetti matematici necessita il processo di oggettivazione, che da un punto di vista discorsivo si traduce nell'usare un nome come se designasse un oggetto extradiscorsivo indipendente dall'agentività umana. Questo processo si compone di due sottoprocessi non inscindibili.

Secondo Sfard (1991; 1994) la maggior parte degli oggetti matematici nasce inizialmente come processo. Per esempio il concetto di numero emerge dall'atto del conteggio. Una **reificazione** avviene quando il processo diviene interscambiabile col suo risultato³⁸. Nell'analisi del discorso è possibile individuare una reificazione quando un nome o un pronome fa assumere la forma di storie "atemporal" a narrazioni che riguardano processi su oggetti. In questo modo la narrazione diviene una narrazione in merito a relazioni fra oggetti (Sfard, 2009). Un passo preliminare alla reificazione è dato dalla **condensazione** (Sfard, 1992) che consiste nell'abilità di parlare della procedura in termini di input e output senza dover svolgere la procedura passando da tutti i passi che la compongono.

L'oggettivazione si completa quando oltre a utilizzare un nome per riferirsi a un processo, ci si riferisce ai fenomeni che coinvolgono tale processo in modo impersonale, come se accadessero da sé, senza la partecipazione di esseri umani. Una frase come "cinque è un numero dispari" è un esempio di **alienazione** di una frase del tipo "ho svolto la divisione fra cinque e due e ho ottenuto resto uno".

Si tiene a precisare che i termini matematici non sono le uniche realizzazioni degli oggetti matematici. Un oggetto può avere molte realizzazioni percettivamente accessibili in modi diversi. "Se una parola, un simbolo algebrico o un'icona debbano essere considerati come significante oppure una realizzazione di un significante dipende dall'uso, non da qualche proprietà intrinseca di questi artefatti" (Sfard, 2009, p. 199). L'insieme delle realizzazioni di un oggetto matematico viene detto **albero di realizzazione**. Gli alberi di realizzazione sono

³⁸ In letteratura esistono diversi costrutti con definizioni simili a questa, degli esempi sono il costrutto di incapsulamento e quello di procept. Per una rassegna si veda (Tall et al, 2013).

costrutti strettamente personali e possono essere altamente situati. Interlocutori diversi possono realizzare lo stesso significante in modi diversi.

5.2.3 Conflitti comognitivi

L'uso che gli allievi fanno dei termini matematici si trova, a seconda del livello scolastico e dell'età, in una fase passiva, guidata da una routine, dalla frase o oggettivato. Non è difficile immaginare il caso in cui, nella stessa classe, ci siano livelli di sviluppo diversi e quindi usi diversi. Cosa succede quando due bambini che fanno diversi usi della stessa parola si trovano a comunicare fra loro?

Quando due discorsi governati da regole diverse si incontrano, si parla di **conflitto comognitivo**³⁹. Si può notare la presenza di un conflitto di questo tipo quando si hanno delle affermazioni conflittuali che appaiono come fattuali, cioè approvabili se si cambiano le regole del discorso.

Si tiene a specificare che non si deve confondere l'idea di conflitto comognitivo con quella, più nota, di conflitto cognitivo (Vosniadou, 1994). La differenza sostanziale risiede nel fatto che il costrutto di stampo comognitivo si riferisce a un conflitto che nasce nella comunicazione fra due persone, quello costruttivista si riferisce invece all'interazione delle convinzioni della persona con quello che accade nel mondo circostante⁴⁰. Mentre nel caso di conflitto cognitivo entra in gioco l'abilità del soggetto di giustificare in modo razionale due affermazioni contrastanti sul mondo, la nozione di conflitto comognitivo pone l'accento sul diverso uso di alcune parole, il che è un fenomeno di tipo esclusivamente discorsivo. Se si assume la prospettiva del conflitto cognitivo si deve immaginare l'apprendente come in un continuo stato di ricerca sulla verità del mondo; la nuova conoscenza viene acquisita come risultato dei tentativi di aggiustare ciò che si comprende alla realtà esterna. Questo tipo di apprendimento potrebbe funzionare, almeno in teoria, anche senza la presenza di altre persone. Viceversa, l'idea di conflitto comognitivo pone l'accento sulla necessità di comunicazione come principale guida delle azioni cognitive. La spinta per l'apprendimento è il desiderio di avvicinare i propri modi d'uso delle parole a quelli delle altre persone che si hanno intorno, magari a quelli di qualcuno più esperto⁴¹. Di fatto è solo attraverso l'impossibilità di comunicare con qualcuno (l'insegnante o i pari) che ci si può rendere conto della non appropriatezza del proprio uso della parola; un evento di questo tipo può diventare la molla per decidere di rivisitare tale uso⁴². In questo senso l'apprendimento è il processo di individualizzazione dei discorsi degli altri.

³⁹ Il costrutto di "conflitto comognitivo" appare in *Thinking as communicating* ma era già stato introdotto in lavori precedenti come "conflitto discorsivo" (Sfard, 2001).

⁴⁰ Esistono altre differenze fra le due tipologie di conflitto. Sono presentate in un lavoro della stessa Sfard (2001) e riassunte nella tabella a pag. 299 del libro (Sfard, 2009).

⁴¹ Nel libro della Sfard viene fatto un parallelo con i cambiamenti avvenuti nel discorso scientifico (anche accademico) durante la storia.

⁴² L'idea di conflitto discorsivo o comognitivo presentata dalla Sfard appare in linea con quella di conflitto socio-cognitivo (Butera & Darnon, 2010).

5.3 TMS: artefatti al centro dell'apprendimento

La Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) propone un modello del processo di insegnamento-apprendimento basato sulla possibilità di ri-contestualizzare i concetti matematici mettendo al centro dell'attenzione un artefatto e i suoi modi d'uso, come mediatori tra pratica e teoria, tra significati spontanei e matematici (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008).

Prendendo una prospettiva a un tempo didattica e semiotica, elabora il costrutto della mediazione semiotica di Vygotskij (1978) e in particolare ipotizza che lo sviluppo dei significati emergenti dalle attività con strumenti possa fornire la base potenziale per la costruzione, opportunamente guidata, di conoscenze matematiche. (Maffia & Mariotti, 2016, p. 6)

5.3.1 Strumenti e segni nella mediazione semiotica

L'elemento chiave nella dialettica tra le conoscenze matematiche culturalmente condivise e la consegna svolta da un allievo è costituito dagli artefatti utilizzati; essi svolgono una duplice funzione: da un lato, orientati esternamente, permettono l'azione e di conseguenza la soluzione di un problema pratico. Si parla in questo caso di **aspetto pragmatico** o esperienziale (Norman, 1995). D'altra parte alcuni artefatti hanno anche un **aspetto riflessivo** (*ibidem*), sono cioè orientati internamente, controllano l'azione e concorrono alla costruzione di significati.

Dal punto di vista terminologico, è necessaria una precisa distinzione fra i termini artefatto e strumento che, a volte, vengono usati come sinonimi in letteratura. Si consideri un oggetto in sé (un oggetto materiale come un cacciavite o un compasso, ma anche un elemento virtuale come il comando di un software). Per questo oggetto esistono diverse modalità d'uso che possono essere messe in atto per svolgere un determinato compito utilizzando l'oggetto. In accordo con Rabardel (1995), si usa il termine **artefatto** per identificare l'oggetto in sé e **strumento** per parlare del costrutto costituito dall'artefatto e dagli schemi d'uso costruiti da un dato soggetto in rapporto all'artefatto e alle situazioni in cui può essere impiegato. Il processo attraverso il quale gli schemi d'uso evolvono è detto **strumentazione**; è da distinguersi dall'evoluzione dell'artefatto stesso che è detta invece **strumentalizzazione** (Rabardel, 1995). Questa distinzione risulta utile per analizzare il processo che determina l'appropriazione di schemi d'uso efficaci rispetto ad artefatti complessi e compiti diversificati⁴³.

Come accennato precedentemente, la TMS affonda le sue radici nel lavoro di Vygotskij. Secondo lo psicologo, strumenti e segni sono prodotti culturali che fanno parte dell'attività sociale nella quale si espleta il loro funzionamento; oltre il linguaggio, Vygotskij stesso cita il conteggio come esempio riferito alla matematica (Vygotskij, 2010).

⁴³ Risulta particolarmente importante nel caso di artefatti tecnologici complessi in cui le modalità d'uso possono essere non direttamente identificabili dall'allievo. In questo senso uno stesso artefatto può corrispondere a strumenti diversi a seconda del soggetto che lo usa. Un'analisi più dettagliata dei risvolti didattici di questi aspetti si trova in (Artigue, 2002).

Proprio il caso del conteggio, e in particolare l'uso dell'abaco, viene utilizzato dalle autrici della TMS come esempio paradigmatico per descrivere lo sviluppo che dall'uso di uno strumento può portare alla costruzione di una teoria matematica. La storia, infatti, mostra che l'attività con lo strumento, seppur fondamentale, non è di per sé sufficiente alla costruzione del sapere matematico. L'uso dell'abaco è stato solo l'origine del processo, mentre un passo cruciale è dato dalla transizione dall'uso dell'abaco per rappresentare quantità, alla registrazione su carta, e in particolare l'introduzione del segno grafico "0" per indicare l'asta vuota. La transizione dall'uso dell'artefatto alla scrittura da esso derivata ha rappresentato l'elemento chiave nell'evoluzione dal contare pratico alla teoria della rappresentazione dei numeri (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Rotman, 1987).

In generale, la produzione di un segno, grafico o di altra natura, permette l'emergere di significati che, pur mantenendo una relazione con l'azione mediata dall'artefatto, possono evolvere, fino a guadagnare l'autonomia necessaria per poter essere usati per la soluzione di problemi diversi da quelli che li hanno originati. Utilizzando le parole di Vygotskij, possiamo dire che l'interiorizzazione del segno prodotto in relazione all'uso dell'artefatto concorre alla formazione di concetti che arrivano a trascendere lo strumento stesso (Vygotskij, 1978).

Un classico esempio è dato dall'artefatto compasso in relazione all'oggetto matematico circonferenza. In uno studio sull'uso del compasso e di sagome circolari per disegnare circonferenze, Chassapis (1998) mostra come i due diversi artefatti, strutturando diversamente l'operazione di disegno del cerchio, supportano diversi processi e quindi concorrono diversamente alla formazione del concetto di circonferenza. Attraverso l'uso del compasso viene evidenziata l'invarianza della distanza dal centro di ciascun punto della curva mentre il movimento intorno alla sagoma circolare pone l'accento sulla curvatura costante.

5.3.2 Polisemia dell'artefatto

Nella classe, la richiesta di usare un artefatto in relazione a un compito specifico determina il modo in cui è effettivamente usato dagli studenti, e dunque i significati che dall'attività con esso possono emergere. Tali significati possono richiamare per l'esperto (in genere l'insegnante) significati matematici e dunque conoscenze che possono essere obiettivi didattici di un intervento. Tuttavia, non è detto che lo studente sia immediatamente consapevole dei significati matematici che possono essere associati all'artefatto stesso.

Si definisce **potenziale semiotico** di un artefatto la duplice relazione che lo lega da un lato con i significati personali degli allievi, così come emergono nelle attività di classe, e dall'altro con i significati matematici evocati (agli occhi dell'esperto) dall'uso dell'artefatto (lato sinistro della Fig. 5.3.2.1). In questo senso, l'analisi dei modi d'uso di un artefatto in relazione a compiti specifici diventa un elemento chiave della pianificazione di un intervento didattico centrato sull'uso dell'artefatto stesso. La sequenza di attività da presentare agli allievi, così come l'organizzazione di tali attività, deve basarsi sull'analisi del potenziale dell'artefatto in modo che i significati emergenti nello svolgimento del compito con l'artefatto possano svilupparsi acquisendo, anche per gli allievi, lo status di significati matematici.

In che modo si esplicita il potenziale semiotico dell'artefatto? Quando viene chiesto loro di svolgere una consegna con l'artefatto, gli allievi producono testi (verbali, scritti, rappresentazioni grafiche) composti di segni che hanno significato se riferiti alla particolare consegna o all'uso dell'artefatto stesso: sono segni situati. Per via dello stretto legame che intercorre fra questi segni e l'uso dell'artefatto, sono detti **segni artefatto**. Attraverso il processo di insegnamento/apprendimento i segni prodotti dagli studenti sono messi in relazione con quelli culturalmente condivisi, quelli che possono essere chiamati **segni matematici** (lato destro della Fig. 5.3.2.1).

La differenza sostanziale fra i segni artefatto e quelli matematici è il contesto a cui si riferiscono: i segni artefatto fanno riferimento all'attività realizzata con l'artefatto stesso, possono essere messi in relazione con quella che Radford (2003) chiama *generalizzazione contestuale* o con ciò che Sfard (2009, cfr. sez. 5.2) definisce come *uso guidato da una routine*. Per esempio: se uno studente usa la parola "circonferenza" per riferirsi a tutte le linee chiuse che vengono prodotte usando un compasso, sta utilizzando un segno che appare come matematico ma che può essere ben lontano dal significato culturalmente condiviso, ossia l'insieme dei punti con la stessa distanza dal centro.

In definitiva, uno degli obiettivi cruciali dell'insegnamento è quello di promuovere "l'evoluzione dei segni che esprimono la relazione tra l'artefatto e i compiti in segni che esprimono la relazione tra artefatto e sapere" (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 283). Un ruolo centrale è giocato dall'insegnante.

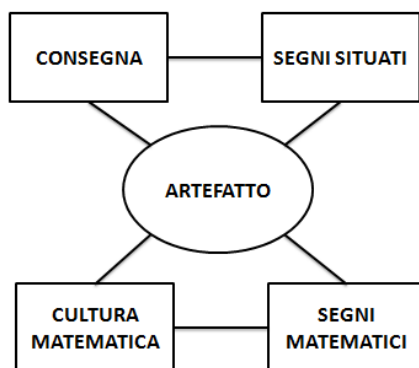


Fig. 5.3.2.1: Modello della polisemia dell'artefatto nella TMS.

Durante il processo di mediazione semiotica, l'insegnante usa diversi segni specificatamente per passare dai segni artefatto a quelli matematici. Tutti i segni che sono utilizzati con questo obiettivo vengono definiti **segni pivot** (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Esempi di segni pivot sono le ibridazioni di parole o frasi che appartengono al dominio dell'artefatto (come il riferimento a parti dell'artefatto, comandi di un software, ecc.) con altre parole prese dalla cultura matematica. Un artefatto sarà chiamato **strumento di mediazione semiotica** quando viene usato intenzionalmente dall'insegnante per mediare un contenuto matematico attraverso un intervento didattico pianificato intenzionalmente.

L'insieme dei segni artefatto e matematici, insieme ai pivot che li mettono in relazione, viene chiamato **catena semiotica**. Questo costrutto è stato introdotto in letteratura da Walkerdine (si veda per esempio Walkerdine, 1990) ed è stato applicato al contesto della didattica della

matematica da diversi altri autori. Per esempio, Presmeg (2006) definisce il processo di concatenazione come “una sequenza di astrazioni creata preservando le importanti relazioni con la pratica quotidiana degli studenti” (p.166). L’attuazione di questo tipo di processo in classe viene studiata da Hall (2000) nella sua tesi di dottorato. In questo lavoro viene proposto a insegnanti di creare catene di consegne volte a sviluppare concetti matematici: la prima consegna è sempre relativa a situazioni del quotidiano e si procede step-by-step verso una conoscenza matematica di tipo generale. Spesso viene fatto uso di manipolativi durante questo processo.

Una catena semiotica viene quindi intesa da Presmeg e Hall come l’insieme di passaggi da una situazione di vita quotidiana a un contenuto matematico. Nella TMS la catena semiotica non inizia necessariamente da una situazione di vita quotidiana ma da un’attività mediata da un artefatto progettato a partire da conoscenze matematiche. Se nei lavori di Presmeg (2006) e Hall (2000) la catena è costruita a priori dall’insegnante, nel caso della TMS viene realizzata dall’interazione fra il docente e la classe ed è costituita dall’insieme di segni che questi producono nel corso delle attività con l’artefatto e nella discussione secondo un processo ciclico di produzioni collettive e individuali di segni.

Bartolini Bussi e Mariotti (2009), a proposito dei segni artefatto, affermano che:

Questa categoria di segni artefatto include tanti e diversi tipi di segni e, ovviamente, i segni non verbali come gesti o disegni, o combinazioni di essi. (p.292)

Pertanto i gesti sono da intendersi come segni nella TMS, e hanno sicuramente un ruolo nella costruzione delle catene semiotiche. Inoltre le autrici contemplano la possibilità di considerare come segni artefatto delle “combinazioni” di gesti e/o disegni. Tale combinazione, è stata documentata e analizzata in diversi lavori (Bartolini Bussi, 1991; Bartolini Bussi & Maschietto, 2009; Maffei et al., 2009). I gesti utilizzati possono essere sia gesti che mimano un’azione o un oggetto, in letteratura chiamati gesti iconici (Mcneill, 1992), sia gesti che servono a individuare un oggetto o una posizione nello spazio, come il gesto di indicare. Quest’ultimi sono generalmente detti gesti dettici (*ibidem*).

I gesti possono anche svolgere il ruolo di segni pivot (Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank, 2015). Questo avviene per esempio quando un gesto inizialmente prodotto da uno studente viene poi ripreso dall’insegnante⁴⁴ e quindi condiviso dall’intera classe. Un gesto viene classificato come segno pivot quando ha la potenzialità di introdurre nel discorso dei segni matematici. Per sottolineare l’esistenza di questo tipo di fenomeno, si parla anche di **catene semiotiche multimodali** (Maffia & Sabena, 2015; Sabena, Krause & Maffia, 2016).

5.3.3 Il ciclo didattico

Usando un dato strumento si costruiscono significati legati a esso e al suo uso: le attività semiotiche libere o programmate (dialogo, scrittura di testi, conversazioni) che accompagnano o seguono l’azione con l’artefatto non solo rivelano l’emergere di tali

⁴⁴ Il momento in cui l’insegnante, notando la potenzialità che un gesto ha di richiamare un segno di tipo matematico, utilizza un gesto fatto da uno studente associando ad esso una termine matematico viene detto anche *gioco semiotico* (Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009).

significati, ma costituiscono, in una prospettiva vygotskiana, il contesto sociale nel quale i significati evolvono.

Nello sviluppo culturale del bambino ogni funzione compare due volte, su due piani: dapprima compare sul piano sociale, poi sul piano psicologico. Prima compare tra due persone, sotto forma di categoria interpsicologica, poi all'interno del bambino, come categoria intrapsicologica (Vygotskij, 2010, p. 28)

Pertanto la transizione dai significati personali a quelli culturalmente condivisi deve necessariamente passare attraverso l'interazione con gli altri, i pari e i più esperti. In particolare l'insegnante assume il particolare ruolo di "voce" della cultura condivisa dal mondo che si trova all'esterno della classe. Il ruolo chiave del docente è quello dell'esperto che è consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto e quindi organizza attività collettive finalizzate alla costruzione di significati matematici.

La teoria fornisce quindi un'indicazione di design didattico: l'attività con l'artefatto e la contestuale o successiva produzione di segni individuale deve alternarsi ciclicamente con condivisioni collettive dei significati (Fig. 5.3.2.1). Questo avviene all'interno della **discussione matematica**.

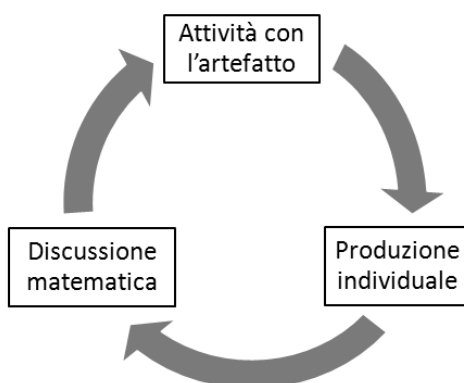


Fig. 5.3.2.1: Il ciclo didattico secondo la TMS.

Il costrutto di discussione matematica ha radici lontane e definizioni diverse. Per esempio, secondo Pirie e Schwarzenberger (1988) si tratta di una "conversazione intenzionale su un soggetto matematico in cui ci sono contributi e interazioni genuini degli allievi" (citato in Bartolini Bussi, 1991, p. 9). Nel documento *Matematica per il cittadino*, prodotto dall'Unione Matematica Italiana (2001), si parla invece di una "polifonia di voci articolate su un oggetto matematico che è uno degli scopi dell'attività di insegnamento/apprendimento" (p.107). Quest'ultima definizione viene ripresa da lavori precedenti di Bartolini Bussi e colleghi (Bartolini Bussi & Boni, 1995; Bartolini Bussi et al., 1995; Bartolini Bussi, 1996) in cui viene evidenziata la non casualità dell'uso del termine 'voci', che è da intendersi con riferimento all'uso che ne viene fatto da Wertsch (1991) seguendo la tradizione dei lavori di Bakhtin, ovvero come una forma di pensiero/comunicazione che rappresenta "la prospettiva di un individuo, il suo orizzonte concettuale, le sue intenzioni, il suo modo di vedere il mondo" (Bartolini Bussi, 1996, p. 16).

Una modalità di discussione matematica è il dibattito scientifico su un oggetto matematico comune; tale dibattito viene introdotto e orchestrato dall'insegnante per raggiungere delle conclusioni condivise sull'oggetto matematico al centro della discussione. La voce portata dall'insegnante rappresenta la cultura matematica ed è quindi diversa rispetto alle voci che sono introdotte nella discussione dagli studenti; queste "portano in scena prospettive di altre categorie sociali e culturali (ad esempio quelle della pratica extrascolastica connessa al sapere matematico espresso dall'insegnante)" (Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 227).

Le parole del bambino coincidono con le parole dell'adulto nel loro riferimento all'oggetto, cioè indicano gli stessi oggetti, si riferiscono allo stesso cerchio di fenomeni; non coincidono però nel loro significato. (Vygotskij, 1992, citato in Bartolini Bussi & Boni, 1995, p. 232)

Quando la classe ha una lunga esperienza in questo tipo di dibattiti, le diverse voci vengono sintetizzate negli interventi degli allievi (Bartolini Bussi, 1996). Nel caso in cui le voci emerse nell'attività collettiva riemergano nelle consegne individuali allora tali voci sono state interiorizzate (Vygotskij, 1978) e sono espresse, implicitamente o esplicitamente, da un attore individuale che sta parlando con se stesso (Bartolini Bussi, 1996).

Le discussioni possono essere classificate in diverse categorie a seconda dell'oggetto di discussione e della modalità (Bartolini Bussi, 1991). Sono discussioni di matematizzazione quelle in cui si risolve collettivamente un problema oppure si condividono le soluzioni individuali. Sono discussioni di concettualizzazione quelle che partono da domande relative al significato di un termine o di qualsiasi altro segno matematico. Quest'ultima modalità di discussione ha lo scopo di espandere tali significati ed è generalmente utilizzata all'inizio di un ciclo didattico per richiamare esperienze pregresse degli studenti oppure al termine di discussioni di altro tipo al fine di fare sintesi (ibidem).

5.3.4 Il ruolo dell'insegnante

Seguendo quanto detto nelle sezioni precedenti, appare evidente che nel quadro teorico della TMS l'insegnante è un attore fondamentale nel processo di insegnamento/apprendimento. Pertanto, l'uso di un artefatto all'interno della didattica non può essere studiato senza tener conto delle azioni del docente. "L'insegnante, introducendo un artefatto in una discussione matematica per interpretarne il funzionamento o discutere la soluzione di uno specifico problema, ne sfrutta il potenziale semiotico; evoca situazioni già vissute o ne crea di nuove e concede tempo per l'articolarsi delle voci" (Maffia & Mariotti, 2016, p. 9), sia quelle della pratica portate dagli allievi, e centrate sull'esperienza con l'artefatto, sia quella della matematica portata dall'insegnante stesso. Cercherà di rendere accessibili agli allievi i nuovi significati che sono il suo obiettivo didattico. Il docente consapevole del potenziale semiotico di un artefatto organizza tutte le fasi del lavoro al fine di farlo emergere nelle attività con l'artefatto e svilupparlo nell'ambito del lavoro collettivo della classe.

L'insegnante agisce come mediatore che utilizza l'artefatto per mediare contenuti matematici agli studenti. In altre parole: **l'insegnante utilizza l'artefatto come strumento di mediazione semiotica**. A causa dell'importanza culturale di questo processo noi possiamo definire l'insegnante un *mediatore culturale*. Tale espressione non

si riferisce all'atto concreto dell'utilizzare uno strumento per svolgere un compito, ma piuttosto al fatto che significati nuovi, legati al reale utilizzo di uno strumento, possono essere generati e possono evolvere sotto la guida di un esperto. (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, p. 285 , enfasi nell'originale)

Mariotti e Maracci (2010) hanno studiato le azioni dell'insegnante durante la discussione matematica e le hanno categorizzate in schemi, ovvero insiemi di situazioni in cui l'insegnante mostra dei comportamenti invarianti. A ciascuno schema corrispondono specifici obiettivi che sono di seguito descritti.

Lo schema ***back to the task*** (ritorno alla consegna) è definito dalla classe di situazioni caratterizzate dalla necessità di promuovere negli studenti la produzione di segni artefatto. In queste situazioni l'insegnante richiede esplicitamente di ricostruire quanto fatto con l'artefatto, il tentativo di richiamare tale attività contribuisce alla ricostruzione di un contesto condiviso e quindi alla condivisione di segni. L'obiettivo è quello di provocare la maggiore produzione possibile di segni artefatto personali all'interno di tale contesto condiviso.

Quando dalla discussione emerge una rete di segni che viene condivisa si crea l'esigenza di selezionare gli aspetti pertinenti rispetto all'obiettivo di raggiungere significati culturalmente condivisi. Queste situazioni corrispondono allo schema ***focalization*** (focalizzazione) i cui obiettivi sono, appunto, l'evidenziazione di specifici segni al fine di selezionare gli aspetti pertinenti dei significati di tali segni e la circoscrizione dei riferimenti all'artefatto per supportare la presa di coscienza degli aspetti chiave da parte degli studenti. Per far questo l'insegnante dirige verbalmente l'attenzione degli studenti su certi aspetti dell'artefatto, circonda il significato di alcuni segni isolando aspetti chiave dalla molteplicità degli altri possibili. Questi primi due schemi, insieme, costituiscono quella che viene chiamata **costruzione collettiva di segni condivisi** (ibidem).

Lo sviluppo dei segni artefatto verso segni matematici consiste di altri due schemi. Il primo è detto ***ask for a synthesis*** (richiesta di sintesi) e raccoglie le situazioni in cui la discussione ha già portato all'emergere di segni condivisi stabili che condensano gli aspetti chiave dell'esperienza comune con l'artefatto. In queste situazioni si ha la necessità di generalizzare e decontestualizzare i significati emersi. L'insegnante ha l'obiettivo di promuovere tale decontestualizzazione/generalizzazione mantenendo solo quei significati personali che sono considerati pertinenti al segno matematico obiettivo. Per farlo, richiede esplicitamente di fare sintesi supportando la formazione di un ambiente semiotico in cui segni matematici possono essere prodotti e messi in relazione con segni artefatto. Può incentivare esplicite connessioni fra le due tipologie di segni.

Quando la discussione ha portato a una generalizzazione o a una decontestualizzazione dei significati dall'uso dell'artefatto, è necessario ratificare l'accettabilità di un segno nel contesto della matematica. Queste sono le situazioni in cui l'insegnante fornisce una sintesi; si tratta dello schema ***provide a synthesis***. Obiettivi di questo schema sono una formulazione matematica che introduca i segni matematici desiderati come evoluzione dei segni personali emersi precedentemente e l'evidenziazione delle relazioni fra i segni emersi nei vari momenti della discussione. L'insegnante fornisce una esplicita sintesi in cui possono essere introdotti

dei nuovi segni matematici in continuità coi segni emersi nella discussione. “Un’orchestrazione della discussione matematica realizzata attraverso un continuo avanti e indietro fra il contesto dell’artefatto e quello matematico può promuovere un ricco intreccio di significati personali e matematici” (Mariotti & Maracci, 2010, p. 103).

5.4 Domande di ricerca

Nel primo capitolo si è identificato l’importante ruolo delle proprietà della moltiplicazione nel richiamo dei fatti moltiplicativi. Inoltre, la tavola pitagorica emerge dalle memorie degli adulti come un artefatto utile per l’apprendimento delle cosiddette tabelline. La letteratura analizzata nei capitoli precedenti ha permesso di individuare un artefatto che ha caratteristiche simili alla usuale tavola pitagorica e con particolari pregi, la tavola di Laisant. Alla luce del quadro concettuale e teorico presentato in questo capitolo è possibile riformulare le domande di ricerca inizialmente proposte facendo riferimento ai costrutti definiti. In particolare, si vogliono descrivere gli esiti di un processo di insegnamento/apprendimento in cui è coinvolta la tavola, ma anche descrivere le connessioni fra tali esiti e lo svolgimento del processo stesso. Pertanto si formulano due domande di ricerca (una sui prodotti, l’altra sui processi) dettagliando ciascuna delle due con delle sotto-domande che fungeranno da guida per il design della ricerca e quindi per la raccolta dei dati e la loro analisi.

- a. Che prestazioni hanno gli studenti nel richiamo dei fatti moltiplicativi dopo l’intervento con la tavola di Laisant?
 - Gli studenti hanno buone prestazioni nel richiamo dei fatti moltiplicativi?
 - Gli studenti ricostruiscono i fatti moltiplicativi facendo leva sul pensiero relazionale?
 - Che differenze ci sono in gruppi-classe di età diversa?
- b. L’analisi del processo di mediazione semiotica attraverso la tavola di Laisant (con i cicli didattici progettati) mostra lo sviluppo del significato matematico di “proprietà di una operazione” – in particolare dei significati matematici di “proprietà commutativa della moltiplicazione” e “proprietà distributiva”? Ci sono differenze fra gruppi-classe di diversa età?
 - Quali aspetti del potenziale semiotico dell’artefatto emergono nell’attività di classe?
 - Quali catene semiotiche permettono di descrivere l’evoluzione dei significati?
 - Quale il ruolo dell’insegnante/esperto nella gestione del processo di mediazione semiotica verso le proprietà della moltiplicazione?

6 Disegno della ricerca

Al termine del capitolo precedente, sono state enunciate le domande di ricerca che hanno guidato il lavoro di ricerca ed in particolare la progettazione dell'intervento sperimentale in classe, la raccolta dei dati e la loro interpretazione. In questo capitolo si presenta l'insieme dei metodi messi in atto nella progettazione e l'implementazione della ricerca, in termini di tempi e modalità, giustificandone l'adequatezza. Pertanto, verrà delineato quello che, nella letteratura anglosassone, viene detto *research design*, ovvero il progetto della ricerca.

In particolare, la prima sezione di questo capitolo è dedicata all'inserimento del design della ricerca nei quadri metodologici generalmente riconosciuti nella ricerca in didattica. Nella sezione successiva si descrivono le fasi in cui la ricerca è suddivisa, con un particolare focus sui diversi momenti di raccolta dati. La sezione 6.3 riporta le modalità di raccolta dati relativa all'intervento in classe mentre gli altri strumenti utilizzati per valutare le performance degli studenti prima e dopo l'intervento sono descritti nel dettaglio all'interno della quarta sezione. Nell'ultima sezione vengono elencati e giustificati i metodi utilizzati per l'analisi delle diverse tipologie di dati.

6.1 Ricerca per l'innovazione come esempio di Ricerca Design-Based

Come già detto in precedenza, per le sue finalità, questo lavoro è inquadrabile nel contesto della ricerca per l'innovazione, secondo il paradigma definito da Arzarello e Bartolini (1998). Infatti, questo trend di ricerca abbraccia i lavori che hanno contemporaneamente lo scopo di:

1. produrre esempi paradigmatici di miglioramento dell'insegnamento della matematica;
2. indagare le condizioni che permettono od ostacolano tali processi.

In questo tipo di approccio la teoria e la pratica si intrecciano generando approcci misti ai problemi della didattica: gli insegnanti e i ricercatori agiscono insieme sia nella fase di progettazione sia come osservatori partecipanti nell'implementazione.

L'intervento sperimentale proposto nel contesto di una ricerca per l'innovazione deve svolgersi in un contesto reale di classe, all'interno di ore curricolari svolte nella scuola. Questo implica la necessità di concordare le modalità di attuazione del lavoro con le insegnanti delle classi coinvolte. Se questo tipo di approccio permette di avere dati realistici di tipo ecologico (Neisser, 1978), d'altra parte impone vincoli legati al funzionamento della scuola, alla normativa per essa vigente e alle esigenze delle insegnanti che partecipano alla sperimentazione.

Il modello a cui viene fatto riferimento nel lavoro di Arzarello e Bartolini Bussi (*ibidem*) è quello del *teaching experiment* (TE).

Lo scopo di un TE è comprendere il progresso di un gruppo di studenti su un periodo temporale esteso (Steffe & Thompson, 2000). Consiste in una sequenza di episodi di insegnamento, ciascuno dei quali include un insegnante, uno o più studenti, un osservatore e

un metodo di raccolta dati (usualmente video). Prima del TE si formula un'ipotesi, lo scopo è testare l'ipotesi sia in vista di una sua conferma che di eventuali riformulazioni.

Alla fine di ogni episodio il ricercatore torna sulle proprie ipotesi, di volta in volta postula possibili interpretazioni in riferimento alle azioni e alle parole degli studenti; cioè il ricercatore costruisce un quadro di riferimento in cui le azioni degli studenti acquisiscono una loro razionalità.

Nella letteratura più recente, gli obiettivi e le modalità del TE inclusi nel più generale quadro della *design-based research* (Cobb et al., 2003). Tale termine può essere tradotto in italiano come “ricerca basata su progetti” (Pellerey, 2005).

Di fatto la metodologia design-based ha lo scopo di coniugare sul piano progettuale le esigenze teoriche e pratiche mediante la progettazione di interventi basati su assunzioni di natura teorica derivanti da studi precedenti e la puntuale verifica della loro validità nel contesto concreto della pratica didattica.

[È una] etnografia interventista, attraverso la quale le ricerche perturbano i contesti educativi tipici introducendo progetti influenzati da quadri teorici, perché intendono trarre implicazioni per nuove teorie sull'insegnamento, l'apprendimento e la scolarizzazione. (Dede, 2005, p. 6, citato in Pellerey, 2005)

Nella ricerca basata su progetti sono previste diverse tipologie di settings. Il TE viene incluso fra questi, tant'è che nel loro articolo, Cobb e colleghi (2003) citano proprio il lavoro di Steffe e Thompson (2000) a cui prima si è fatto riferimento. Altri autori concordano con la catalogazione del TE come particolare forma di ricerca design-based (Molina et al., 2007).

Una analisi approfondita dell'approccio presentato da Steffe e Thompson (2000) rivela alcune piccole ma importanti differenze rispetto a quanto dichiarato da Cobb e colleghi (2003). Di fatto il TE ha lo scopo di comprendere il progresso degli studenti, ovvero di fornire una teoria che spieghi l'evoluzione del processo di apprendimento; nel caso della ricerca design-based a questo si aggiunge la volontà di costruire teoria anche sui mezzi con cui tale processo viene implementato, la cosiddetta *learning ecology* (*ibidem*).

Inoltre, il setting previsto dal TE nella formulazione di Steffe e Thompson, prevede un contesto semi-reale, ovvero l'attuazione di interventi su gruppi scelti di studenti. L'approccio design-based richiede un contesto reale.

Anche se vi è una differenza rilevabile fra TE e ricerca basata su progetti, non c'è un evidente contrasto tra i tipi di interventi inclusi nella design-based e il quadro più generale della ricerca per l'innovazione. Infatti gli scopi dichiarati nel lavoro di Arzarello e Bartolini Bussi (1998) appaiono in linea con quanto affermato da Cobb e colleghi (2003). Inoltre la relazione auspicata fra teoria e pratica sembra pressoché equivalente. Tuttavia, al momento in cui i ricercatori italiani hanno messo in luce le peculiarità della ricerca in didattica della matematica locale, il TE era l'unica metodologia interventista generalmente accettata. *Uno sguardo attuale porta a classificare la Ricerca per l'Innovazione come un particolare tipo di ricerca design-based con delle specificità legate al setting e al contenuto di ricerca.*

Il disegno di questa ricerca prende le mosse a partire da quest'ultimo assunto. Infatti, per quel che riguarda l'intervento descritto in questo lavoro, la scelta di studiare il ruolo dell'artefatto rispetto ad un obiettivo didattico e di farlo all'interno di classi reali, porta a inquadrare la ricerca qui descritta nel contesto della ricerca design-based.

Così come classicamente avviene nella ricerca per l'innovazione, insegnanti e ricercatore agiscono insieme sia nella fase di progettazione sia come osservatori partecipanti nell'implementazione. Nell'esposizione dei metodi di ricerca si specificheranno, di volta in volta, le scelte che sono dipese dai limiti dettati dal contesto in cui la si è svolta la sperimentazione.

6.2 Fasi della ricerca

L'organizzazione delle fasi della ricerca è guidata dalle domande di ricerca presentate nel capitolo precedente. Un primo aspetto di rilievo concerne le domande relative a differenze nel caso di studenti di età diverse. Pertanto, si presenta la necessità di effettuare l'intervento in classi con studenti di età diversa. Si è deciso di attuarlo in una classe seconda della scuola primaria e in una classe quinta.

La scelta di questi due livelli è legata al fatto che, tradizionalmente, in Italia la moltiplicazione è introdotta nella classe seconda. Pertanto gli studenti della classe scelta stanno acquisendo le prime conoscenze su questa operazione aritmetica e non hanno ancora memorizzato nessun fatto moltiplicativo: possiamo dire che l'intervento progettato coincide con la prima introduzione delle proprietà delle operazioni. Questo riduce al minimo le possibili interferenze e rende più semplice il compito di testarne l'efficacia nella prima memorizzazione delle cosiddette tabelline.

Nel caso della classe quinta, invece, ci si trova al termine della scuola primaria, momento in cui molti fatti aritmetici sono già stati appresi e tutte le proprietà delle operazioni sono già state introdotte. Pertanto, le consegne progettate non sono finalizzate a presentare la moltiplicazione e le sue proprietà, piuttosto hanno l'obiettivo di riorganizzare quanto già presente in memoria, mettendo in relazione nuovi punti di vista con apprendimenti passati.

L'uso dell'artefatto in questi due diversi livelli e l'implementazione delle consegne progettate hanno quindi obiettivi diversi nei due livelli, da una parte "costruire" dall'altra "consolidare" (o mettere in relazione, riorganizzare, sistematizzare). Il confronto fra i risultati ottenuti nei due livelli può fornire informazioni in merito al fatto che l'intervento sia più o meno efficace per perseguire un obiettivo piuttosto che l'altro, ma anche sulla possibilità di recuperare conoscenze significative anche a distanza di tempo.

Il fatto di prevedere un intervento in una classe quinta apre la problematica di conoscere gli le abilità e conoscenze pregresse degli studenti coinvolti. Tali informazioni possono essere parzialmente reperite attraverso un'intervista all'insegnante.

La volontà di evidenziare lo sviluppo del pensiero relazionale negli studenti richiede tuttavia di poter confrontare se e come gli studenti mettono in atto tale tipo di pensiero prima e dopo

l'intervento. Quindi, per quanto riguarda gli studenti della classe quinta, si è reso necessario prevedere un pre-test finalizzato a mettere in evidenza l'uso di pensiero relazionale nel contesto moltiplicativo (sez. 6.4.1). Questo tipo di pre-test non appare significativo nel caso degli studenti della classe seconda che, al momento dell'inizio della sperimentazione, non conoscono in nessun modo le proprietà della moltiplicazione.

L'intervento in classe si è svolto sul lungo periodo; infatti, l'implementazione delle consegne progettate si è alternata con le molte altre attività didattiche in cui le classi sono coinvolte, seguendo anche la disponibilità delle insegnanti. Pertanto, altre attività sono state svolte dai bambini e hanno in parte condizionato gli esiti dell'intervento; così come è ovvio che succeda in un contesto reale. I dati relativi a queste attività sono stati raccolti tramite interviste alle maestre e con l'analisi dei quaderni degli studenti, sui quali sono state regolarmente registrate tutte le consegne proposte e le soluzioni date dai bambini. Questo materiale pertanto arricchisce l'analisi fornendo ulteriori dati; soprattutto, come si vedrà, per l'analisi dei segni.

L'implementazione delle consegne progettate per l'intervento è sempre avvenuta alla presenza congiunta dell'insegnante di classe e del ricercatore. Il momento di lavoro a gruppi e la discussione collettiva sono stati video-registrati; gli elaborati individuali degli studenti sono stati acquisiti e scansati così come descritto più dettagliatamente nella sezione 6.3.

Per rispondere alle domande di ricerca relative all'efficacia dell'intervento, si rendono necessari strumenti per la valutazione delle prestazioni in merito al richiamo dei fatti moltiplicativi nonché della tipologia di pensiero attivato dagli studenti (relazionale o procedurale). Per quanto concerne le prestazioni, si è fatto ricorso a strumenti già presenti in letteratura (sez. 6.4.2) che però non permettono un'analisi dettagliata delle strategie di richiamo messe in atto dagli studenti. Pertanto, a questi si sono aggiunti strumenti più sensibili: interviste volte a far esplicitare agli studenti le modalità di richiamo dei fatti aritmetici (sez. 6.4.3).

La volontà di approfondire lo studio del pensiero relazionale sviluppato e il suo collegamento con l'attività svolta a seguito delle consegne proposte nell'intervento, porta alla necessità di proporre non solo consegne di richiamo dei fatti moltiplicativi ma, più in generale, consegne in cui vengano richiamati i segni (orali, scritti o disegnati) coinvolti precedentemente nell'attività di classe. Un test di questo tipo è stato realizzato in entrambe le classi a distanza di tempo dal termine dell'intervento (si vedano le sez. 6.4.4 e 6.4.5). Questo è in parte legato alla scelta di indagare quel che è stato effettivamente interiorizzato anche nel lungo termine; dipende anche dal fatto che l'insieme dell'intervento e delle interviste si è concluso al termine dell'anno scolastico e quindi non è stato possibile attuare altre indagini prima della fine delle vacanze estive degli studenti. Un cronogramma delle diverse fasi della ricerca è riportato in forma schematica in figura 6.2.1.

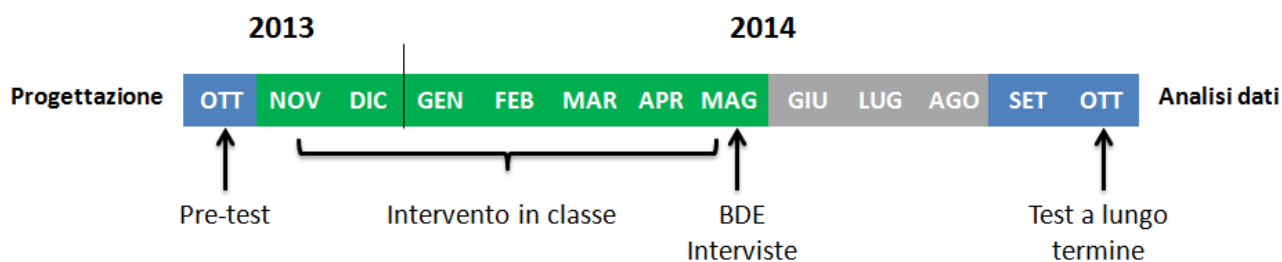


Fig. 6.2.1: Cronogramma della ricerca.

6.3 Raccolta dati sull'intervento in classe

Le consegne progettate per l'intervento sono organizzate in cicli didattici in cui vengono realizzate attività semiotiche individuali e collettive. Le attività collettive sono mediate dall'insegnante o dal ricercatore che assumono entrambi il ruolo di esperti intervenendo nella discussione. Questo è possibile perché le finalità del processo di mediazione semiotica sono condivise. Le consegne sono elencate e spiegate dettagliatamente nel capitolo 7.

I video in classe sono realizzati dall'insegnante o dal ricercatore in modo alternato cosicché, nel momento in cui uno dei due interviene nella discussione collettiva, venga ripreso dall'altro. La videocamera è mobile così da avere un'immagine di chi sta parlando di volta in volta. Questo permette di ottenere informazioni non solo su quello che viene detto ma anche sulla comunicazione non verbale. Al termine di ogni discussione, si acquisisce anche l'immagine della lavagna o altri eventuali supporti utilizzati per condividere rappresentazioni grafiche (cartelloni, LIM).

Anche nel caso delle attività di gruppo la videocamera è mobile. Registratori audio, situati sui tavoli attorno ai quali gli studenti lavorano, permettono di ottenere la parte di dialogo che non è videoregistrata nei momenti in cui la telecamera è puntata in altra direzione.

Gli elaborati prodotti nelle attività semiotiche individuali sono acquisiti e scansionati per ciascun alunno.

Il periodo di implementazione delle consegne è un periodo lungo (da novembre a maggio, Fig. 6.2.1) perché le consegne non sono realizzate in immediata successione, ma con una cadenza circa mensile. Pertanto, fra l'implementazione di una consegna e quella successiva, gli studenti sono impegnati in altre attività matematiche. Fra queste, la risoluzione di problemi afferenti al campo concettuale moltiplicativo. La videoregistrazione non viene fatta durante tutte queste attività, ma soltanto quando sono presentate agli studenti le consegne descritte nel capitolo successivo. La documentazione delle attività che avvengono fra una consegna e l'altra avviene tramite interviste all'insegnante e analisi dei quaderni degli studenti che sono scansionati o fotografati. Tale analisi viene integrata a quella dei video seguendo il metodo descritto successivamente (sez. 6.5.2).

Gli strumenti utilizzati per raccogliere dati prima e dopo l'intervento sono descritti nella sezione successiva.

6.4 Altri strumenti per la raccolta dati

6.4.1 Pre-test

Scopo del pre-test è quello di indagare il pensiero relazionale attivato dagli studenti della classe quinta prima dell'inizio dell'intervento in classe. Pertanto, il pre-test viene somministrato agli studenti di questa classe a ottobre 2013 (cfr Fig. 6.2.1). Dato che questo test deve mettere in luce il pensiero relazionale, le consegne richiedono interpretazione del simbolo di uguaglianza, analisi della struttura di espressioni aritmetiche e applicazione delle proprietà delle operazioni.

Si è deciso di proporre una consegna utile a verificare contemporaneamente questi tre aspetti. In particolare, si richiede agli studenti di completare uguaglianze numeriche inserendo dei numeri mancanti (Fig. 6.4.1.1). Viene poi chiesto agli studenti se, nel farlo, hanno applicato qualche proprietà delle operazioni. Le uguaglianze riguardano tutte e quattro le operazioni; l'analisi si focalizza sulle espressioni aritmetiche che coinvolgono la moltiplicazione. Le uguaglianze che coinvolgono altre operazioni hanno lo scopo di non rendere esplicito per il bambino quel è focus dell'indagine, onde evitare che gli studenti forniscano come risposta alla seconda domanda tutte le proprietà della moltiplicazione nel tentativo di "indovinare" la risposta attesa.

Completa le seguenti uguaglianze inserendo dei numeri sui puntini		
$5 + \dots = 7$	$3 \times \dots = \dots$	$\dots : 10 = 5$
$\dots + \dots = 12$	$\dots = 2 \times 9$	$\dots \times 1 = \dots + 2$
$\dots = 4 \times \dots$	$\dots \dots \dots = 15$	$\dots = 12$
$(3 + 2) \times (\dots + 1) = \dots$	$8 \times 3 = 6 \times \dots$	$6 \times \dots = \dots \times 6 = \dots \times \dots$
$0 \times \dots = \dots \times 1$	$3 \times (2 + 5) = 3 \times 2 + 3 \times \dots$	$\dots \dots \dots = \dots \dots \dots$
Negli esercizi precedenti hai usato qualche proprietà delle operazioni? Se sì, quali?		

Fig. 6.4.1.1: Consegne del pre-test.

Fra le uguaglianze proposte, le prime rispettano lo schema prototipico $A \times B = C$ che viene poi successivamente violato proponendo uguaglianze della forma $C = A \times B$ oppure $A \times B = C \times D$. Fra queste, ve n'è una ($6 \times \dots = \dots \times 6$) che può essere completata applicando la proprietà commutativa piuttosto che facendo ricorso ai calcoli. Analogamente, l'uguaglianza $3 \times (2 + 5) = 3 \times 2 + 3 \times \dots$ è completabile con un'applicazione diretta della proprietà distributiva. La presenza di una seconda espressione è finalizzata a ottenere ulteriori dati per la valutazione del senso della struttura e, in particolare, l'interpretazione delle parentesi.

6.4.2 Batteria per la Discalculia Evolutiva (BDE)

Dato che una delle domande di ricerca riguarda la bontà delle performance degli studenti nel richiamo dei fatti moltiplicativi, si rende necessario uno strumento che fornisca dati e criteri per definire tali performance. Con la finalità di confrontare le prestazioni degli studenti

coinvolti nella sperimentazione con quelle di coetanei non coinvolti, si è scelto di utilizzare un test già validato su un grande campione di studenti italiani. Si è fatto uso del test *Batteria per la Discalculia Evolutiva* (Biancardi & Nicoletti, 2004) realizzato per la diagnosi di discalculia in studenti di scuola primaria e secondaria di primo grado. All'interno del test, alcune consegne richiedono specificatamente il richiamo di fatti moltiplicativi; inoltre il test è stato validato su un largo campione ottenendo così una misura delle prestazioni medie degli studenti per diverse fasce d'età. Pertanto il confronto con tale valore medio permette di valutare le prestazioni dei nostri studenti.

Il test BDE originale è composto di due parti, una finalizzata alla diagnosi delle capacità di elaborazione del numero⁴⁵ e una per quelle di calcolo. Si è deciso di utilizzare soltanto la seconda parte dato che le consegne relative ai fatti moltiplicativi sono tutte in essa contenute. L'uso di una sola delle due parti ha reso più brevi i tempi di somministrazione e ha permesso quindi di far seguire a questo test un'intervista (sez. 6.4.3) senza affaticare eccessivamente il bambino né trattenerlo per molto tempo fuori dalla classe.

Nella parte della BDE dedicata alla diagnosi delle abilità di calcolo sono proposte consegne relative ai fatti aritmetici, al calcolo mentale e al calcolo scritto. Lo svolgimento di tutte queste consegne è necessario per poter calcolare, per ogni studente, quello che viene definito **quoziente di calcolo**. Di fatto, gli autori del test forniscono i valori di media e deviazione standard sia per i punteggi dei singoli item sia per il quoziente di calcolo determinabile a partire dai risultati ottenuti nelle singole consegne.

Per quanto riguarda l'attendibilità del test, la coerenza interna è misurata attraverso il calcolo dell'alpha di Cronbach che è pari a 0,72 per il test di calcolo (Biancardi & Nicoletti, 2004, p. 22). La stabilità dei punteggi nel tempo è valutata mediante test-retest su un sottocampione, ottenendo un coefficiente di correlazione medio di 0,71. La validità è controllata con analisi fattoriale effettuata separatamente per le scale dei due quozienti. Per quanto riguarda il quoziente di calcolo, l'analisi fattoriale porta a spiegare il 67,4% della varianza (*ibidem*, p.23).

Le consegne proposte per la determinazione del quoziente di calcolo sono cinque:

1. **Tabelline.** Viene richiesto agli studenti di elencare i primi dieci multipli di 4 e di 7. La prestazione è considerata completamente corretta se lo studente elenca i numeri in ordine e senza indugi. Un numero sbagliato viene contato come errore, così come un'attesa di più di 2 secondi fra un numero enunciato e il successivo. La variabile tempo viene considerata per escludere le strategie ricostruttive e valutare soltanto le prestazioni di richiamo diretto dalla memoria.
2. **Moltiplicazioni a mente.** Viene proposto un elenco di sedici moltiplicazioni con entrambi i fattori minori di 10. Per le stesse ragioni di cui sopra, viene considerato come errore sia il risultato sbagliato sia un indugio di più di 2 secondi fra l'enunciazione della moltiplicazione da parte del somministratore e la risposta del bambino.

⁴⁵ Nella presentazione della BDE viene detto che la prima parte valuta le abilità di elaborazione del numero. Queste abilità comprendono il posizionamento di numeri sulla retta numerica, la transcodifica fra diversi registri di rappresentazione, il confronto fra numeri (Biancardi & Nicoletti, 2004).

3. **Addizioni e sottrazioni a mente entro la decina.** Viene proposto un elenco di sei addizioni e sei sottrazioni con entrambi i termini e il risultato minori di 10. Per le stesse ragioni di cui sopra, viene considerato come errore sia il risultato sbagliato sia un indugio di più di 2 secondi fra l'enunciazione dell'operazione e la risposta da parte del bambino.
4. **Calcolo mentale: addizioni e sottrazioni oltre la decina.** Viene proposto un elenco di dieci addizioni e dieci sottrazioni in cui uno dei termini o il risultato è maggiore di 10. In questo caso viene considerato come errore il risultato sbagliato. Se dopo l'enunciazione dell'operazione passano più di 15 secondi, si passa all'operazione successiva.
5. **Calcolo scritto.** Al bambino viene consegnato un foglio con nove operazioni (tre addizioni, tre sottrazioni, tre moltiplicazioni) già scritte "in colonna". Il bambino deve risolvere le operazioni scrivendo il risultato sul foglio consegnato. Le tre operazioni hanno difficoltà crescente perché aumenta il numero di cifre dei termini e la presenza di "prestiti" o "riporti".

Al punteggio grezzo ottenuto in ciascun esercizio corrisponde un punteggio ponderato ricavabile mediante una tabella di conversione fornita dagli autori del test. I punteggi ponderati sono determinati in modo che, per ciascun esercizio, il valore medio sia 10 e la deviazione standard corrisponda a 1,5. Questo comporta che il punteggio massimo o minimo che si può ottenere nei diversi esercizi non è sempre lo stesso, ma dipende dalla variabilità dei risultati ottenuti dal campione di validazione. Nella maggior parte dei casi il punteggio minimo corrisponde a 4 e quello massimo a 12 ma ci sono eccezioni. Il quoziente di calcolo è determinabile a partire dalla somma dei punteggi delle singole prove mediante un'apposita tabella di conversione. Viene stabilito in modo che il punteggio medio corrisponda a 100 e la deviazione standard a 15.

Chiaramente, dato che le prestazioni medie variano a seconda dell'età degli studenti, la conversione da punteggio grezzo a ponderato varia per bambini che si trovano in terza, quarta o quinta primaria. Pertanto anche il punteggio massimo o minimo che si può ottenere per una consegna dipenderà dall'età. Invece la corrispondenza fra totale dei punteggi e quoziente di calcolo è unica per tutte le età.

Purtroppo non sono disponibili dati di confronto per i bambini di seconda dato che la BDE viene generalmente proposta per la prima volta in terza; pertanto si sono calcolati i punteggi della classe seconda facendo riferimento ai dati di terza. Tuttavia, per avere un'ulteriore possibilità di confronto, si è deciso di far svolgere il test BDE a un'altra classe seconda della stessa scuola in modo da verificare se un'eventuale differenza fra le prestazioni dei bambini di seconda coinvolti nella sperimentazione e i dati forniti per la terza primaria dai creatori del BDE fosse ascrivibile alla differenza di età piuttosto che all'intervento sperimentale stesso.

La somministrazione della BDE è avvenuta dopo la fine dell'intervento sperimentale (maggio-giugno 2014), sempre in modo individuale, in una stanza diversa rispetto alla classe. Le risposte sono state registrate servendosi dei moduli per la somministrazione forniti nel manuale di somministrazione (*ibidem*).

6.4.3 Interviste

Le interviste sono state eseguite immediatamente dopo il test BDE. Pertanto, ogni bambino coinvolto nella sperimentazione e ciascun bambino della classe di controllo, dopo aver risposto alle domande di tale test, ha svolto la consegna presentata in questa sezione. Scopo di queste interviste è quello di mettere in evidenza se gli studenti sono in grado di far leva sul pensiero relazionale nel richiamo di fatti aritmetici moltiplicativi. Pertanto, si è chiesto agli studenti di completare alcune caselle vuote in una tavola pitagorica (nella versione classica, non una tavola di Laisant) parzialmente già riempita (Fig. 6.4.3.1).

Nel caso in cui lo studente risponda attraverso un richiamo diretto dalla memoria, viene chiesto di pensare alla situazione di un bambino più piccolo, che ancora non conosce tutti i risultati delle moltiplicazioni, e quindi di dare un suggerimento che potrebbe essere utile a questo ipotetico bambino per determinare il risultato richiesto. Le caselle indicate nella tabella sono sempre 2×3 , 3×7 e 8×6 . Il primo prodotto è scelto perché coinvolge numeri piccoli, pertanto permette modalità ricostruttive che fanno uso dell'addizione ripetuta; inoltre è già presente nella tabella il risultato della moltiplicazione con l'ordine dei fattori invertiti. Lo stesso vale per 3×7 che però si trova a maggiore distanza dalla diagonale principale della tabella. Di conseguenza è più difficile notare la presenza del risultato nella casella simmetrica senza fare un controllo specifico. Infine, nel caso di 8×6 non è stata completata la casella in posizione simmetrica, i numeri sono entrambi maggiori di 5 per inibire strategie di conteggio o somma ripetuta. Sono stati inseriti alcuni numeri nella stessa riga per favorire l'uso della proprietà distributiva per ricostruire il risultato.

1	2	3	4	5					
2	4	6		10					
3		9		15	18	21			
4				20					
5	10		20	25					
	12	18		30					

Fig. 6.4.3.1: Tavola pitagorica mostrata durante le interviste.

Le interviste sono svolte individualmente. Lo studente intervistato e il ricercatore sono seduti a un tavolo su cui sono presenti carta e penna. Le caselle da completare non vengono nominate ma indicate direttamente su una stampa della tabella mostrata in figura 6.4.3.1. Le interviste sono videoregistrate utilizzando la webcam di un computer portatile in posizione fissa, puntata nella direzione del piano del tavolo (Fig. 6.4.3.2) in modo da registrare gesti di pointing verso la tabella stampata ed eventuali iscrizioni sul foglio. Nel caso in cui lo studente

abbia scritto o disegnato sul foglio, questo è stato scansionato. Quando uno studente scrive qualcosa sulla tabella, questa viene sostituita con una nuova in modo che il bambino intervistato successivamente non sia condizionato dalle iscrizioni di chi ha risposto precedentemente.



Fig. 6.4.3.2: Schematizzazione dell'assetto dell'intervista. La freccia tratteggiata rappresenta la direzione in cui è puntata la webcam del computer.

6.4.4 Test a lungo termine

Il test a lungo termine serve a mettere in luce eventuali istanze di pensiero relazionale dopo la realizzazione dell'intervento sperimentale in classe. Si è scelto di svolgere il test non immediatamente dopo la fine della sperimentazione in classe; la finalità è quella di far emergere quanto interiorizzato dagli studenti anche a distanza di tempo. Dato che l'intervento è finito nel mese di maggio, il test a lungo termine è stato eseguito al rientro degli studenti a scuola, nel mese di ottobre del 2014. Per quanto riguarda gli studenti della classe seconda, il test è stato somministrato dall'insegnante e poi acquisito dal ricercatore. Gli studenti della classe quinta sono stati radunati nei locali della scuola secondaria frequentata in quel momento dalla maggior parte di loro. Non è stato possibile avere la presenza della totalità degli studenti, pertanto mancano i dati relativi a tre studenti (si veda All. 2).

Avendo la necessità di mettere a confronto il pre-test con questo test, si è scelto di utilizzare una consegna in parte simile a quella proposta nel pre-test. Volendo però utilizzare la stessa consegna per la classe seconda e per la classe quinta, non si sono potute proporre espressioni con le parentesi né richieste esplicite di enunciazione delle proprietà della moltiplicazione (così come si era fatto nel pre-test per la quinta). Si è scelto quindi di mostrare agli studenti un'immagine (Fig. 6.4.4.1, stampata su un foglio distribuito a ciascuno studente) rappresentante due bambini che scrivono a una lavagna e un terzo che li osserva. Ciascuno studente ha dovuto commentare in forma scritta la veridicità o falsità di quanto scritto o detto dai personaggi nella figura. Le due iscrizioni alla lavagna rappresentano uguaglianze verificabili grazie alla proprietà commutativa e alla proprietà distributiva. L'affermazione del bambino ha lo scopo di non mettere immediatamente in luce il focus dell'indagine onde evitare che gli studenti nominino nelle loro risposte tutte le proprietà della moltiplicazione nel tentativo di includere, casualmente, fra queste anche quella che è la risposta attesa.

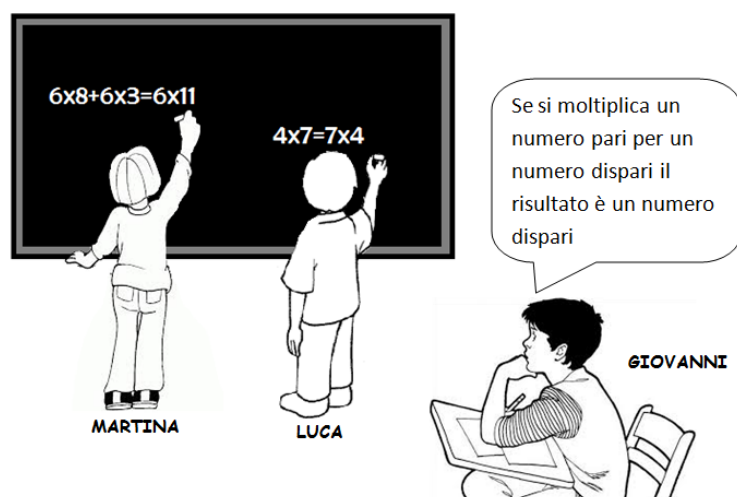


Fig. 6.4.4.1: Immagine mostrata nel test a lungo termine.

6.4.5 Interviste di approfondimento

L'interpretazione dei dati ottenuti tramite il post-test non è sempre stata univoca, pertanto si è deciso di effettuare delle ulteriori interviste di approfondimento per disambiguare l'analisi di alcuni protocolli (cfr sez. 9.2). Queste ulteriori interviste sono state realizzate soltanto nel caso dei bambini della classe seconda per l'impossibilità di convocare nuovamente gli studenti di quinta ormai passati al livello scolastico successivo. I tempi necessari all'organizzazione delle interviste hanno permesso di realizzarle nel mese di aprile 2014, pertanto ad alcuni mesi di distanza dal test a lungo termine e circa un anno dopo il termine dell'intervento in classe.

Nell'intervista viene chiesto ai bambini di commentare nuovamente l'immagine dei due bambini alla lavagna che era stata proposta nel test a lungo termine (Fig. 6.4.4.1). Viene poi mostrata a ciascuno studente la risposta che aveva dato e si richiede di commentarla indicando se è ancora d'accordo con quanto aveva scritto o se cambierebbe tale risposta.

Per approfondire l'analisi del pensiero relazionale eventualmente mobilitato, sono mostrate altre uguaglianze con struttura simile e si chiede di stabilire se sono vere o false. Le uguaglianze proposte sono mostrate agli studenti stampate su carta e sono:

- $5 \times 6 = 5 \times 2 + 5 \times 4$
- $5 \times 6 = 5 \times 3 + 5 \times 4$
- $5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5$

La prima uguaglianza presenta membri dell'uguaglianza simili a quelli presentati nella figura 6.4.4.1 ma di posizione invertita rispetto all'uguale. La seconda uguaglianza condivide molti dei numeri presenti nella prima con un'unica eccezione, pertanto è scorretta. L'ultima uguaglianza ha una struttura diversa.

Infine, per valutare anche il senso dell'operazione, si è chiesto al bambino di far riferimento a rappresentazioni diverse della moltiplicazione. In particolare si è deciso, in coerenza con le attività svolte in classe, di far riferimento al modello rettangolare. Si mostra un'uguaglianza dello stesso tipo rappresentata con segni ibridi (fig. 6.4.5.1) legati all'attività fatta precedentemente con l'artefatto (cfr sez. 10.2) e si chiede di commentarne la correttezza.

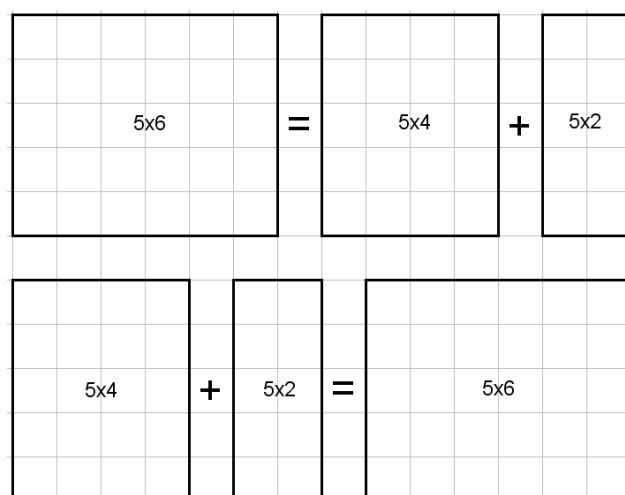


Fig. 6.4.5.1: Immagine mostrata nelle interviste di approfondimento.

Anche nel caso di queste interviste il bambino ha a disposizione carta e matita. Eventuali iscrizioni sono acquisite attraverso la scansione dei fogli. L'intero colloquio è videoregistrato utilizzando un computer portatile con lo stesso assetto mostrato in figura 6.4.3.2. Le interviste sono state sbobinate per intero e le trascrizioni sono riportate nell'allegato 3.

6.5 Metodi di analisi dei dati

In questa sezione si presentano i metodi utilizzati per analizzare sia i dati ottenuti tramite le videoriprese in classe (sez. 6.3) sia quelli raccolti attraverso gli strumenti descritti nella sezione precedente (6.4). A seconda delle finalità della raccolta dati (ovvero della domanda di ricerca cui si vuole rispondere) e della tipologia di dati raccolti, si ricorre a metodi qualitativi o a metodi quantitativi. Nelle seguenti sottosezioni si descrivono e argomentano i metodi scelti per analizzare i dati, elencandoli in base agli strumenti con cui vengono raccolti (ovvero in base alla tipologia di dati).

6.5.1 Analisi dei dati dai test

Il pre-test e i test a lungo termine sono finalizzati a valutare il pensiero relazionale mobilitato dagli studenti. Pertanto, l'analisi delle risposte fornite dai bambini deve tenere conto delle tre componenti attraverso le quali il pensiero relazionale è stato definito (cfr sez. 3.3), ovvero la visione del simbolo di uguaglianza, il senso dell'operazione e il senso della struttura.

Di conseguenza, i protocolli raccolti sia prima dell'intervento sperimentale sia dopo, vengono interpretati qualitativamente codificando, per ciascun bambino:

- il tipo di interpretazione del simbolo di uguaglianza, che può essere (Molina & Ambrose, 2008):
 - come stimolo per una risposta,
 - come espressione di un'azione,
 - come espressione di una relazione;
- l'eventuale uso di proprietà della moltiplicazione, anche in forma di teorema in atto (Vergnaud, 1985);

- la presenza di abilità che caratterizzano il senso della struttura così come è stato ridefinito nella sezione 3.3 a partire dall'elenco di Hoch e Dreyfus (2004).

Nel caso dei bambini della classe quinta, si mettono a confronto i dati del pre-test e quelli del post-test. Per quanto riguarda la classe seconda, appare invece lecito assumere che l'emergere di pensiero relazionale in campo moltiplicativo sia da ascrivere a quanto appreso nel periodo dell'intervento. Tuttavia, non appare opportuno dare per scontato che dipenda sicuramente dalla sperimentazione e non da altri eventi avvenuti nello stesso periodo. Pertanto, nell'analizzare i protocolli di entrambe le classi, si cercherà di mettere in luce eventuali collegamenti con le attività svolte in classe attraverso l'evidenziazione dell'uso di segni emersi precedentemente durante quei momenti.

6.5.2 Analisi dei dati dalla BDE

I dati forniti dalla somministrazione della BDE dovrebbero permettere di rispondere alle domande relative alle performance degli studenti nel richiamo di fatti moltiplicativi. Con questa finalità, si è scelto di mettere a confronto i punteggi elaborati a partire dalle indicazioni degli autori del test (Biancardi & Nicoletti, 2004) ottenuti dalle diverse classi.

Si è deciso di operare due confronti. Il confronto fra la classe seconda e la classe quinta serve a mettere in luce eventuali differenze fra le due classi, così come richiesto dalle domande di ricerca. Un confronto fra la classe seconda coinvolta nella sperimentazione e l'altra classe seconda sottoposta alla BDE serve ad aggirare, almeno in parte, il limite dato dal fatto che i valori medi per i risultati del test sono forniti per bambini di età maggiore. Di fatto si ritiene che se per gli studenti della classe seconda sperimentale si registrassero prestazioni peggiori rispetto a quelle medie del test, questo fenomeno potrebbe essere ascrivibile soltanto al fatto di aver utilizzato un'attribuzione di punteggi ponderata per studenti più grandi. In questa eventualità, il confronto con l'altra classe permetterebbe di mettere in evidenza se la prestazione è comunque paragonabile a quella di un'altra seconda oppure è superiore. Appare evidente che questo tipo di confronto fornisce risultati meno forti rispetto a quelli che si otterrebbero dal confronto col campione utilizzato per la validazione della BDE, decisamente più vasto.

Per quanto concerne il confronto, il numero di studenti presenti in ciascuna delle classi è dell'ordine della ventina, pertanto il numero di dati a disposizione è troppo basso per poter utilizzare un qualsiasi test di tipo parametrico. Per la scelta del tipo di test non-parametrico da impiegare, si tiene conto del fatto che i dati sono di tipo discreto e non sembra ipotizzabile a priori una distribuzione normale. I dati possono essere ordinati in base ai punteggi e si assume che la prestazione di un gruppo sia indipendente da quella dell'altro. A partire da queste osservazioni, si è deciso di ricorrere al test di Mann-Whitney.

L'ipotesi nulla che si assume è che le distribuzioni delle prestazioni nelle due classi messe a confronto siano uguali. Pertanto, quando l'ipotesi può essere negata (probabilità inferiore al 5%), si assume che le prestazioni siano significativamente diverse, altrimenti si interpretano i dati come distribuiti in modo simile, ovvero le prestazioni non differiscono significativamente.

Il valore della funzione U di Mann-Withney individuato è stato poi confrontato col valore di U critico reperito attraverso tabulazione. Si adotta il valore corrispondente a una significatività al 5% per le dimensioni del campione.

6.5.3 Analisi dei dati dalle interviste

Le interviste svolte dopo la somministrazione della BDE hanno lo scopo di mettere in evidenza la tipologia di pensiero (relazionale o procedurale) mobilitato dagli studenti per il richiamo o la ricostruzione dei fatti moltiplicativi. Un'analisi qualitativa delle trascrizioni viene utilizzata per determinare le routine discorsive (sez. 5.2.1) che ricorrono per diversi studenti. Ciascuna routine è caratterizzata dal *quando* e dal *come* (Sfard, 2009) ovvero dalle condizioni che implicano la sua attuazione, dalle modalità con cui viene eseguita e dalle condizioni che ne determinano la fine. Pertanto una routine viene caratterizzata da:

- il **prompt** a cui segue, ovvero la richiesta di completare una specifica casella della tavola pitagorica;
- i **controlli** che vengono effettuati per determinarne l'applicabilità;
- le **operazioni** descritte;
- la **chiusura** della routine.

In questo modo si individua un elenco di routine messe in atto al fine di mettere a confronto le tipologie di routine attuate nelle diverse classi. In particolare, ogni routine viene catalogata come relazionale o procedurale a seconda che le operazioni descritte prevedano l'uso di proprietà della moltiplicazione oppure consistano nel ripetere ricorsivamente una procedura (per es. somme ripetute). Al fine di effettuare questa classificazione si utilizzano anche indicatori linguistici. L'enunciazione di relazioni fra moltiplicazioni indica che la routine è relazionale. Un esempio è dato dalle situazioni in cui viene messo in evidenza che delle moltiplicazioni condividano uno o più fattori. Viceversa, l'uso di elencazioni o frasi del tipo "si deve... e poi... e poi..." sono indici della proceduralità della routine.

Le routine osservate sono anche messe in relazione con quelle già documentate in letteratura. Inoltre, viene effettuata una caratterizzazione in termini di carico cognitivo per confrontarle in termini di difficoltà di attuazione.

Al fine di evidenziare le differenze fra le due classi coinvolte nell'intervento sperimentale, si mettono a confronto le frequenze con cui le diverse routine sono applicate. Inoltre, si sfrutta il confronto con la classe di controllo per mettere in evidenza quelle che sono le routine che distinguono i gruppi sperimentali.

Per effettuare tale confronto, si codifica il tipo di routine utilizzata da ciascuno studente per i completamento di ciascuna delle tre caselle richieste. All'interno di ciascuna classe, si conta quanti studenti mettono in atto almeno una volta ciascuna routine e quanti invece non la mettono mai in pratica. In questo modo si ottiene una partizione degli studenti in due categorie. Per ciascuna classe e per ciascuna routine sono realizzate tabelle di contingenza 2×2 ed è effettuato un test esatto di Fisher attraverso il calcolo manuale del *p-value* per mezzo di un foglio elettronico. La scelta del test di Fisher dipende dalla dimensione del campione (molto piccolo) e dalla tipologia di variabile.

Si assume l'ipotesi nulla che il numero di studenti che mette in atto una certa routine non dipenda dalla classe di cui gli studenti fanno parte. Pertanto nel caso del confronto fra gli studenti di seconda e di quinta, l'ipotesi nulla consiste nel considerare che l'applicazione di una routine non dipenda dall'età degli studenti. Nel confronto fra la seconda sperimentale e quella di controllo, l'ipotesi nulla coincide con l'indipendenza del numero di studenti che applicano una certa routine dall'aver preso parte o meno all'intervento sperimentale. Si considera una differenza significativa quando il *p-value* è inferiore del 5%.

6.5.4 Analisi delle videoriprese

Per l'analisi delle videoregistrazioni effettuate in classe durante l'intervento sperimentale, si fa riferimento al modello analitico per lo studio dello sviluppo del pensiero matematico attraverso dati video di Powell e colleghi (2003). Il modello, basato su una larga rassegna della letteratura sulle metodologie di analisi dei video, consiste di sette fasi.

1. La prima fase è detta **viewing attentively the video data**. Inizialmente il ricercatore guarda i video senza effettuare una specifica analisi. Lo scopo di questo primo approccio al video è quello di divenire familiare col contenuto del video e gli accadimenti osservabili.
2. Dopo la prima visione, il video viene visto nuovamente con lo scopo di mettere in atto la fase **describing the video data**. In questa fase il ricercatore fa una descrizione di tutto ciò che riesce ad osservare nel video: movimenti, azioni, frasi dette, rumori. Queste descrizioni sono arricchite con delle etichettature temporali degli accadimenti.
3. A partire dalla descrizione, si procede al **identifying critical events**. Gli eventi critici sono individuati in base al quadro di riferimento e un'analisi a priori:

we identify *events* as connected sequences of utterances and actions that, within the context of our *a priori* or *a posterior* research questions, require explanation by us, by the learners, or by both. An event is called *critical* when it demonstrates a significant or contrasting change from previous understanding, a conceptual leap from earlier understanding.⁴⁶ (Powell et al., 2003, p. 416)

Nel nostro caso sono eventi critici tutti gli episodi in cui viene introdotto un nuovo segno che, in accordo con l'analisi a priori del potenziale semiotico dell'artefatto, può permettere l'avanzamento di una catena semiotica.

4. Una volta selezionati gli eventi critici, si passa al **transcribing**. Pertanto si procede a trascrivere la componente verbale della comunicazione. A questa vengono aggiunte immagini dei gesti oppure delle iscrizioni, ottenendo così una trascrizione multimodale (Sabena et al., 2016).
5. Le trascrizioni degli eventi critici servono per la fase di **coding**. Nel nostro caso, si effettuano due diverse tipologie di codifica. Una prima codifica riguarda l'evoluzione dei segni

⁴⁶ Identifichiamo gli eventi come sequenze connesse di interventi e azioni che, nel contesto delle nostre domande di ricerca a priori o a posteriori, richiedono una spiegazione da parte nostra, degli apprendenti o entrambi. Un evento è detto critico quando mostra un cambiamento significativo o contrastante con la comprensione precedente, un salto concettuale rispetto agli apprendimenti precedenti.

durante le discussioni matematiche. Pertanto i segni sono classificati come segni artefatto, matematici e pivot (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). La seconda codifica ha lo scopo di analizzare il ruolo dell'insegnante: le azioni dell'esperto sono codificate facendo riferimento agli schemi di comportamento catalogati da Mariotti e Maracci (2010).

6. Nella fase **constructing storyline** si analizzano intensamente le codifiche effettuate al fine di discernere una narrativa sui dati. Nel nostro caso lo scopo è quello di ottenere una descrizione del processo di mediazione semiotica.

7. La narrativa emergente viene completata nella fase di **composing narrative**. Dati aggiuntivi sono utilizzati per riempire eventuali mancanze nella narrazione. Per esempio, i testi individuali prodotti dai bambini oppure i dati relativi ad accadimenti non video-ripresi possono permettere di completare l'interpretazione di azioni e frasi presenti nel video. Quest'ultima fase risulta fondamentale in quanto i dati disponibili permettono di osservare soltanto la componente esterna della comunicazione, mentre la comunicazione che ciascuno degli individui rivolge soltanto a se stesso resta inosservabile.

Il tipo di risultati ottenibili con questo tipo di analisi sono descritti da Sfard (2009) attraverso la metafora dell'archeologo. La ricercatrice sostiene che il lavoro fatto sui dati è paragonabile a quello di un archeologo che ricostruisce un antico recipiente a partire da alcuni frammenti. Nell'analisi dei discorsi, i ricercatori completano la parte percepibile della comunicazione allo scopo di ricostruire il discorso nella sua interezza (ovvero comprendendo la comunicazione non rivolta verso l'esterno ma verso l'interno, il pensiero). Questo avviene nello stesso modo in cui l'archeologo restaura il recipiente ipotizzando la forma dei pezzi mancanti.

Naturalmente né il restauratore né l'interprete danno per certa "l'autenticità" o l'assoluta "esattezza" del prodotto finale, benché entrambi tendano a credere che il produttore originario, se glielo si chiedesse, confermerebbe la fedeltà della ricostruzione. (*ibidem*, p. 317)

6.6 Modalità di presentazione dei risultati

Le tipologie di dati da analizzare sono molteplici e ciascuna analisi risponde a domande di ricerca differenti. Pertanto, la restituzione dell'analisi viene effettuata suddividendola in più capitoli.

In particolare, i capitoli 8 e 9 mirano a rispondere alla prima domanda di ricerca, ovvero

- c. Che prestazioni hanno gli studenti nel richiamo dei fatti moltiplicativi dopo l'intervento con la tavola di Laisant?

In tali capitoli viene riportata l'analisi dei dati raccolti relativamente alle prestazioni di richiamo, ovvero tramite la BDE e le interviste. Vengono effettuati inoltre i confronti fra i diversi gruppi-classe così come descritto nelle sezioni 6.5.2 e 6.5.3. Più dettagliatamente, si considerano le sottodomande proposte nel capitolo precedente:

- Gli studenti hanno buone prestazioni nel richiamo dei fatti moltiplicativi?

- Gli studenti ricostruiscono i fatti moltiplicativi facendo leva sul pensiero relazionale?
- Che differenze ci sono in gruppi-classe di età diversa?

I dati relativi alla BDE serviranno a rispondere alla prima sottodomanda. I dati dalle interviste e l'analisi delle routine osservabili danno risposta alla seconda domanda. Nel capitolo 9 sono messi a confronto i dati dei pre-test e del test a lungo termine. Nello stesso capitolo sono analizzate anche le interviste di approfondimento descritte precedentemente nella sezione 6.4.5. Il confronto fra le diverse classi mira a rispondere all'ultima sottodomanda.

Per quanto riguarda la seconda domanda di ricerca, ovvero

- a. L'analisi del processo di mediazione semiotica attraverso la tavola di Laisant (con i cicli didattici progettati) mostra lo sviluppo del significato matematico di "proprietà di una operazione" – in particolare dei significati matematici di "proprietà commutativa della moltiplicazione" e "proprietà distributiva"? Ci sono differenze fra gruppi-classe di diversa età?

Le risposte alle varie sottodomande sono suddivise in differenti capitoli. I capitoli 10 e 11 contengono l'analisi delle sequenze video-registrate nelle classi (rispettivamente seconda e quinta), ovvero riporta le narrative ricostruite seguendo il metodo di analisi dei video descritto nella sezione 6.5.4. In questo modo, si punta a rispondere alle sottodomande:

- Quali aspetti del potenziale semiotico dell'artefatto emergono nell'attività di classe?
- Quali catene semiotiche permettono di descrivere l'evoluzione dei significati?
- Quale il ruolo dell'insegnante/esperto nella gestione del processo di mediazione semiotica verso le proprietà della moltiplicazione?

Chiaramente, la risposta alla prima domanda richiede un'analisi a priori del potenziale semiotico dell'artefatto. Tale analisi è presentata nel capitolo seguente.

7 Potenziale semiotico della tavola di Laisant

Nel capitolo 5 si è definito il potenziale semiotico di un artefatto come l'insieme delle relazioni che lo legano da un lato con i significati personali che gli allievi sviluppano utilizzandolo per portare a termine delle consegne e dall'altro con i significati matematici evocati (agli occhi dell'esperto) dall'uso dell'artefatto stesso.

In questo capitolo si elencano le consegne che sono state implementate nelle classi sperimentali utilizzando la tavola di Laisant. Per ciascuna consegna si specifica sia un'analisi a priori di quelli che potrebbero essere i significati espressi dagli studenti sia i legami osservabili con la cultura matematica visti dagli occhi dell'esperto.

7.1 Esplorazione dell'artefatto

L'artefatto viene utilizzato perché grazie alla modalità con cui viene costruito, permette di rappresentare le moltiplicazioni fra i numeri minori di 10 con formati diversi. Tuttavia, non è detto che per gli studenti sia immediatamente evidente il fatto che le caselle della tabella rappresentano moltiplicazioni. Pertanto si propongono delle prime consegne finalizzate proprio a mettere in luce il modo in cui la tavola di Laisant è costruita.

In una prima fase di attività individuale si mostra la tabella⁴⁷ chiedendo agli studenti di riprodurla su un foglio quadrettato (quadretti di 1cm). Si lascia loro il tempo di tracciare le linee, andare alla lavagna per contare quadretti o prendere misure. Si lascia che siano loro a individuare gli elementi che ritengono significativi e a riprodurli.

La discussione collettiva che segue viene condotta dall'insegnante partendo da tre domande⁴⁸ (una alla volta) e raccogliendo i contributi dei vari alunni, trascrivendo le diverse risposte alla lavagna man mano che vengono date.

1) Che cosa potrebbe essere?

Dato che gli studenti conoscono già le tabelle a doppia entrata, dovrebbero sostenere che anche quella presentata è una tabella, tuttavia, può darsi che in questa fase escano fuori altri termini con richiami ad altri oggetti dell'esperienza degli studenti (come per es. una rete, una gabbia, ecc.).

2) Com'è fatta?

In questa parte della discussione dovrebbero emergere le regole che servono per costruire la tabella: ogni riga è alta un quadretto (o 1cm) in più della precedente, ogni riga è larga un

⁴⁷ Con gli studenti di seconda è stata inizialmente utilizzata una versione di sole 5 righe e 5 colonne.

⁴⁸ Le domande utilizzate per l'esplorazione dell'artefatto sono ispirate a quelle utilizzate nel contesto del progetto "Macchine Matematiche" www.mmlab.unimore.it

quadretto in più della precedente. L'attività di disegno individuale preliminare è funzionale proprio a dar tempo ai bambini per osservare il modo in cui la tavola è costruita. Qualcuno potrebbe non essersi accorto in precedenza che le colonne e le righe hanno dimensioni tutte diverse, o comunque potrebbe non aver trovato un modo per rappresentare questa variazione. Pertanto si lasciano discutere i bambini, guidandoli finché queste regole non emergono in qualche forma. Quando le regole sono determinate e condivise vengono trascritte alla lavagna e (in un secondo momento) vengono trascritte dai bambini sul quaderno personale.

3) Con questa tabella cosa si potrebbe fare?

Molto probabilmente i bambini suggeriranno di inserire dei numeri ma potrebbero avere opinioni discordanti. Qualcuno potrebbe voler inserire in una casella il numero dei quadretti, qualcuno l'altezza della riga o la larghezza della colonna. L'importante è arrivare a una decisione condivisa dalla classe ma soprattutto motivata. I numeri che indicano altezza o larghezza delle varie caselle potranno essere scritti lungo i lati della tabella o dentro le caselle. Se non emergesse già dagli studenti, potrebbe essere l'insegnante a chiedere agli studenti quale relazione ci sia fra i numeri scritti evidenziando così la presenza di moltiplicazioni. Si chiede infine ai bambini di ridisegnare individualmente la tabella seguendo le regole individuate nella discussione e di riempirla con i numeri così come stabilito dalla classe.

L'insieme di queste consegne dovrebbe portare a mettere in evidenza il fatto che ogni casella rappresenta nella sua interezza una moltiplicazione: le dimensioni della casella sono i fattori della moltiplicazione mentre il numero di quadretti contenuti nella casella ne rappresenta il risultato. Anche gli studenti più piccoli possono notare questo considerando la casella generica casella $n \times m$ come uno schieramento di n file di m quadretti. Gli studenti di quinta possono riferirsi anche all'area del rettangolo.

Utilizzando il linguaggio di Vergnaud (1983), presentare la moltiplicazione come schieramento costituisce una prima opportunità per mostrare ai bambini una nuova situazione da inserire nel campo concettuale della moltiplicazione: se inizialmente l'operazione è presentata come un isomorfismo di misure (somme ripetute), adesso diviene disponibile anche il modello del prodotto di misure elementari (prodotto cartesiano).

Nella tabella vengono a formarsi numeri di diverse forme. Ci sono molti numeri rettangolari, alcuni sovrapponibili (si veda la consegna relativa alla proprietà commutativa presentata dopo), alcuni con lo stesso numero di quadretti all'interno. Il termine "numeri rettangolari" è tradizionalmente usato per riferirsi ad una particolare successione di numeri figurati (vengono chiamati così per distinguerli dai poligonalari che dovrebbero essere soltanto quelli formati da poligoni regolari), $r_n = n(n+1)$ con $n = 1, 2$, ecc. Questi hanno una posizione particolare all'interno della tabella; si trovano "ai lati" della diagonale principale.

Tuttavia, la totalità delle caselle della tavola di Laisant ha la forma di un rettangolo e quindi ci si aspetta che il termine possa essere utilizzato da/con gli studenti per riferirsi alle caselle della tabella in generale. In particolare potrebbero essere battezzati come "numeri rettangolari" tutti quelli che non sono "numeri quadrati" in modo da sottolineare la differenza

di quest'ultimi. Nel rispondere alle domande “che cos'è?” e “com'è fatta?”, i bambini potrebbero riportare osservazioni sulle forme. Probabilmente alcuni troveranno diverse diciture per i vari rettangoli che si trovano all'interno della tabella: potrebbero notare rettangoli larghi, rettangoli stretti, strisce e quadrati. Nella discussione si può mettere in evidenza che sono comunque tutti rettangoli.

Rivestono un ruolo tutto particolare quelle caselle che hanno due dimensioni uguali: sono quadrate (forma che gli studenti già conoscono) e sono disposte lungo tutta la diagonale principale della tabella. In questo caso il termine non crea ambiguità né ad un punto di vista storico-tradizionale (per i greci, e per tutti i matematici venuti dopo, i numeri quadrati sono esattamente quelli) né da un punto di vista del linguaggio algebrico formale; di fatto un quadrato si trova sulla diagonale principale della tabella e è il prodotto di un numero con se stesso, ovvero il quadrato di quel numero. L'importanza di tali numeri non dipende solo dal loro “valore culturale” ma anche dal fatto che la loro memorizzazione risulta più semplice (più esattamente il richiamo è meno soggetto ad errori rispetto alle altre operazioni dello stesso ordine di grandezza, Campbell & Oliphant, 1992).

Per determinare quali numeri possono essere inseriti in una casella della tabella, ci si aspetta che i bambini percorrano con le dita (o con gli occhi) la colonna e la riga corrispondenti fino ad arrivare alla casella che corrisponde al loro incrocio, o viceversa, oppure cheentino i lungo i lati del rettangolo. La determinazione del numero totale di quadretti contenuto può avvenire richiamano un fatto aritmetico già noto (soprattutto per prodotti piccoli come quelli in cui uno dei fattori è 2) oppure contando i quadretti uno ad uno.

Nel momento in cui i quadretti di ciascuna casella vengono contati oppure quando fatti moltiplicativi già appresi vengono richiamati, è possibile riempire le varie caselle scrivendo, in cifre, l'operazione che quella casella rappresenta. In questo modo ogni casella racchiude una molteplicità di rappresentazioni per lo stesso oggetto: ogni prodotto è indicato dai fattori che lo compongono e dal risultato entrambi espressi sia in termini di lunghezze ed estensione superficiale sia in cifre.

Oltre alla rappresentazione analogica del numero, si ha anche una rappresentazione della crescita dell'ordine di grandezza dei numeri, attraverso l'ordinamento spaziale da sinistra a destra e dall'alto al basso. Gli studenti possono osservare che le dimensioni delle caselle crescono man mano che ci si sposta da sinistra verso destra e dall'alto verso il basso. In questo modo si ha una rappresentazione grafica dell'ordine di grandezza del numero.

Riuscire a rappresentare un numero anche in termini del suo ordine di grandezza, come visto nel capitolo 2, è nel controllo della correttezza dei fatti aritmetici memorizzati (Campbell, Production, verification, and priming of multiplication facts, 1987).

7.2 Ricerca di caselle congruenti

La tabella è simmetrica rispetto alla diagonale principale. Se ne può ricavare che c'è anche una “simmetria” nell'operazione di moltiplicazione. Si può quindi sfruttare la tavola di Laisant per

definire la proprietà commutativa per via “geometrica”, infatti se due rettangoli hanno le stesse dimensioni (stessi fattori) allora è possibile ruotare o ribaltare uno dei due per sovrapporlo sull'altro. Due rettangoli sovrapponibili contengono lo stesso numero di quadretti (stesso risultato).

Concretamente questo viene realizzato ritagliando un cartoncino che abbia la misura della casella e sovrapponendolo alla casella simmetrica (Fig. 7.2.1).

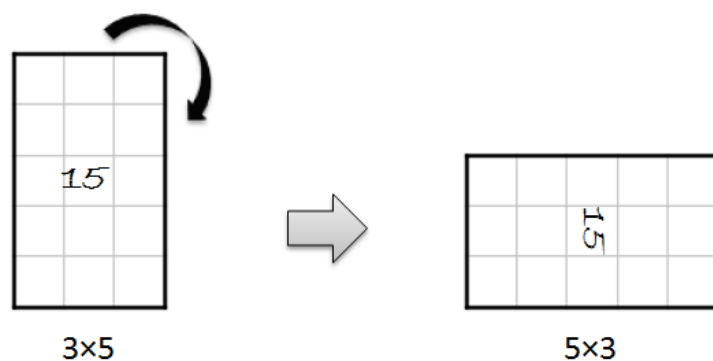


Fig. 7.2.1: La rotazione di un rettangolo corrisponde all'inversione dell'ordine dei fattori.

La consegna data agli studenti viene scritta alla lavagna specificando delle sotto-consegne finalizzate a organizzare l'operato, soprattutto nel caso dei bambini più piccoli.

- 1) Colora di rosso una casella della tabella e scrivici dentro a quale moltiplicazione corrisponde.
- 2) Ritaglia un rettangolo di cartoncino rosso che abbia le stesse dimensioni della casella colorata. Posiziona il rettangolo sulla casella per verificare se la copre completamente.
- 3) Scrivi sul rettangolo il risultato dell'operazione a cui corrisponde.
- 4) Prova a spostare il rettangolo e sovrapporlo ad altre caselle, se trovi una casella che ha esattamente le stesse dimensioni del rettangolo di cartoncino allora colorala di rosso e poi scrivi dentro l'operazione a cui corrisponde.

Terminate le operazioni richieste, il bambino dovrebbe quindi aver colorato due rettangoli che si trovano in posizione simmetrica rispetto alla diagonale principale della tabella. Nelle caselle colorate ci sarà scritta la stessa operazione ma con i fattori scambiati (es. 2×3 e 3×2) e sul cartoncino il risultato (nell'es. 6).

Nel caso in cui alcuni bambini siano particolarmente veloci rispetto ai compagni, si può chiedere di ripetere le operazioni scegliendo un'altra casella a piacere e un altro colore.

Quando tutti gli studenti hanno individuato almeno una coppia di caselle congruenti, vengono divisi in piccoli gruppi e viene dato loro il compito di osservare i diversi elaborati individuali per poi rispondere a tre domande:

- 1) Come sono posizionate le caselle colorate trovate da ciascuno di voi?

- 2) A quali operazioni corrispondono le caselle che ciascuno di voi ha colorato?
- 3) Cosa hanno in comune?

I bambini dovrebbero notare che, tutte le volte, l'operazione scritta è la stessa ma con l'ordine dei fattori scambiato. A partire dall'osservazione della tabella potrebbero vedere che il numero di righe dentro ad una casella corrisponde al numero di colonne dentro l'altra e viceversa. Ancora potrebbero osservare che il risultato ottenuto è sempre lo stesso.

Nella discussione collettiva successiva, l'insegnante ripete le tre domande (una alla volta) e raccoglie i contributi dei vari gruppi. Inizia quindi a chiedere cosa è stato fatto nei diversi gruppi, raccoglie le risposte cercando sempre di arrivare a una condivisione dei significati che emergono per ciascuna delle domande. Vengono appuntate sulla lavagna le osservazioni che emergono. Scopo della discussione è, a partire dalle osservazioni che i gruppi hanno fatto sulla figura, arrivare a un primo enunciato della proprietà commutativa. Potrebbero emergere anche osservazioni sull' "economicità" della proprietà come il fatto che basta memorizzare un prodotto per conoscere due oppure che sapendo che $2 \times 5 = 5 \times 2$ se si ricorda il primo prodotto, invece che fare $2+2+2+2+2$, si può fare semplicemente $5+5$.

Anche in questa discussione potrebbe emergere il ruolo particolare delle caselle quadrate che, essendo percorse dalla diagonale principale nei loro assi di simmetria, non hanno caselle congruenti all'interno della tabella. Questo può essere messo in relazione che una moltiplicazione di un numero con se stesso non cambia quando si scambia l'ordine dei fattori.

Nel caso degli studenti più grandi si può spingere sempre più verso l'uso di termini matematici (ordine, fattori, proprietà, commutativa); per i più piccoli si opta per una formalizzazione minore purché elaborata con un linguaggio condiviso e quindi comprensibile a tutta la classe. L'uso del termine "proprietà commutativa" è auspicabile, se non viene introdotto dai bambini può fornirlo l'insegnante al momento opportuno (per esempio in una sintesi alla fine della discussione).

Terminata la discussione si chiede ai bambini di descrivere brevemente quello che è stato fatto e fornire una formalizzazione della proprietà commutativa. Inoltre, si chiede a ogni bambino di individuare, all'interno di una copia personale della tabella, tutte le caselle che possono essere "accoppiate" attraverso una simmetria.

La messa in evidenza della relazione data dalla proprietà commutativa è molto importante ai fini della memorizzazione dato che, secondo Butterworth et al. (2003) questa proprietà incide sull'organizzazione dei fatti aritmetici memorizzati sin dai primi anni. Inoltre, come evidenzia anche lo stesso autore, è già pratica diffusa (ad esempio in oriente) semplificare la tavola pitagorica lasciandola soltanto in forma di matrice triangolare (Cao, Li, & Zuo, Characteristics of multiplication teaching of whole numbers in China: the application of nine times table, 2015).

7.3 Compiti di composizione e decomposizione

Si può richiedere di riprodurre e ritagliare i rettangoli, manipolarli e re-incollarli. In particolare, i rettangoli possono essere scomposti e ricomposti con dimensioni diverse. Con

queste operazioni di scomposizione/ricomposizione è possibile riconoscere che, pur cambiando forma e dimensioni, la misura della superficie dei rettangoli non varia (Fig. 7.3.1).

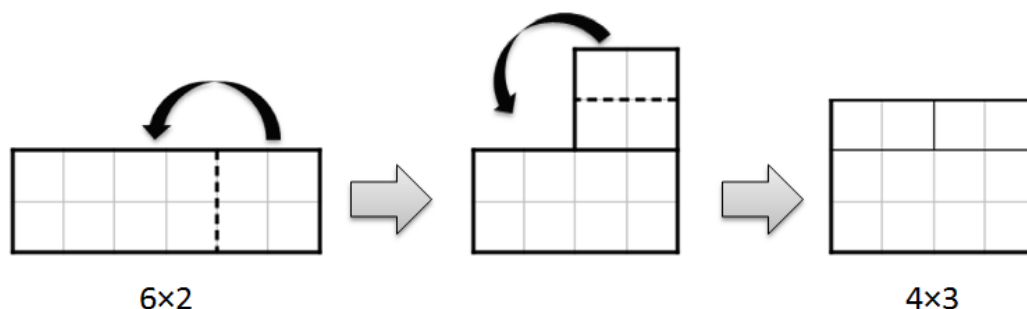


Fig. 7.3.1: Scomposizione e ricomposizione di rettangoli equivalenti.

Dal punto di vista matematico possiamo riconoscere in queste operazioni con i rettangoli il significato di una relazione di equivalenza basata sul fatto che nelle manipolazioni la misura della superficie del rettangolo può conservarsi o meno. Inoltre, in tale relazione di equivalenza è riconoscibile (per l'esperto) il significato matematico di specifiche proprietà delle operazioni; in particolare si possono presentare specifiche consegne per lavorare sulla proprietà distributiva.

Si può immaginare una relazione fra l'incollaggio di due rettangoli della stessa altezza per rappresentare la somma di due moltiplicazioni con un fattore in comune. Se ne ottiene un rettangolo con base data dalla somma dei due rettangoli di partenza; si tratta di una trasformazione su un'espressione aritmetica in accordo con la proprietà distributiva: $a \times b + a \times c \rightarrow a \times (b + c)$. L'osservazione che i rettangoli hanno tutti altezza in comune e che la base del rettangolo finale è pari alla somma di quelle dei rettangoli di partenza può costituire un primo germe del significato di proprietà distributiva. Tuttavia, la proprietà distributiva si riferisce a una relazione di equivalenza fra relazioni aritmetiche ed è quindi fondamentale mettere in evidenza che tale relazione è a "doppio senso". Per lavorare sulla trasformazione opposta $a \times b + a \times c \leftarrow a \times (b + c)$ è necessario proporre delle consegne di scomposizione (Fig. 7.3.2).

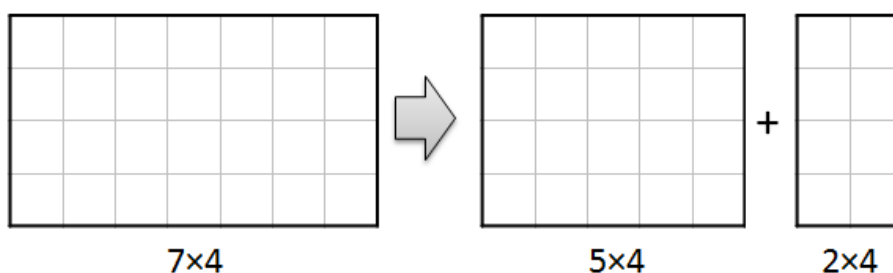


Fig. 7.3.2: Divisione di un rettangolo in due rettangoli con ugual altezza.

Per quanto riguarda la trasformazione $a \times b + a \times c \rightarrow a \times (b + c)$ è stata proposta una prima consegna individuale. Ogni bambino ha a disposizione una copia della tavola senza numeri all'interno e viene richiesto di mettere in atto la seguente lista di consegne:

- 1) colora di rosso due caselle che si trovino nella stessa riga della tabella.

- 2) Scrivi dentro a ciascuna delle caselle scelte la moltiplicazione a cui corrisponde e il suo risultato.
- 3) Ritaglia due rettangoli di cartoncino rosso che abbiano le stesse dimensioni delle caselle colorate. Posiziona i rettangoli sulle caselle per verificare che le coprano completamente.
- 4) Unisci, col nastro adesivo, i due rettangoli lungo il lato con lunghezza comune in modo da formare un unico rettangolo.
- 5) Riesci a trovare nella tabella una casella che abbia le stesse dimensioni del rettangolo ottenuto in questo modo? Se sì, colorala.
- 6) Scrivi sul cartoncino il numero corrispondente ai quadretti che contiene.

I bambini dovrebbero quindi colorare due caselle con un fattore in comune. Ognuno realizza un cartoncino unico ottenuto dall'unione dei due cartoncini ritagliati in precedenza. Se gli studenti riescono a trovare una casella che corrisponde al cartoncino allora questa sarà quella che corrisponde al prodotto del fattore comune per la somma degli altri due. Se invece sono stati scelti numeri troppo grandi, i bambini si accorgeranno che nella tabella non c'è una casella con quelle stesse dimensioni e quindi potrebbero già mettere in evidenza che, in questo modo, si possono trovare dei prodotti che stanno "fuori" dalla tabella.

Le osservazioni individuali saranno condivise dagli studenti in una seconda fase di lavoro in piccoli gruppi. Si chiede a ciascun gruppo di rispondere ad alcune domande:

- 1) Come sono posizionate le caselle colorate?
- 2) Quali caratteristiche hanno in comune le caselle colorate da ciascuno?
- 3) Quali numeri contengono le caselle e quali numeri sono scritti sui cartoncini?
- 4) Come avete fatto a trovarli?

I bambini dovrebbero notare che le caselle colorate, sia quelle scelte inizialmente, sia l'eventuale casella colorata successivamente sono sulla stessa riga. Dovrebbero notare anche che hanno sempre un fattore in comune. Ci si aspetta che qualcuno, per ottenere il numero di quadretti contenuti nel cartoncino finale, abbia fatto la somma dei prodotti corrispondente alle caselle inizialmente colorate. Potrebbe essere più difficile notare che il cartoncino corrisponde al prodotto del fattore comune per la somma degli altri due.

Nella fase di discussione collettiva, l'insegnante ripete le domande (una alla volta) e raccoglie i contributi dei vari gruppi. Inizia quindi a chiedere cosa è stato fatto nei diversi gruppi, raccoglie le risposte. Scopo della discussione è, a partire dalle osservazioni che i gruppi hanno fatto sulla tavola (quindi sui colori, la posizione dei rettangoli, ecc.) e sui numeri inseriti, arrivare a una prima formalizzazione della proprietà distributiva. Nel caso degli studenti più grandi si può cercare di spingere sempre più verso l'uso di termini matematici (ordine, fattori, addendi, termini, risultato, prodotto, somma); con i più piccoli si può optare per una

formalizzazione meno “tecnica” purché elaborata con un linguaggio condiviso e quindi comprensibile a tutta la classe.

Dopo la discussione, si chiede ai bambini di descrivere brevemente quello che è stato fatto e fornire una spiegazione personale della proprietà distributiva.

Per spingere gli studenti a riflettere sulla direzione opposta, ovvero sulla trasformazione $a \times (b+c) \rightarrow a \times b + a \times c$ viene consegnata agli studenti una lettera scritta da un personaggio di finzione:

Ciao,

mi chiamo Giovanni e frequento la seconda a Roma. Nella mia classe abbiamo lavorato con la tabella e adesso ho un problema: ricordo molto bene i risultati delle moltiplicazioni fino al 5 ma non ricordo tutte quelle della tabella fino al 10. Adesso devo risolvere un problema in cui devo calcolare 3×7 , ho provato a contare i quadretti nella tabella ma sono molto piccoli e mi confondo. La maestra ci ha detto di non usare la calcolatrice e non so proprio come fare a capire quanto fa 3×7 . Potresti suggerirmi un modo per trovarlo usando i risultati che ricordo?

Grazie. Giovanni

La lettera utilizzato differisce nel caso delle due classi, infatti il personaggio immaginario della lettera dovrà riferire di frequentare la classe quinta nel caso degli studenti dell'ultimo anno di scuola primaria. Inoltre, il prodotto richiesto è 8×7 .

Si dividono gli studenti in piccoli gruppi chiedendo loro di immaginare delle possibili soluzioni, invitandoli anche a proporre più di una se ne trovano. Lo scopo della divisione in gruppi è quello di permettere il confronto fra diverse strategie che possono essere proposte dai singoli allievi. Si passa poi alla discussione collettiva delle strategie emerse. La discussione servirà anche a richiamare l'attività svolta nella precedente consegna (quella dei cartoncini) nel caso in cui gli studenti non mettessero da subito in evidenza un legame fra quella consegna e quella appena svolta.

Dopo la discussione si chiede a ogni bambino di rispondere alla lettera scrivendo a sua volta una brevissima lettera (utilizzando testo scritto ma anche disegni) in cui spiegare le strategie che il bambino immaginario può usare per risolvere il suo problema.

Si noti che in questa consegna non viene fatto esplicito riferimento all'artefatto, quindi dovranno essere gli studenti a individuare la possibilità di utilizzare la tavola di Laisant per determinare il prodotto richiesto nella lettera attenendosi alle condizioni in essa dettate.

L'insieme di questa consegna e della consegna precedente dovrebbe portare gli studenti a notare che, unendo prodotti noti, è possibile ottenere i risultati di prodotti che coinvolgono fattori maggiori. Pertanto alcuni studenti potrebbero suggerire di utilizzare strategie simili a quelle implementate nella soluzioni di queste consegne al fine di terminare i risultati di prodotti che coinvolgono anche numeri maggiori di 10.

7.4 Altre consegne

Nel capitolo precedente è stato messo in evidenza che il design delle consegne da presentare agli studenti è frutto di un lavoro di progettazione e negoziazione con le insegnanti delle due classi sperimentali. Chiaramente, le attività che sono state realizzate a partire da queste consegne si sono alternate alle molte altre proposte che gli studenti hanno ricevuto dalle maestre all'interno delle altre lezioni. Nella soluzione di altre consegne matematiche non direttamente ricollegabili alla tavola di Laisant, come nel caso della soluzione di problemi associabili al campo concettuale della moltiplicazione, gli alunni possono aver utilizzato la tavola rielaborando quindi i significati emersi a seguito delle consegne presentate nelle altre sezioni di questo capitolo.

I momenti in cui gli studenti hanno utilizzato la tavola di Laisant per consegne diverse rispetto a quelle qui presentate possono rientrare a tutti gli effetti nel processo di mediazione semiotica, soprattutto nel momento in cui l'insegnante discute con gli studenti i significati che emergono. Tuttavia, vista l'imprevedibilità di tali momenti, non è possibile eseguire un'analisi a priori di tutte le possibili situazioni in cui la tavola potrebbe essere usata; tuttavia dati relativi a queste occasioni sono raccolti (si veda sez. 6.3) e compresi nei risultati.

Nei prossimi due capitoli saranno presentati i risultati ottenuti con l'implementazione delle consegne descritte in questo capitolo. In particolare nei capitoli 8 e 9 saranno analizzati i dati relativi alle prestazioni degli studenti al termine dell'anno scolastico in cui i cicli didattici sono stati implementati. I capitoli 10 e 11 serviranno a mettere in evidenza il processo di costruzione dei significati attraverso l'analisi del processo mediazione semiotica.

8 Prestazioni nel richiamo di fatti moltiplicativi

In questo capitolo vengono analizzati i dati raccolti per evidenziare eventuali differenze nelle prestazioni di richiamo di fatti moltiplicativi da parte degli studenti dei gruppi sperimentali e di controllo. Tali dati sono raccolti attraverso il test di calcolo della Batteria per la Discalculia Evolutiva (Biancardi & Nicoletti, 2004; cfr sez. 6.4.2) e l'intervista sul completamento della tavola pitagorica (sez. 6.4.3) per ciascuna delle due classi sperimentali. A partire dal primo test, le prestazioni nel richiamo dei fatti moltiplicativi della classe seconda sperimentale sono messe a confronto, tramite una analisi di tipo statistico, con quelli della classe quinta e con quelli della classe di controllo. Questa analisi servirà a determinare se le prestazioni di richiamo delle classi sperimentali possono essere considerate buone e quindi a fornire una parziale risposta alla prima domanda di ricerca.

I dati relativi al compito di completamento della tavola pitagorica sono utilizzati per determinare le routine che gli studenti applicano nella ricostruzione di fatti moltiplicativi. Tali routine dei diversi gruppi di studenti sono messe a confronto e analizzate. L'analisi e classificazione delle routine concorrerà a rispondere alla prima domanda di ricerca, ovvero a evidenziare se gli studenti, nel richiamare i fatti moltiplicativi, fanno leva sul pensiero relazionale (cfr cap. 10).

8.1 Risultati del test di calcolo della BDE

Lo strumento BDE (Biancardi & Nicoletti, 2004) contiene diverse consegne sul calcolo sia mentale sia scritto. In tali consegne sono coinvolte le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione. In particolare si richiede agli studenti di:

- elencare i primi dieci multipli di 4 e i primi dieci di 7;
- fornire il risultato di alcune moltiplicazioni fra numeri minori di 10;
- fornire il risultato di alcune addizioni/sottrazioni fra numeri minori di 10;
- fornire il risultato di alcune addizioni/sottrazioni fra numeri maggiori di 10;
- determinare il risultato di addizioni, sottrazioni e moltiplicazioni mediante gli usuali algoritmi scritti.

Gli autori del test hanno previsto un punteggio per ciascuna delle consegne (sez 6.4.2). Tale punteggio dipende sia dalla correttezza della risposta sia dal tempo di risposta. Il punteggio relativo a ciascuna consegna può essere normalizzato (attraverso opportune tabelle di conversione) con un valore intero minore di 12. La normalizzazione è stata fatta in modo che il punteggio medio del campione su cui la BDE è stata testata fosse 10 e la deviazione standard 1,5. L'insieme dei punteggi delle singole consegne permette di determinare il Quoziente di Calcolo (QC), anch'esso normalizzato, in modo che il valore medio sia 100 e la deviazione standard 15.

Ciascuno degli studenti delle due classi sperimentali e della classe campione ha svolto le consegne sopraelencate. L'intervista è stata svolta all'interno della scuola, in una stanza diversa dalla classe, in modo che il bambino e l'intervistatore fossero i soli presenti. L'intervistatore ha registrato i punteggi compilando la scheda prevista dagli autori del test; i punteggi di tutti i bambini sono stati normalizzati secondo le tabelle di conversione⁴⁹.

8.1.1 Classe seconda: buone capacità nelle moltiplicazioni

Così come già descritto (sez. 6.4.2) il test BDE è stato validato utilizzando diversi campioni di bambini italiani in modo da ottenere dati per le diverse età. Si noti però che gli studenti più giovani coinvolti in tale campione frequentavano la classe terza primaria, pertanto hanno età maggiore rispetto agli studenti coinvolti nella nostra sperimentazione. Il valore medio per il Quoziente di Calcolo dei bambini della classe seconda è di 80,25 (cfr All. 1) ed è quindi più di una deviazione standard al di sotto del valor medio ottenuto dal campione di studenti usato per validare il test⁵⁰. Questa differenza potrebbe essere spiegata proprio dalla differenza di età (e quindi di scolarizzazione) che può aver influito sul risultato di alcune delle consegne. Fra i risultati dei singoli bambini ce ne sono alcuni che superano il valor medio del campione di validazione; altri studenti hanno prestazioni inferiori di due deviazioni standard rispetto alla media (Fig. 8.1.1.1).

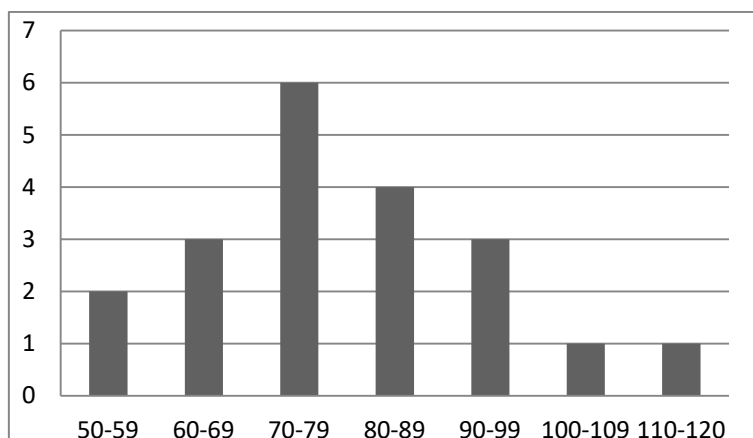


Fig. 8.1.1.1: Frequenze dei punteggi del QC nel test BDE per la classe seconda.

Per quanto riguarda le specifiche consegne, focalizziamo l'attenzione sui punteggi ottenuti nei compiti relativi rispettivamente alle "tabelline" e alle "moltiplicazioni a mente", ossia i due compiti in cui è coinvolto il richiamo di moltiplicazioni (Fig. 8.1.1.2). In questi due compiti la classe si comporta in modo del tutto paragonabile al campione usato per la normalizzazione del test avendo come risultati medi 9,45 e 9,35 con deviazioni standard paragonabili a quella ottenuta dagli autori del test. Nel compito "moltiplicazioni a mente" la deviazione è addirittura minore di quella del campione di validazione della BDE.

Tenendo conto che il campione di riferimento è costituito da bambini di classe terza, selezionati durante la seconda metà dell'anno scolastico, queste prestazioni possono essere

⁴⁹ I dati degli studenti delle classi considerate sono riportati per esteso nell'Allegato 1.

⁵⁰ Si ricorda che il valore medio è 100, la deviazione standard vale 15, quindi $100 - 15 = 85$ che è maggiore di 80,25.

considerate assai buone, ovvero la prestazione dei bambini della classe seconda sperimentale è paragonabile a quella di bambini di quasi un anno più grandi.

Una possibile interpretazione dei risultati (prestazioni al di sotto della media nei compiti additivi e nel calcolo scritto e prestazioni al di sopra nelle moltiplicazioni a mente) è quindi che i bambini abbiano, in generale, delle normali abilità di calcolo (seppure molto variabili all'interno del gruppo del classe) ma –mediamente– delle ottime capacità nel richiamo dalla memoria dei risultati delle moltiplicazioni, sia in ordine che sparsi.

Una sommaria analisi della natura degli errori commessi dagli studenti fornisce qualche ulteriore indicazione. Di seguito si riporta una rappresentazione grafica della frequenza relativa degli errori, suddivisa per tipologia, nei compiti “tabelline” e “moltiplicazioni a mente” (Fig. 8.1.1.3). In particolare sono indicati in giallo gli errori per esitazione (tempo di risposta maggiore di 2”), in blu i casi in cui è stato indicato un risultato sbagliato e in arancio le omissioni.

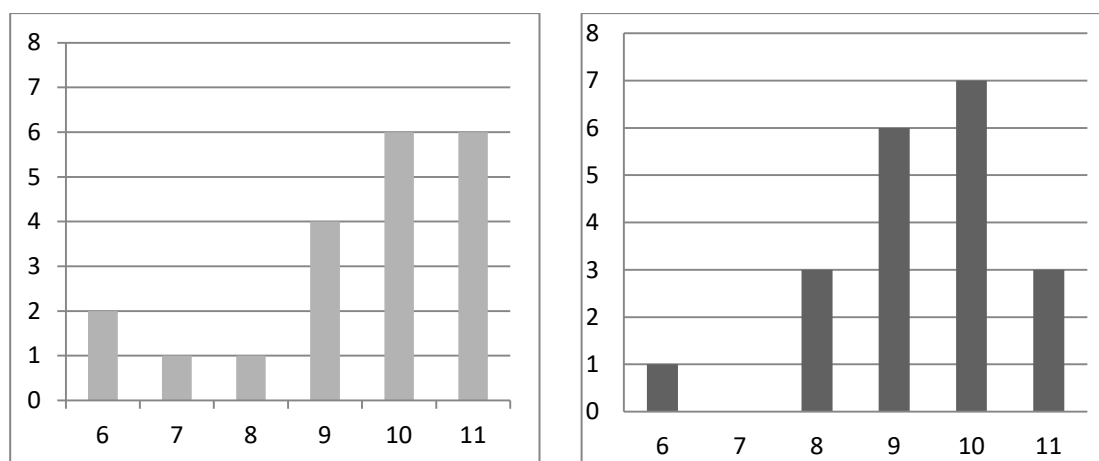


Fig. 8.1.1.2: Frequenze dei punteggi nei compiti “tabelline” (a sinistra) e “moltiplicazioni a mente” (a destra) per la classe seconda.

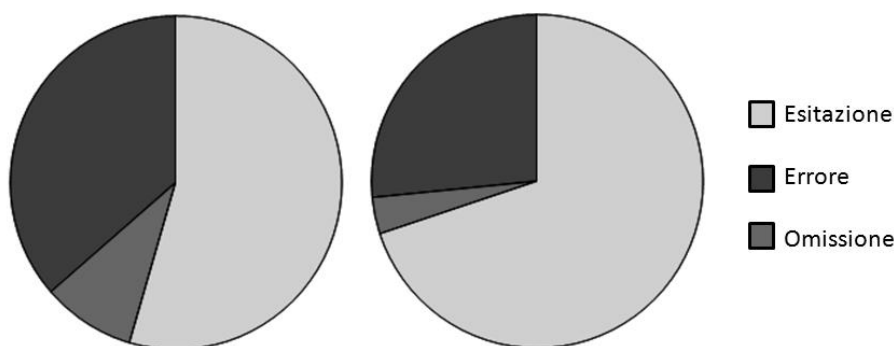


Fig. 8.1.1.3: Frequenze relative degli errori nei compiti “tabelline” (a sinistra) e “moltiplicazioni a mente” (a destra) per la classe seconda.

La maggior parte degli errori consistono in esitazioni, il che potrebbe essere interpretato considerando che, per i risultati non memorizzati, la maggior parte dei bambini abbia sviluppato strategie ricostruttive, penalizzate perché dispendiose in termini di tempo, ma che,

oltre a permettere comunque di arrivare a risultati corretti, mostrano l'acquisizione di competenze più complesse della semplice memorizzazione.

Analizzando nel dettaglio gli errori veri e propri si nota che, nel compito relativo alle tabelline, la maggior parte sono classificabili come errori di traslazione rispetto ai risultati corretti. Ovvero i bambini richiamano un risultato scorretto e poi procedono correttamente nel conteggio successivo mantenendo fissa la distanza richiesta fra i risultati parziali elencati. Per esempio, nel richiamare i multipli di 7, alcuni bambini iniziano da 7, segue poi 14 e successivamente 24 quindi proseguono con 31 aggiungendo correttamente 7 (ovvero $24+7$) poi con 38 e così via. Alcuni, arrivati al quinto multiplo, notano che non termina con la cifra 5 e quindi si correggono. Gli altri errori (in entrambi i compiti) sono errori di tabella, cioè viene fornito un risultato sempre appartenente alla tavola pitagorica, ma appartenente a una tabellina vicina a quella richiesta (uno dei più diffusi è $7 \times 8 = 54$).

8.1.2 Classe quinta: strategie ricostruttive meno frequenti

Nel caso della classe quinta è possibile confrontare i risultati con quelli del gruppo di coetanei che ha contribuito alla validazione della BDE stessa. Il valore medio ottenuto dalla classe sperimentale per il Quoziente di Calcolo è 95,09 con una deviazione standard paragonabile a quella del campione di validazione (All. 1). Pertanto gli studenti di quinta elementare hanno prestazioni nella media nel test in generale. Osservando la distribuzione delle frequenze (Fig. 8.1.2.1) si nota che in realtà la maggior parte degli studenti ha prestazioni superiori alla media che però viene abbassata notevolmente da alcune prestazioni negative. Fra queste quella di Gab, alunno con certificazione di discalculia, che in questo test fornisce effettivamente prestazioni molto basse.

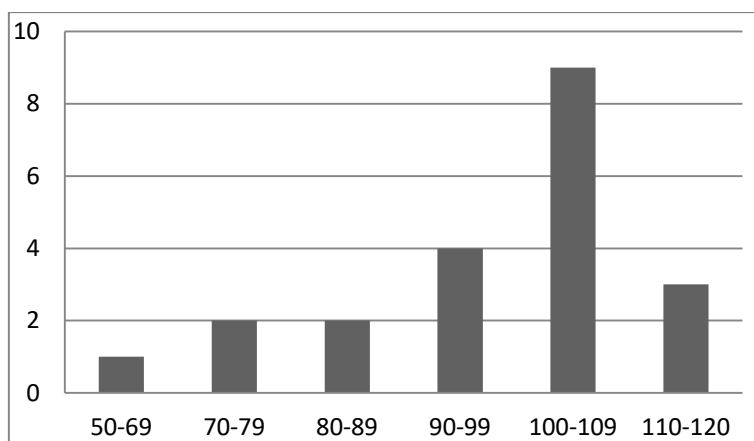


Fig. 8.1.2.1: Frequenze dei punteggi del QC nel test BDE per la classe quinta.

Anche nei singoli compiti, la classe si comporta in modo del tutto paragonabile al campione usato per la normalizzazione del test. Si può notare però che la deviazione standard nei due compiti di richiamo di moltiplicazioni è più alta di quella che gli autori del test hanno ottenuto col campione di validazione. Se si eliminano il valore più alto e il valore più basso della classe si ottengono valori paragonabili (addirittura inferiori). Pertanto il risultato di questo test risente molto dell'effetto dei valori estremi, ovvero l'altissima prestazione di Vio e la bassa prestazione di Gab. L'intervento sembra quindi essere stato utile ai bambini più deboli che hanno raggiunto il livello dei compagni più forti con l'unica eccezione di Gab.

Tuttavia, il test di Gab appare significativo in quanto il bambino, stancato dal lavoro eccessivo che un test di questo tipo richiede per lui, ha lasciato molte domande in bianco. Fra quelle che ha svolto molte sono corrette ma ha impiegato un tempo di risposta maggiore di quello consentito dal test.

Anche in questo caso, l'analisi della natura degli errori presenti nel test fornisce qualche indicazione aggiuntiva. Nel compito relativo alle tabelline il 40% degli errori sono esitazioni (tempo di risposta maggiore di 2") mentre il 35% sono errori veri e propri. Il restante 25% sono omissioni. Per il compito "moltiplicazioni a mente" invece la percentuale di errori per esitazione raggiunge il 56% contro il 29% degli errori veri e propri.

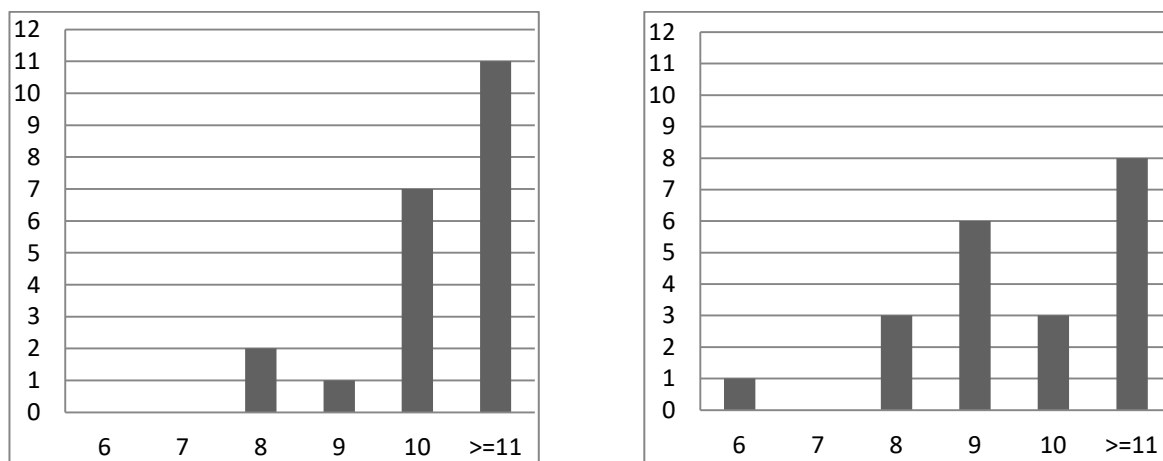


Fig. 8.1.2.2: Frequenze dei punteggi nei compiti "tabelline" (a sinistra) e "moltiplicazioni a mente" (a destra) per la classe quinta.

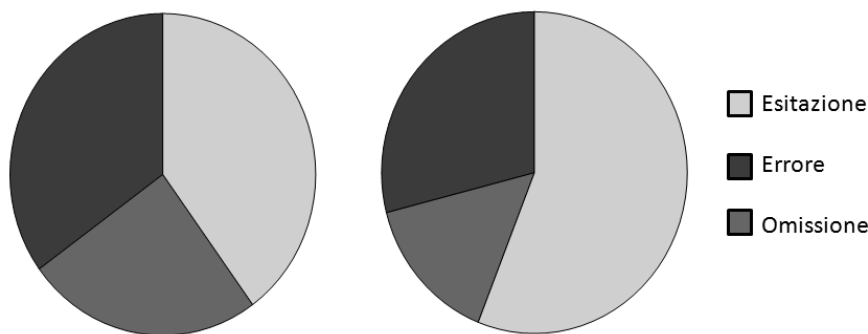


Fig. 8.1.2.3: Frequenze relative degli errori nei compiti "tabelline" (a sinistra) e "moltiplicazioni a mente" (a destra) per la classe quinta.

Si può quindi notare che per il primo compito l'uso di strategie ricostruttive per il calcolo del risultato ha la stessa frequenza del richiamo scorretto. Per il secondo compito invece le strategie ricostruttive efficaci sono più utilizzate. Inoltre, il numero di omissioni non è basso, soprattutto se confrontato con il tasso di omissioni della seconda. Questo risultato sembra suggerire che i bambini di seconda primaria si sentano più sicuri nell'affrontare questa tipologia di compito il che fornisce un elemento a favore dell'intervento nei primi anni scolastici.

8.2 Confronto fra le prestazioni di calcolo delle classi

I dati raccolti con lo strumento BDE sono stati messi a confronto andando a paragonare i risultati delle classi sia rispetto al punteggio ottenuto nelle singole prove sia rispetto al Quoziente di Calcolo complessivo. Vengono confrontati i dati delle due classi sperimentali e così come quelli della seconda di controllo con quelli della seconda sperimentale.

8.2.1 Confronto fra le classi sperimentali

Il numero di studenti presenti in ciascuna delle classi è dell'ordine della ventina, pertanto il numero di dati a disposizione è troppo piccolo per usare test di tipo parametrico. Inoltre i dati sono di tipo discreto e non sembra ipotizzabile a priori una distribuzione normale. Viene effettuato, quindi, un test di Mann-Withney (cfr sez. 6.5.2). Si è scelto di supporre una distribuzione a una coda in quanto i punteggi attribuiti dal test BDE hanno un valore massimo. Il valore di U così individuato è stato poi confrontato col valore di U critico corrispondente a una significatività al 5% per le dimensioni del campione. I valori ottenuti analizzando i punteggi normalizzati delle diverse componenti del test sono riportati in tabella 8.2.1.1. Sono evidenziati i valori che risultano significativi ($U < U\text{-crit}$).

Prova	Media II	Media V	U	U-crit
Tabelline	9,45	9,91	140	138
MoltMente	9,35	9,32	180	138
A/S <10	7,85	9,59	73,5	138
A/S >10	8,90	9,27	181	138
CalcScritto	7,65	9,36	59,5	138
QC	80,25	95,09	89	138

Tab. 8.2.1.1: Risultati del test di Mann-Whitney nel confronto fra le due seconde.

Si può notare che i valori per i quali si riscontra una differenza significativa nella distribuzione dei due gruppi di studenti sono quelli che riguardano le operazioni di somma e sottrazione e il calcolo scritto. Queste differenze nelle singole prove comportano una differenza significativa anche nel Quoziente di Calcolo complessivo.

La classe quinta ha prestazioni che rientrano nella media dei valori degli studenti della loro età⁵¹. I risultati degli studenti di seconda sono invece confrontati con quelli degli studenti di classe terza (età degli studenti più giovani coinvolti nella validazione della BDE). Si nota quindi che i bambini della seconda sperimentale hanno prestazioni paragonabili a quelle di bambini più grandi di un anno nelle prove che riguardano la moltiplicazione ma non nelle altre, e infatti il loro quoziente di calcolo complessivo è più basso di quello medio degli studenti di terza.

⁵¹ Si ricorda che il valore medio per la BDE è sempre di 10, con SD 1.5, per le singole prove e di 100, con SD 15, per il Quoziente di Calcolo.

In sintesi, gli studenti di quinta hanno prestazioni equivalenti ai loro coetanei in tutta la prova; quelli di seconda sono paragonabili agli allievi di terza soltanto nelle prove sulla moltiplicazione, mentre hanno risultati peggiori nelle altre. *Una possibile interpretazione è che queste differenze siano imputabili al maggior lavoro sul calcolo scritto e sulle operazioni di addizione e sottrazione che è stato svolto dai bambini più grandi.*

8.2.2 Confronto fra le classi seconde

Anche in questo caso è stata effettuata un'analisi attraverso il test di Mann-Withney con ipotesi di distribuzione a una coda. I valori di U ottenuti per le diverse prove del test e per il Quoziente di Calcolo complessivo sono riportati in tabella 8.2.2.1. I valori significativi ($U < U_{crit}$) sono evidenziati.

Prova	Il sper	Il contr	U	U-crit
Tabelline	9,45	7,79	127	130
MoltMente	9,35	8,37	101	130
A/S <10	7,85	8,89	134	130
A/S >10	8,90	9,95	135,5	130
CalcScritto	7,65	7,84	167	130
QC	80,25	80,32	176,5	130

Tab. 8.2.2.1: Risultati del test di Mann-Whitney nel confronto fra le due seconde.

Come si può notare, le uniche prove in cui il valore della U è minore del valore critico sono quelle relative al calcolo mentale di moltiplicazioni, con un valore particolarmente basso per il richiamo dei risultati di operazioni poste in ordine casuale. In entrambe queste prove, il risultato medio della classe sperimentale è migliore di quello della classe di controllo. Pertanto se ne può concludere che *la classe sperimentale ha delle prestazioni significativamente superiori rispetto alla classe di controllo nei compiti di richiamo di fatti moltiplicativi.*

Non ci sono differenze significative in tutte le altre prove e neanche nel Quoziente di Calcolo complessivo. Visti i risultati presentati in questa sezione e nella precedente, sembra che le specificità degli studenti della classe seconda sperimentale influenzino particolarmente e in modo positivo le prestazioni in ambito moltiplicativo, questo risultato fornisce una prima risposta alla domanda di ricerca *a* (cfr sez. 5.4). L'analisi presentata nel resto di questo capitolo servirà ad indagare le modalità di ricostruzione dei risultati delle moltiplicazioni messe in atto dagli studenti.

8.3 Risultati del completamento della tavola pitagorica

Tutti gli studenti delle tre classi hanno risposto al quesito di "completamento della tavola pitagorica" durante l'intervista (cfr sez. 6.4.3): allo studente viene chiesto di fornire il numero

da inserire in una casella vuota di una tavola pitagorica parzialmente completata. Come spiegato nel capitolo 6, uno degli obiettivi di questo quesito era quello di raccogliere informazioni relative all'uso del pensiero relazionale nella ricostruzione di fatti aritmetici; ci si aspetta possa fornire dati interessanti al fine di rispondere alla domanda di ricerca *a* (cfr sez. 5.4). Per l'analisi delle soluzioni prodotte dagli allievi, si è scelto di utilizzare il costrutto di *routine* (Sfard, 2009; sez. 5.2.1). Si procede ad identificare le routine messe in atto dagli studenti nella soluzione del compito di completamento della tavola pitagorica. Tali routine sono infine analizzate sia in termini della tipologia di pensiero identificabile nella loro attuazione (relazionale o procedurale; sez. 8.3.2) sia del carico cognitivo per la memoria di lavoro necessario a metterle in atto (sez. 8.3.3). Nel seguito si descrivono le routine osservate nelle risposte date dagli allievi.

8.3.1 Routine osservate

In questa sezione sono elencate le routine rilevate nelle risposte degli studenti al compito di "completamento della tavola pitagorica" (cfr sez. 6.4.3). Le routine hanno come *prompt* i prodotti 3×2 , 7×3 e 6×8 . Si distinguono in termini dei *controlli* che gli studenti effettuano prima di operare, delle operazioni eseguite e della terminazione. Generalmente la *terminazione* consiste nel fornire il numero da inserire nella casella indicata. Per ciascuna routine, oltre alla caratterizzazione in termini di *controllo*, *operazione* e *terminazione*, sono presentati alcuni esempi di catalogazione di protocolli in quella stessa routine. Tali protocolli consistono in dialoghi fra il ricercatore (R) e i bambini (indicati di volta in volta con la rispettiva sigla) e sono organizzati in tabelle; ciascuna delle colonne delle tabelle è intitolata con la sigla identificativa dello studente al quale si riferisce il protocollo. Nel caso in cui a una routine siano associati più di un controllo o di una operazione, allora questi sono numerati.

Routine A: Elencazione della tabellina

Prompt: Se dovessi suggerire a un bambino come completare questa casella (indicando $R \times C$) cosa potrei dirgli?

Controllo: Controlla il numero iniziale della riga (R) E/O della colonna (C) in cui si trova la casella indicata.

Operazione: Se sceglie la colonna parte da C e elenca i primi R multipli di C. Se sceglie la riga allora parte da R e elenca i primi C multipli di R. Generalmente, usa il dito per indicare, una alla volta, le caselle mentre vengono elencati i risultati.

Terminazione: Il conteggio termina alla casella $R \times C$, nei casi in cui non sia stato effettuato il controllo sia su R sia su C il conteggio finisce a $R \times 10$ o $10 \times C$ a seconda della partenza.

Routine B: Somme ripetute

Prompt: Se dovessi suggerire a un bambino come completare questa casella (indicando $R \times C$) cosa potrei dirgli?

Controllo: Controlla il numero iniziale della riga (R) E della colonna (C) della casella indicata.

Operazione: Sceglie, generalmente (ma non sempre), il maggiore fra R e C. Sia R il maggiore, allora somma R con se stesso per C volte.

Terminazione: Termina quando ottiene il risultato della somma $R+R+...+R$.

	Sim	Fra	NicG	GaB
Prompt	R: questa qua [indica 3×7] come fa questo bambino a scoprire che numero ci sta lì dentro?	R: Come faccio a spiegargli come fa...che numero ci deve mettere qui [indica 2×3]?	R: [...] Senti: e se invece non se ne ricorda una parecchio grossa, tipo questa quaggiù [indica 8×6 sulla tavola pitagorica]?	R: Che cosa gli potrei suggerire per capire che numero deve mettere qui? [indica 2×3]
Controllo	Sim: Fa: questa è la tabellina del tre [scorre la matita dalla cima della terza colonna verso il basso] tanto la tabellina del tre è facile.	Fra: Questo tipo è il comando [indica la cima della colonna] facciamo finta che qua c'è due no? E c'è scritto ×2.	NicG: Io guarderei qui sopra [indica la prima casella dell'ottava colonna] tipo qui c'è il...sette, no! L'otto! [R annuisce] E tipo se sai la tabellina dell'8	
Operazione	Fa 6, 9, 12, 15, 18 [di volta in volta tocca con la punta della matita il rettangolo corrispondente]	2,4,6,8,10,12,14 [rimane un attimo in silenzio] 16,18,20.	[muove la mano come se stesse facendo dei saltelli, o dei passi che si allontanano] puoi contarla.	GaB: Facendo così [poggia la punta della penna su 1×3] tre [sposta la penna sulla casella 2×3, silenzio finché la punta della penna non tocca la casella]
Terminazione	e poi 21 [indica la casella 3×7 con la punta della matita]	R: E così la completa tutta. Ok.	Ma se non la sa, sei mmm..	

Tab. 8.3.1.1: Protocolli esemplificativi della Routine A “ricostruire tutta la riga/colonna”

	Mir	Mir	GaD	Ele
Prompt	R: [...] E senti: invece per mettere questo qui dove c'è il puntino qua [indica 3×7]? [...]Come faccio a spiegarglielo?	R: E se invece fosse un numero grosso grosso tipo questo quaggiù? [indica 3×9]	R: Allora, per esempio, se lui volesse mettere un numero qua [2×3] come potrebbe fare a capire che numero ci deve mettere lì? C'hai qualche suggerimento che gli potrei dare? [...]	R: [annuisce] Ah ok. E senti funziona anche...se deve trovare un numero molto grande [indica 3×7] come questo qua, come può fare? Ci può essere un modo più veloce?
Controllo	Mir: aspetta un attimo [mette un dito sulla prima casella della settima riga e poi scorre con l'altro dito lungo la riga]	[non tocca la tabella, la guarda e basta]	[GaD osserva la tabella per un per tutto il tempo del silenzio e mentre R continua a parlare dopo]	Ele: Può usare... [lungo momento di silenzio]
Operazione	Mir: Che sette più sette più sette [tocca una ad una le caselle della settima riga]	Mir: Sì fa 9+9+9	GaD: Può fare 3+3 [indica la casella 2×3]	può fare sempre +3 [scorre con la matita lungo la terza colonna]
Terminazione	[ferma il dito sulla casella 3×7] fa ventuno	Ventisette!	R: Ah, e lo mette lì. Ok, sì, dici tre più tre è già più facile.	

Tab. 8.3.1.2: Protocolli esemplificativi della Routine B “Somme ripetute”

Routine C: Uso della proprietà commutativa

Prompt: Se dovessi suggerire a un bambino come completare questa casella (indicando $R \times C$) cosa potrei dirgli?

Controllo: Controlla se nella casella corrispondente a $C \times R$ è presente un numero.

Operazione: Se in $C \times R$ è presente un risultato, allora viene copiato in $R \times C$.

Terminazione: Il numero copiato è considerato come risultato della casella.

	Fra	Fra	GaD	Lor
Prompt	R: E tipo, che ne so, questa qua [indica la 3×7] potrebbe scoprirla con questo trucchetto che dici te?	R: Quindi fare 2×3 o 3×2 viene sempre la stessa cosa?	R: [...] e invece se ne deve fare una grossa, tipo questa qua [3×7]? [segue silenzio] Cosa gli potrei dire di fare?	R: Lui non le sa a memoria. Come fa a scoprirlo lui?
Controllo	Fra: Aspetta eh [traccia la diagonale col dito] sì potrebbe. R: E quanto ci dovrebbe mettere? Cioè, da dove lo copia? Fra: Se non ce l'ha ancora scritto...ah no!	Fra: Sì. Poi alcune volte sono attaccati, tipo così e così [tocca 3×2 e 2×3]. Tipo, se uno ha scritto tipo così [il dito rimane su 3×2]	GaD: Può arrivare qui [indica 7×1] e poi [con la punta della matita scorre fino a 7×3 in cui è scritto 21] vedere qui	Lor: [guarda la tabella che ha di fronte] Potrebbe bastare...da qui! [indica 7×3 in cui è già scritto 21] perché questa sarebbe la tabellina del 3 [scorre col dito sulla terza riga]
Operazione	Da qui [mette il dito su 6×3] ah no, qui [si sposta su 7×3]	potrebbe copiarlo qui [indica 2×3] no?	e riscrivere il numero 21 [intanto poggia l'indice dell'altra mano sulla 3×7]	e anche qui c'è. Diciotto e poi c'è ventuno.
Terminazione	R: Che numero ci va? Fra: Ventuno!	R: Ah ok	R: Ah, lui riscrive 21.	[punta il dito sulla casella 3×7 più volte]

Tab. 8.3.1.3: Protocolli esemplificativi della Routine C "Uso della proprietà commutativa"

Routine D: Completamento a partire da un benchmark

Prompt: Se dovessi suggerire a un bambino come completare questa casella (indicando $R \times C$) cosa potrei dirgli?

Controllo: Controlla quale sia la riga (R) o colonna (C) della casella osservata. Controlla qual è la casella già completata più vicina nella riga/colonna della casella $R \times C$.

Operazione: Se non è presente nessun numero nella riga/colonna allora si ferma. Se è presente almeno un numero allora inizia a elencare i numeri successivi da inserire nella riga/colonna. Il dito viene generalmente usato per tenere il conto delle caselle.

Terminazione: Quando il dito tocca la casella $R \times C$, il numero pronunciato in quel momento è considerato il risultato da inserire.

	Mel	Lor	Sim	GaB
Prompt	R: Ah ok. Certo. E senti: invece se dovesse mettere, per esempio, questa qua [indica 3×7]	R: Senti, ma se invece non ce l'avesse già quello quaggiù [indica la parte superiore della tabella]. Se deve mettere questo qua [indica 9×3] come fa?	R: [...] Alla fine ci arriva, e quindi qui [indica la 8×6] quanto gli viene alla fine?	R: [...] Come possiamo fare?
Controllo	Mel: Il sette [alza due dita di una mano] sette, quattordici...[guarda la tavola pitagorica, indica col dito la casella che corrisponde a 1×7 ma nella quale non è scritto nessun numero] lo sa che qui c'è il sette? R: Eh no. Non lo so mica sai.	Lor: [rimane qualche istante a osservare la tabella] Se non ce l'ha aggiunge, tipo 21 [indica 7×3]	Sim: [metta la punta della matita su 5×6 all'interno della quale è già scritto il numero 30]	GaB: Qui ha il sei [indica la prima casella della sesta riga] e l'ultimo numero in fondo è il 30
Operazione		e poi 24 [il dito scorre sulla casella sotto] e poi 27 [dito su 9×3].	[scorre con la matita sopra ai rettangoli che ci sono fra il 30 e la casella indicata]	E fa 30+6 [scorre con la penna dalla casella che contiene il 30 alla successiva] +6 e +6 [continua a muovere la penna]
Terminazione	Mel: E' impossibile. Non lo so.	Perché questo è 27. E 27 può metterlo anche qui [indica il 3×9]	quarantotto! [lo dice mentre tocca la casella 8×6 con la punta della matita]	R: Ah! Questa mi sembra una buona idea.

Tab. 8.3.1.4: Protocolli della Routine D "Completamento per somme a partire da un benchmark"

Routine E: Aggiungere una moltiplicazione

Prompt: Se dovessi suggerire a un bambino come completare questa casella (indicando $R \times C$) cosa potrei dirgli?

Controllo 1: Controlla quale sia la riga (R) o colonna (C) della casella osservata. Controlla qual è la casella completata più vicina e presente nella riga/colonna della casella obiettivo.

Controllo 2: Controlla quante caselle separano la cella bersaglio da quella completata e più vicina

Operazione 1: Se quella completata più vicina è $R \times P$, allora calcola $R \times (C-P)$.

Operazione 2: Aggiunge il risultato ottenuto al risultato di $R \times P$.

Terminazione: Il numero ottenuto è considerato come risultato di $R \times C$.

Routine F: Moltiplicazione richiamata dalla memoria

Prompt: Se dovessi suggerire a un bambino come completare questa casella (indicando $R \times C$) cosa potrei dirgli?

Controllo: Controlla qual è la riga (R) E la colonna (C) della casella bersaglio

Operazione: Richiama dalla memoria il risultato di $R \times C$.

Terminazione: Il risultato richiamato viene considerato il risultato da inserire nella casella.

	MALb		Mar		Cat
Prompt	R: E se invece ne deve trovare uno grande grande, tipo – che ne so– questa qua [indica 8×6]? Come può fare a trovare questa qua?	R: Aspetta, aspetta. L’hai detto troppo veloce, mi sono perso. Rispiegamelo piano sennò io non capisco.	R: [indica 8×6] siccome già qualcuna se la ricorda, possiamo fargli fare un po’ meno calcoli per trovare quello.	R: Aspetta se faccio 30+12 dove arrivo? Spiegamelo un attimo, perché non ti ho seguito. Te hai detto faccio 30+12..	R: Quale potrebbe essere un modo per fare meno calcoli possibile?
Controllo	MALb: Trenta [mette il dito su 5×6 sulla quale è già scritto 30]	MALb: Allora [mette un dito sul 30 e un dito su 8×6]	Mar: parti direttamente dal 30	Mar: siccome 30+6 fa 36	Cat: qui ci sono tre caselle [scorre col dito da 6×5 a 6×8] ogni casella è +6
Operazione	poi ci metti altri tre [tiene il dito medio sulla casella mentre sposta l’indice] c’è 18 [indica la terza casella della sesta riga]	tre di queste sono diciotto. R: [...]quindi, aspetta, hai detto: trenta e poi cosa fa col diciotto? MALb: Lo mette qui [tiene sempre un dito sul 30 e uno sulla casella 8×6] perché se diciotto è la terza dall’inizio...	E poi fai direttamente più 12 perché mancano due caselle.	dovresti fare ancora più 6 [ogni volta che nomina il 6, scorre col dito nella casella successiva della riga]	Quindi fa 30 più. R: 30 più? Cat: Più 18
Terminazione	e fa 48	R: E quindi qui in fondo cosa gli viene? MALb: Qui gli viene 48		R: e arrivo qui però così [indica l’ultima casella su cui l’aveva poggiato] Mar: Sì	R: Ah, sì sì. Ok.

Tab. 8.3.1.5: Protocolli esemplificativi della Routine E “Aggiungere una moltiplicazione”

8.3.2 Confronto fra le routine: pensiero procedurale vs pensiero relazionale

In questa sezione, basandosi sulla definizione di pensiero relazionale adottata (sez. 3.3) si mettono in evidenza gli elementi di tale pensiero che emergono nell’uso delle routine: in particolare si punta a mettere in luce il ricorso al senso dell’operazione ovvero il ricorso alle proprietà della moltiplicazione. Le routine che si basano esclusivamente su sequenze di operazioni senza far ricorso a tali proprietà sono classificate come procedurali. Inoltre, si confrontano le routine osservate anche paragonandole a quelle già emerse dalla rassegna della letteratura (cfr sez. 3.4.2, tab. 3.4.2.1); il fine è quello di evidenziare se esse possano essere considerate dei casi particolari di altre già classificate in passato oppure possano essere intese come fenomeni nuovi.

Facendo riferimento alla letteratura citata nella sezione 3.4.2, la routine A può essere classificata come una strategia di *calcolo con sequenze di conteggio*; secondo la classificazione di Sherin e Fuson (2005), si tratta di una routine più immatura rispetto alle altre, ovvero

maggiormente diffusa fra i bambini più piccoli. Questa routine consiste nell'elencazione di una sequenza di numeri senza nessuna specificazione su come questi numeri siano ottenuti e sulle relazioni che tra essi intercorrono. Si tratta quindi di una routine di tipo procedurale. Questo appare particolarmente evidente nei casi in cui non c'è un controllo sulla terminazione (si veda il protocollo di Fra in tab. 8.3.1.1) e vengono elencati tutti i numeri della tabellina senza fermarsi a quello effettivamente richiesto.

	MAb	NicG	Lor	SofM
Prompt	R: [...] se dovesse cercare questo qua quaggiù [indica 3×7]?	R: Per esempio, come faccio a spiegargli come fare..cosa metterci qui [indica la 2×3] dove c'è questo puntino? In quella casella lì...	R: Ok. Mentre invece con questa qui [indica 3×7] come può fare?	R: Se dovessimo fare questo qua [indica 3×7] a che operazione corrisponderebbe?
Controllo	MAB: [scorre il dito indice lungo la colonna e la riga corrispondenti alla casella] 3×7 ? [R annuisce]		Lor: Tre per [col dito conta il numero di righe] sette.	SofM: Sette per... [segue silenzio] R: [annuisce] per quanto? SofM: [dopo qualche istante di silenzio] Tre R: E quindi te lo sai il risultato che ci va lì dentro? Qual è il risultato di 7×3 , te lo ricordi?
Operazione		NicG: Che tipo, può provare a fare 3×2 [indica la tabella ma non si capisce bene a quale casella si stia riferendo]	Tre per sette	
Terminazione	Fa 21	e così ti viene	fa ventuno	SofM: Ventuno

Tab. 8.3.1.6: Protocolli esemplificativi della Routine F "Moltiplicazione richiamata dalla memoria"

La routine B si basa sul *modello iterativo* (cfr sez. 3.4.1) della moltiplicazione e può essere considerata un caso di *calcolo additivo* (Sherin & Fuson, 2005). Anche questa routine può riflettere un pensiero di tipo procedurale, il che è messo in evidenza da alcune forme linguistiche usate dai bambini (tab. 8.3.1.2): per esempio Mir dice che "si fa" come se stesse indicando una procedura generale che deve essere eseguita, Ele sostiene che l'ipotetico bambino da aiutare "può fare sempre più 3" come a sottolineare il fatto che la procedura si debba ripetere.

Le routine C, D ed E sarebbero tutte da considerarsi *ibride* (Sherin & Fuson, 2005) dato che si fa ricorso a un fatto moltiplicativo noto a partire dal quale si ricostruisce quello desiderato. La F è il caso in cui viene utilizzato esclusivamente il *prodotto appreso* (*ibidem*). In tutti questi casi l'operazione della routine è eseguita su un prodotto che quindi è oggetto della procedura, mentre nei due casi precedenti la moltiplicazione è definita dalla procedura stessa. Pertanto le ultime quattro routine presentano una *condensazione*, nel senso di Sfard (1994, cfr sez. 5.2.2).

Nel dettaglio, usando i termini di Ter Heege (1985; sez. 3.4.2) si può classificare la routine C come applicazione della proprietà commutativa. Si tratta quindi di una routine che si basa su una proprietà aritmetica, la sua applicazione richiede senso dell'operazione e la consapevolezza dell'equivalenza di due moltiplicazioni con l'ordine dei fattori scambiati. Pertanto questa routine può essere associata a un pensiero di tipo relazionale. Questo tipo di interpretazione appare particolarmente valido in quei casi in cui gli studenti forniscono una spiegazione della relazione che c'è fra le due moltiplicazioni. In tab. 8.3.1.3 è riportato il protocollo di Fra che per determinare la casella da cui "copiare" il risultato, sfrutta la simmetria della tabella (così come mostrato dai suoi gesti); Lor invece mette in evidenza che sia nella terza riga sia nella terza colonna è possibile trovare tutti i multipli del 3. In questo secondo caso non si tratta di una formulazione generale, dato che si fa esplicito riferimento al 3, ma può essere considerato un caso di applicazione della proprietà commutativa in forma di *teorema in atto* (Vergnaud, 1985).

Le routine D ed E sono entrambe casi di *aumento di prodotti* (Sherin & Fuson, 2005). La differenza sostanziale fra le due consiste nell'operazione che viene effettuata. Nel caso della routine D si sfrutta un prodotto noto e da esso si parte con un processo di tipo iterativo. Gli studenti che seguono questo comportamento potrebbero considerare la prima moltiplicazione richiamata come condensazione del processo di somma ripetuta, poi procedono avanti (o indietro) sempre per somme ripetute. Si tratta di un comportamento procedurale come messo in evidenza da frasi della forma "e poi... e poi..." (protocollo di Lor in tab. 8.3.1.4) e dai movimenti ciclici delle dita o della penna (Mir in tab. 8.3.1.4). Il fatto che la procedura eseguita non sia sempre messa in relazione con altre conoscenze sulla moltiplicazione è evidente nel caso di Mel che, non potendo applicare la procedura, rimane bloccata: "è impossibile, non lo so" (tab. 8.3.1.4). In quest'ultimo esempio è particolarmente evidente il ricorso a un pensiero di tipo procedurale.

Nella routine E si sfruttano due prodotti già condensati e si applica (eventualmente in forma di *teorema in atto*) la proprietà distributiva. In questo senso l'applicazione di questa routine rappresenta un'istanza di pensiero relazionale in quanto gli studenti riconoscono l'uguaglianza fra i risultati dell'operazione da loro calcolata e quella richiesta basandosi, in modo non sempre esplicito, sulla proprietà distributiva della moltiplicazione. Inoltre, in questa routine gli studenti manipolano le operazioni con la finalità di determinare il risultato desiderato. Queste manipolazioni avvengono scegliendo opportunamente i numeri da sommare in base alle relazioni fra le moltiplicazioni in gioco: MAlb afferma chiaramente che se si vuole calcolare 6×8 a partire da 6×5 si deve sommare 18 "perché se diciotto è la terza dall'inizio..." (tab. 8.3.1.5) come se volesse dire che non potrebbe essere altrimenti. Ancora: Mar, nell'eseguire lo stesso calcolo, afferma erroneamente che si debba sommare 12, tuttavia spiega chiaramente che la sua convinzione dipende dal fatto che "mancano due caselle" (tab. 8.3.1.5) e si trova nella sesta riga.

Inoltre, per eseguire questa routine, devono essere eseguite operazioni di tipo diverso (prodotti e somma) seguendo un giusto ridine; dimostrando quindi anche un certo senso della struttura.

In definitiva le routine analizzate sono sempre riconducibili a casi già riscontrati in letteratura anche se l'analisi presentata mostra una differenza sostanziale fra le routine D ed E che nella letteratura del passato ricadrebbero nella stessa categoria.

Fra tutte, le uniche routine che possono essere classificate come legate a pensiero di tipo relazionale sono la routine C e la routine E. Per quel che riguarda le altre, è evidente che la routine D presenta una condensazione che nelle routine A e B non è ancora avvenuta ma è comunque da intendersi come istanza di pensiero procedurale.

La routine F non è classificabile come relazionale laddove è il risultato del richiamo diretto dalla memoria senza nessuna applicazione di senso dell'operazione. Questo tipo di classificazione sembra essere appropriato in analogia a quanto riportato da Mason e colleghi (2009) secondo i quali “una persona che semplicemente dice che $a \times b$ dà l'area del rettangolo senza essere in grado di spiegare il perché, può star coinvolgendo soltanto del puro pensiero procedurale o strumentale” (p. 28).

8.3.3 Analisi del carico cognitivo della memoria di lavoro

Un'ulteriore distinzione fra queste routine può essere fatta considerando le informazioni che devono essere conservate in memoria di lavoro partendo dalla richiesta che viene fatta e dalle informazioni presenti nella memoria a lungo termine. Nel caso in cui il fatto aritmetico sia disponibile in memoria a lungo termine (MLT) allora l'impiego di memoria di lavoro è molto basso: una volta registrato il fatto aritmetico richiesto si attiveranno diverse informazioni in MLT che riguardano i due fattori. La memoria di lavoro (WM) è coinvolta solo nel ricordare il fatto richiesto e nel controllare che venga selezionata l'informazione corretta.

Adottando il *modello multicomponenziale* di Baddeley (2000; cfr sez. 2.1.1), questa sequenza di operazioni è schematizzata nella figura 8.3.3.1; ciascuna immagine rappresenta una fase della sequenza procedendo da sinistra verso destra. Il rettangolo grigio rappresenta indistintamente il taccuino visuo-spaziale e il loop fonologico dato che l'inserimento dell'informazione nell'uno o nell'altro dipende dalla modalità con cui l'informazione viene fornita o recuperata (i numeri potrebbero essere rappresentati come immagini, usando le cifre, o come parole che vengono ripetute). Il rettangolo bianco rappresenta la MLT semantica mentre l'altra figura in grigio rappresenta il buffer episodico. L'ovale posto in cima indica l'esecutivo centrale. Complessivamente quindi, la WM è rappresentata in grigio. Un piccolo cerchio bianco rappresenta una singola informazione o un chunk, il bordo del cerchio è più spesso quando un'informazione viene attivata all'interno della MLT. Le frecce tratteggiate rappresentano il passaggio di un'informazione da una componente della memoria a un'altra. Le informazioni che non sono più riportate possono essere considerate nella MLT episodica o non più disponibili.

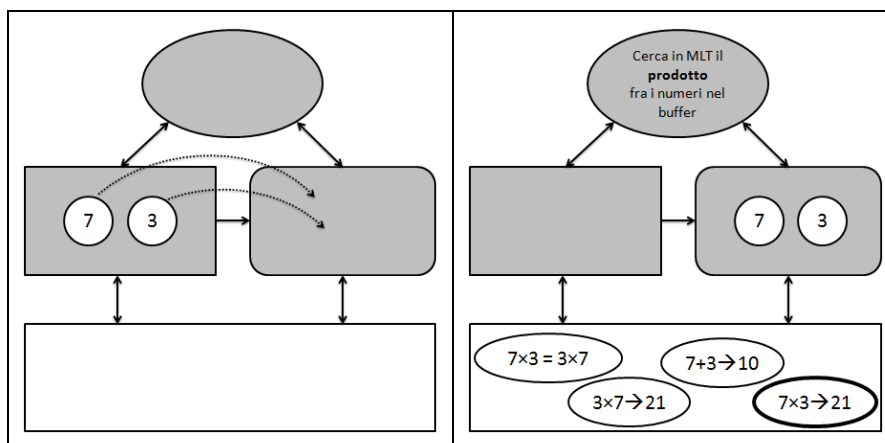


Fig. 8.3.3.1: Schematizzazione delle informazioni presenti in WM nel caso di richiamo diretto.

Quando il richiamo diretto non è possibile perché il fatto aritmetico richiesto non è immediatamente disponibile, allora si attiverà una diversa routine. Si consideri per esempio la routine A. Una volta richiesta la moltiplicazione, lo studente conserva in WM soltanto uno dei due fattori e, a partire da questo, ricerca nella MLT il numero che lo segue all'interno della sequenza dei suoi multipli.

Per esempio nel caso di 7×3 il bambino dovrà ricordare il 7 e poi andare a cercare il suo multiplo successivo, cioè 14. A questo punto dovrà "tenere a mente" sia il 14, per determinare l'elemento successivo della sequenza, sia il 7, per sapere quale è la sequenza su cui deve proseguire, ovvero il "passo" fra un numero della sequenza e quello successivo. Quindi, per procedere nel compito di richiamo, in memoria di lavoro devono rimanere sempre due informazioni: il 7 e l'ultimo multiplo determinato. Quando si sarà raggiunto 7×10 ci si fermerà o perché in MLT non è presente un successivo elemento per la sequenza o perché l'esecutivo centrale blocca la procedura al raggiungimento del numero che corrisponde al primo della sequenza a cui è affiancato lo zero. Nell'esempio, 7 affiancato a 0 è 70 e quindi quando verrà pronunciato/scritto quel numero ci si fermerà (Fig. 8.3.3.2).

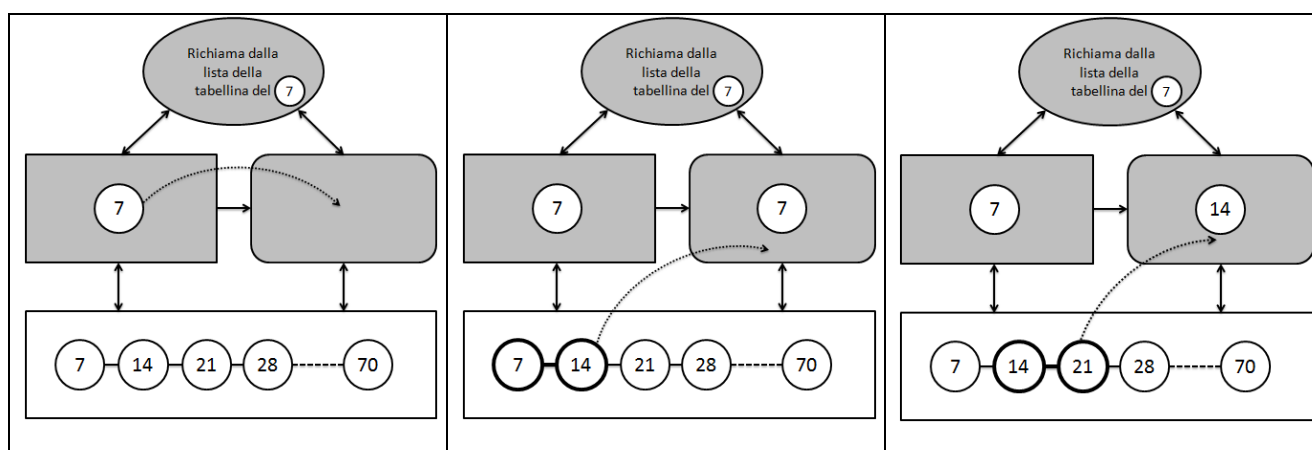


Fig. 8.3.3.2: Schematizzazione delle informazioni presenti in WM nella routine A.

Nel caso della routine B le informazioni da conservare sono di più. Infatti si devono ricordare entrambi i fattori della moltiplicazione perché uno servirà da addendo e l'altro servirà per determinare il numero di addizioni. Inoltre, è necessario un maggior coinvolgimento dell'esecutivo centrale per monitorare il numero di addizioni già eseguite e determinare

quindi il momento in cui la ripetizione delle somme deve terminare. Dalla MLT devono essere richiamati di volta in volta i risultati delle somme (Fig. 8.3.3.3). Sia in questo caso sia nel precedente, la WM si appesantisce maggiormente se, non potendo richiamare un'informazione (per es. il risultato di una somma) dalla MLT, la si deve ricavare in qualche modo.

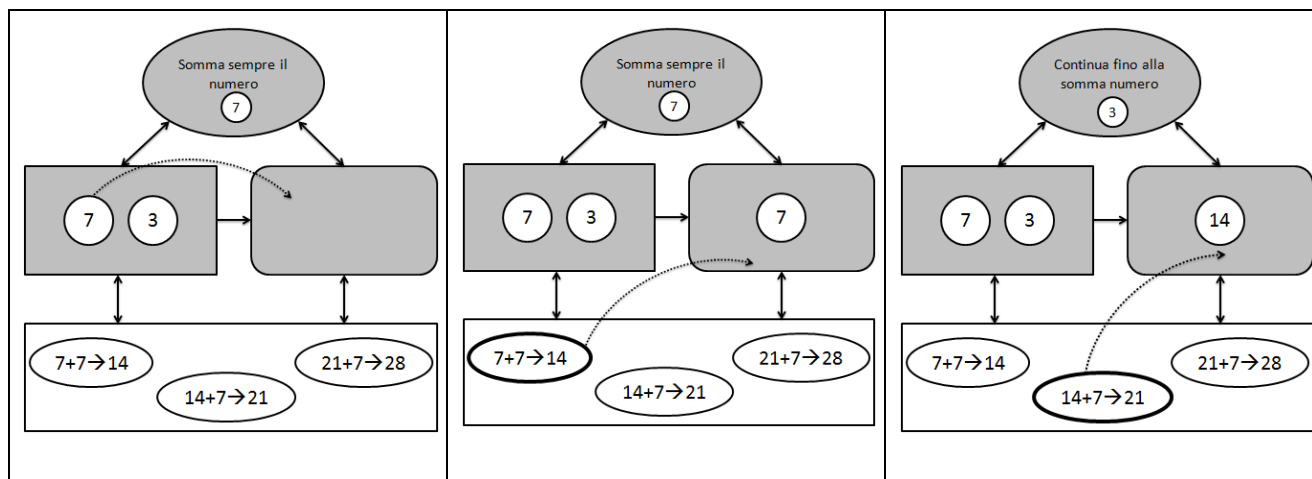


Fig. 8.3.3.3: Schematizzazione delle informazioni presenti in WM nella routine B.

La routine C, invece, non è di tipo ricorsivo. Non è necessario un coinvolgimento dell'esecutivo centrale per monitorare un processo ma soltanto per spostare l'attenzione dall'operazione richiesta a quella con l'ordine dei fattori invertito. Pertanto una volta acquisiti i due fattori, si elaborerà l'informazione per ricavare direttamente dalla MLT il risultato cercato (Fig. 8.3.3.4).

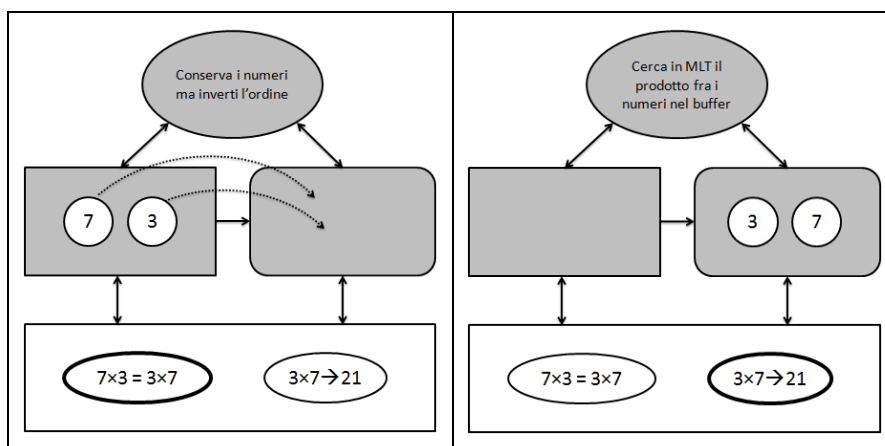


Fig. 8.3.3.4: Schematizzazione delle informazioni presenti in WM nella routine C.

La routine D è di tipo ricorsivo e richiede anche un coinvolgimento dell'esecutivo centrale nella fase di controllo. Infatti, una volta acquisiti i due fattori è necessario determinare un prodotto "vicino" a quello cercato e quindi, a partire da questo avviare una ricorsività simile a quella della routine B. Può essere un'addizione ripetuta se il prodotto selezionato è minore di quello obiettivo, una sottrazione ripetuta se invece è maggiore⁵².

⁵² Nessuno studente ha applicato questa routine con la sottrazione durante le interviste analizzate in questa sezione; tuttavia si vedrà che nelle interviste successive questa modalità di applicazione della routine viene implementata da bambini della classe seconda sperimentale. Inoltre è documentato in letteratura il caso di

In più l'esecutivo centrale è coinvolto nel mantenere il controllo sul numero di volte in cui il processo deve essere ripetuto. Nella figura 8.3.3.5 è schematizzato un esempio in cui si fa uso delle addizioni ripetute per ricostruire il risultato di 7×3 a partire da quello di 5×3 .

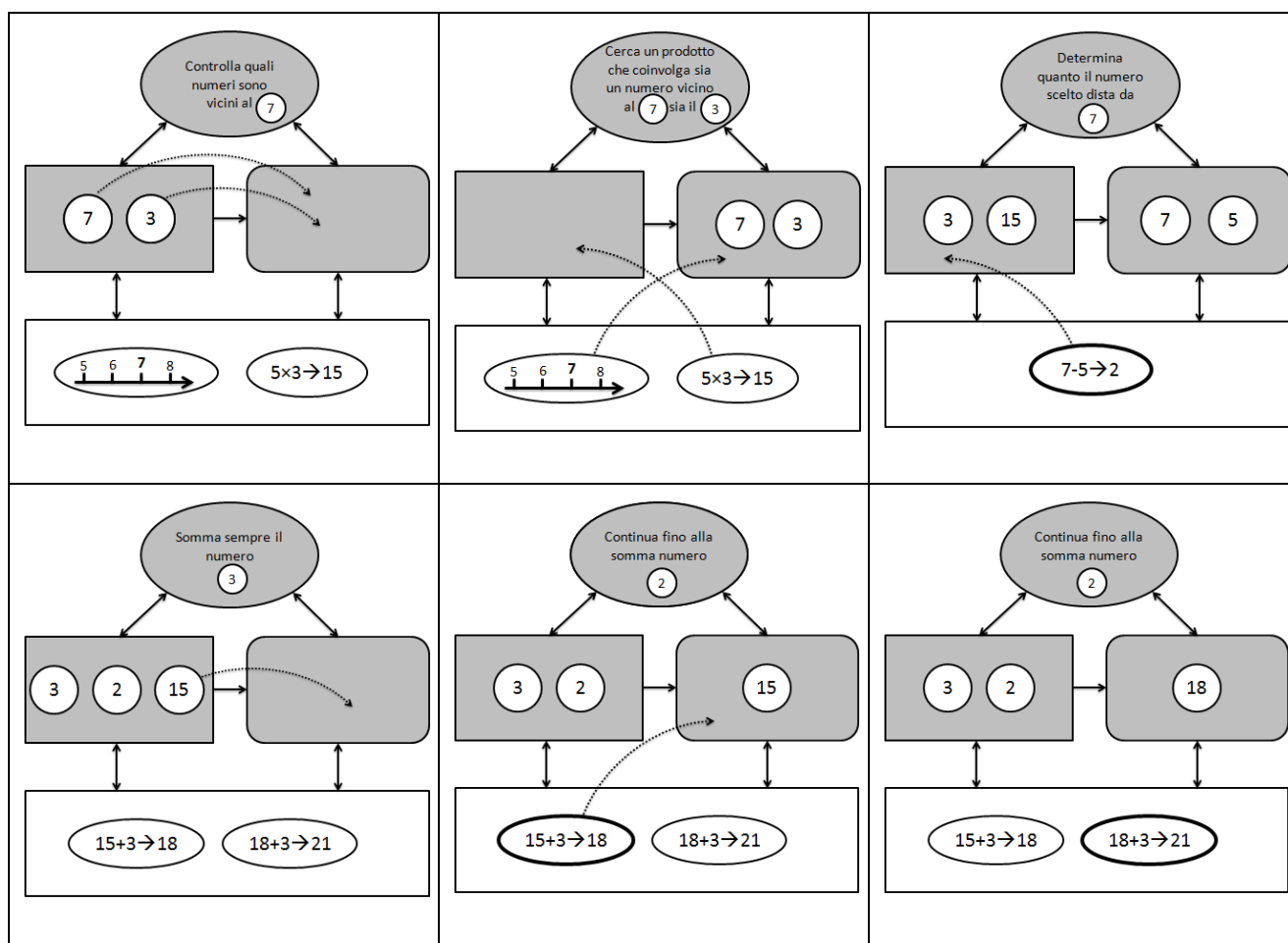


Fig. 8.3.3.5: Schematizzazione delle informazioni presenti in WM nella routine D.

La routine E non è ricorsiva quindi non è necessario un coinvolgimento dell'esecutivo centrale per il controllo del termine del processo anche se esso continua a rivestire un ruolo centrale nella scelta dei fatti moltiplicativi da richiamare dalla MLT, che in questo caso sono due anziché uno solo come nel caso della routine D. In figura 8.3.3.6 è riportato un esempio: si può notare che si arriva a conservare in memoria di lavoro fino a 4 informazioni differenti, chiaramente anche in questo caso il carico aumenta nel momento in cui una delle informazioni non fosse disponibile in MLT e fosse necessario ricostruirla sul momento.

Questo tipo di modellizzazione è chiaramente una semplificazione rispetto alla molteplicità di processi che possono attivarsi, ma permette di mettere in luce differenze dal punto di vista cognitivo che intercorrono fra le varie routine. Il coinvolgimento dell'esecutivo centrale è sempre più alto a partire dalla routine A fino alla routine E; il numero di informazioni da conservare in WM cresce. Inoltre, è differente il tipo di informazioni da richiamare dalla MLT. Nella routine A si tratta di sequenze in cui ciascun numero è un'informazione a sé stante (non parte di un chunk) ed è collegato al numero successivo e al precedente. Negli altri casi si

devono richiamare fatti aritmetici; tali fatti sono tutti additivi nel caso della routine B, uno solo moltiplicativo nel caso della C, uno moltiplicativo e altri additivi nel caso della D e due moltiplicativi e due additivi nel caso della E.

In questo senso si può vedere una difficoltà differente nelle diverse routine. Questa complessità riguarda il maggior carico di lavoro per la WM che può essere deficitaria proprio nei soggetti che hanno più difficoltà ad apprendere i fatti aritmetici (cfr sez 2.3.3).

Pertanto, se da un lato le diverse routine ricostruttive possono apparire come valide alternative al richiamo diretto del risultato di una moltiplicazione, può darsi che non tutte siano accessibili immediatamente a tutti i bambini a causa del limitato span della WM. Tuttavia, i semplici esempi qui riportati mostrano come nelle routine più complesse il processo di ricostruzione del singolo fatto moltiplicativo richiesto sia messo in relazione con una rete di significati il che, secondo i modelli dei livelli di elaborazione e di propagazione dell'attivazione, dovrebbe risultare in un apprendimento più duraturo.

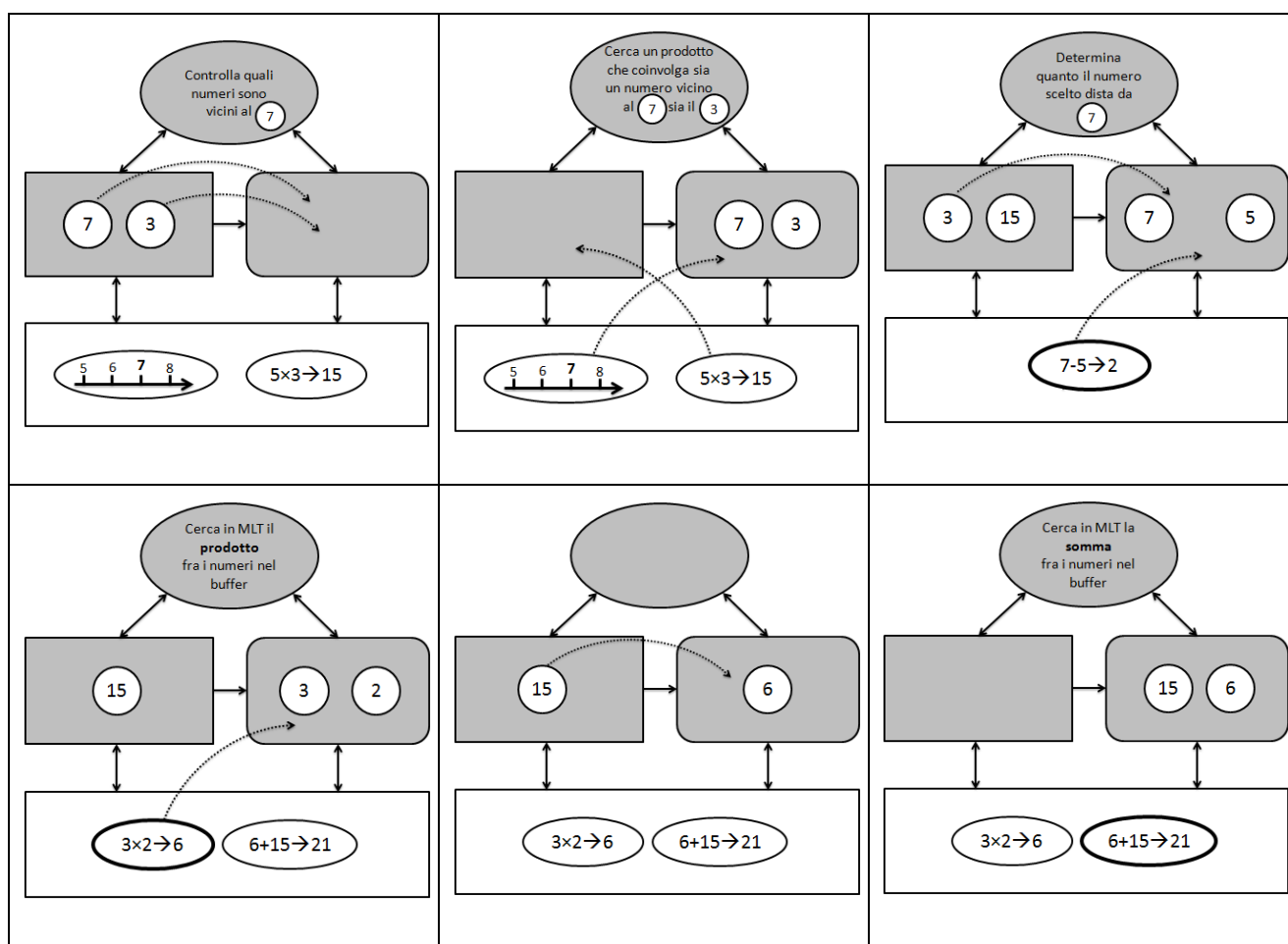


Fig. 832.3.6: Schematizzazione delle informazioni presenti in WM nella routine E.

Si può ipotizzare che l'impossibilità di ricorrere a routine in cui si creano fitte reti di significati possa essere una delle cause delle difficoltà nell'apprendimento dei fatti moltiplicativi per gli studenti che hanno una memoria di lavoro meno "capiente". La letteratura mostra l'esistenza di fatti moltiplicativi il cui richiamo è più semplice (cfr sez. 2.3). L'uso di questi fatti aritmetici

all'interno di routine complesse come la D e la E potrebbe renderle accessibili anche agli studenti con uno span limitato.

8.4 Routine utilizzate dai diversi gruppi di studenti

Agli studenti delle tre classi coinvolte è stato sottoposta la consegna di completamento della tavola pitagorica (cfr sez. 6.4.3). Le risposte degli studenti sono state classificate secondo le routine esplicitate nella sezione precedente. Nella tabella 8.4.1 sono riportate le frequenze con cui ciascuna routine compare in risposta ai tre diversi prodotti richiesti e nelle tre classi. Pertanto ciascuno dei numeri presenti nella tabella indica il numero di bambini che, all'interno della classe, ha utilizzato una determinata routine (da A fino a F) per rispondere a un determinato prompt. Si noti che la somma dei valori contenuti in ciascuna colonna eccede il numero di bambini presenti nelle classi, questo perché lo stesso bambino può aver presentato più di una routine per rispondere allo stesso prompt. Fanno eccezione le colonne relative al prodotto 6×8 il quale non è stato richiesto agli studenti che hanno manifestato grandi difficoltà a rispondere agli altri due prodotti.

Routine	Prompt								
	3×2			7×3			6×8		
	2 Sper	5 Sper	Contr	2 Sper	5 Sper	Contr	2 Sper	5 Sper	Contr
A	3	1	2	2	0	2	4	0	1
B	9	6	9	4	2	4	2	3	3
C	7	10	3	8	10	3	2	0	0
D	1	6	3	1	5	6	3	9	6
E	0	0	0	0	0	0	1	6	0
F	1	1	1	4	0	0	2	2	0
Non risp	0	0	0	1	0	2	1	2	3

Tab. 8.4.1: Frequenza assoluta delle diverse Routine a seconda del prompt fornito.

I dati così organizzati sono stati messi a confronto attraverso il test esatto di Fisher (con ipotesi a una coda) valutando, per ciascuna routine, quanti studenti la usano e quanti invece non ne fanno uso per rispondere al particolare prodotto richiesto. I risultati di questa analisi sono riportati nelle tabelle 8.4.1.1 e 8.4.2.1 in cui vengono messe a confronto, rispettivamente, le due classi sperimentali e le due classi seconde. Le differenze significative ($p < 5\%$) sono evidenziate.

8.4.1 Confronto fra le classi sperimentali

Le due classi sperimentali hanno un comportamento molto simile nel rispondere al prompt 3×2 preferendo, generalmente, le routine B e C. Per rispondere a questo prodotto non viene mai utilizzata la routine E, gli studenti usano invece la routine D (aggiungendo 2 al risultato di 2×2), la routine B (sommando $2+2+2$ o $3+3$) o la routine A (elencando i multipli di 2 o quelli di 3). Si può notare che la routine D viene scelta particolarmente nella classe quinta; anche in questo caso la differenza non è però significativa (Tab. 8.4.4.1).

Si registra invece una differenza significativa nel caso di 7×3 . Entrambe le classi fanno spesso uso della routine C, tuttavia in quinta viene fatto ricorso spesso anche alla routine D, in seconda questo avviene in un solo caso.

Routine	Prompt		
	<u>3×2</u>	<u>7×3</u>	<u>6×8</u>
A	25%	31%	3%
B	16%	45%	55%
C	41%	14%	22%
D	7%	5%	28%
E	-	-	1%
F	51%	8%	72%
Non risp	-	41%	14%

Tab. 8.4.1.1: p-value del test di Fisher a una coda nel confronto fra le due classi sperimentali.

Si notano invece differenze fra i dati raccolti nelle due classi sperimentali anche nel caso di 6×8. Di fatto la classe quinta non fa mai uso della routine A e fa un largo uso della routine E (anche rispetto all'altra seconda). La routine A sembra quindi caratterizzare le classi seconde e questo non stupisce essendo questa una routine decisamente procedurale e che richiede uno scarso impiego della memoria di lavoro senza necessitare di aver già appreso fatti moltiplicativi. La routine E sembra invece caratterizzare la classe quinta; è una delle routine più complesse, che richiede un carico cognitivo alto e gestibile soltanto quando alcuni fatti moltiplicativi sono già memorizzati. Inoltre, l'applicazione di questa routine è un'istanza di *pensiero relazionale che sembra quindi essere più sviluppato negli studenti di quinta rispetto a quelli di seconda*.

8.4.2 Confronto fra le classi seconde

Non si hanno differenze significative quando si confrontano le risposte delle due classi seconda alla richiesta di completare la casella corrispondente a 3×2 e quella corrispondente a 6×8 (Tab. 8.4.2.1). Per il primo prodotto entrambi i gruppi di studenti fanno maggiormente ricorso alla routine più procedurali (A e B) anche se nella classe sperimentale viene usata piuttosto frequentemente anche la routine C.

Routine	Prompt		
	<u>3×2</u>	<u>7×3</u>	<u>6×8</u>
A	55%	74%	21%
B	50%	72%	45%
C	18%	11%	27%
D	26%	3%	17%
E	-	-	53%
F	22%	7%	27%
Non risp	-	46%	21%

Tab. 8.4.2.1: p-value del test di Fisher a una coda nel confronto fra le due classi seconde.

Andando a osservare i dati relativi al prodotto 7×3 si può notare che la seconda sperimentale si distingue da entrambe le altre due classi. Infatti, questi studenti utilizzano la routine D molto meno degli altri. Essendo completato il prodotto 6×3, molti studenti della classe di controllo raggiungono il risultato richiesto sommando 3 al 18 che è già inserito nella tavola pitagorica. Gli studenti della seconda sperimentale utilizzano poco questa routine, andando invece a verificare la presenza del risultato corrispondente a 3×7 che è effettivamente già scritto. Questo prodotto differisce dal precedente per la maggiore distanza rispetto alla

diagonale della tabella e quindi rispetto alla casella simmetrica. Pertanto, una possibile interpretazione di questo fenomeno è che gli allievi della classe seconda sperimentale effettuino sistematicamente il controllo della routine C anche quando il prodotto è lontano dalla diagonale, mentre gli altri notano la presenza del prodotto nella casella simmetrica soltanto quando questa è vicina. A favore di questa interpretazione, si può notare che anche nel caso del prodotto 6×8 alcuni studenti della seconda sperimentale provano a usare la routine C (fallendo dato che la casella simmetrica è vuota) mentre gli studenti delle altre classi non esplicitano mai l'uso di questa routine per quel prodotto.

Fra gli studenti che usano la routine C si possono notare due comportamenti diversi nella fase di controllo: alcuni, dopo che è stato richiesto il risultato di $R \times C$ vanno a cercare il risultato di $C \times R$ scorrendo con un dito lungo l' R -esima colonna e con un altro lungo la C -esima fino a trovare la casella che corrisponde all'intersezione; altri (si veda il protocollo di Fra in tabella 8.3.1.3) cercano la casella $C \times R$ come simmetrica di $R \times C$ rispetto alla diagonale. Questo particolare controllo compare soltanto nelle classi sperimentali, non viene mai manifestato nella classe di controllo. Pertanto l'uso della routine C sembra caratterizzare le classi sperimentali e in particolare la seconda..

In conclusione, le due classi sperimentali si distinguono per l'uso della routine C e anche per l'uso della routine E che non compare mai invece nella classe di controllo. La classe di controllo fa invece maggior uso della routine D che è una routine complessa in termini di carico cognitivo ma procedurale.

Le routine C ed E sono invece due routine che fanno leva sul pensiero relazionale e si basano sostanzialmente sulla proprietà commutativa e sulla proprietà distributiva, due proprietà che sono oggetto dell'intervento in classe con la tavola di Laisant. *Gli studenti delle classi coinvolte nell'intervento dimostrano più frequentemente l'applicazione di pensiero relazionale, probabilmente ricollegabile proprio all'intervento attuato.*

9 Pensiero relazionale come emergente dall'uso dell'artefatto

Nella sezione 8.1 si è mostrato che gli studenti delle classi sperimentali hanno risultati positivi nel test BDE. In particolare la seconda sperimentale si rivela particolarmente performante nei compiti che riguardano le moltiplicazioni. Nella sezione 8.2 è evidenziata la presenza di routine che gli studenti delle classi sperimentali mettono in atto per la ricostruzione di fatti aritmetici e, in accordo con la letteratura (cfr sez. 2.3) e con l'analisi a priori (cfr cap. 7), si sono mostrate evidenze del fatto che nell'applicazione di queste routine viene fatto uso delle proprietà delle operazioni per manipolare relazioni aritmetiche al fine di raggiungere espressioni equivalenti utili a determinare il risultato desiderato; ovvero viene fatto ricorso al pensiero relazionale definito nel capitolo 3 (sez. 3.3).

In questo capitolo si approfondisce l'analisi del pensiero relazionale mobilitato dagli studenti a distanza dal l'intervento didattico anche col fine di mettere in evidenza possibili legami rimasti con le attività con l'artefatto dei cicli didattici implementati.

A tale fine, all'inizio dell'anno scolastico successivo a quello in cui l'intervento in classe è stato implementato, si è deciso di testare lo sviluppo del pensiero relazionale attraverso un compito inserito all'interno di un test più ampio sulla moltiplicazione (sez. 6.4.4) somministrato dall'insegnante di classe. Nel compito viene chiesto agli studenti di commentare per scritto un'immagine che rappresenta due studenti mentre scrivono delle uguaglianze fra espressioni aritmetiche su una lavagna (Fig. 9.1.1).

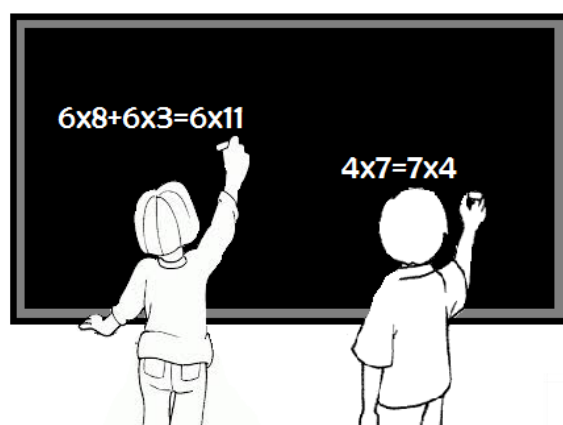


Fig. 9.1.1: L'immagine che gli studenti devono commentare nel test.

La stessa immagine è stata commentata da entrambe le classi sperimentali. Le risposte degli studenti sono riportate nell'allegato 2. Nel caso degli studenti della classe quinta, i risultati di tale test saranno messi a confronto con quelli del pre-test (sez. 6.4.1) finalizzato a individuare l'eventuale presenza di istanze di pensiero relazionale precedenti l'intervento sperimentale.

Nelle sezioni successive si presentano i risultati ottenuti in questi test, rispettivamente nella classe quinta e seconda. L'analisi riguarda le evidenze osservabili relative al pensiero relazionale e per questo si farà sempre riferimento alle tre componenti che definiscono il pensiero relazionale così come inteso in questo lavoro: interpretazione del simbolo di uguaglianza, senso della struttura, senso dell'operazione (cfr. cap. 3).

In particolare, si presenteranno prima i risultati relativi alla classe quinta (sez. 9.1), facendo un confronto fra i dati raccolti con questo compito e quelli relativi al pre-test (sez. 9.1.2). Successivamente si analizzeranno i dati relativi alla classe seconda (sez. 9.2) facendo anche riferimento a delle interviste di approfondimento finalizzate a chiarire ambiguità emerse dall'analisi degli scritti dei bambini (sez. 9.2.2). Nell'ultima sezione del capitolo (sez. 9.3) si fa un confronto fra le due classi al fine di rispondere alle sotto-domande di ricerca relative alle differenze fra alunni di età diversa.

9.1 Sviluppo del pensiero relazionale nella classe quinta

Analizzando le risposte degli studenti della classe quinta, si nota immediatamente che il riferimento alle proprietà della moltiplicazione è ampio ed esplicito. Relativamente all'uguaglianza di destra nella figura 8.3.1, la quasi totalità degli studenti afferma che l'equivalenza è corretta ed è garantita dalla proprietà commutativa, nominandola oppure enunciandola:

Pet: Sì, perché anche se invertiamo i fattori il risultato non cambia, es. $4 \times 7 = 28$ es. $7 \times 4 = 28$

Cat: Sì ha scritto bene perché nella moltiplicazione vale la proprietà commutativa

Da notare il fatto che più di uno studente parla di “applicare” o “eseguire” la proprietà commutativa, come se si trattasse di un processo che agisce sull'oggetto matematico “operazione”. Pertanto questi studenti rivelano una visione procedurale delle proprietà delle operazioni:

Marti: Sì perché sulla moltiplicazione si può **applicare** la proprietà commutativa

Sam: Sì ha scritto una cosa corretta perché **ha eseguito** la proprietà commutativa

Fra i sostenitori della correttezza dell'uguaglianza, c'è un unico studente che passa attraverso il calcolo del risultato per arrivare a stabilire l'equivalenza fra i due membri dell'uguaglianza.

Alcuni studenti rispondono affermando che l'uguaglianza scritta non è corretta. Dav sostiene che si tratti soltanto della proprietà commutativa, sembra quindi riconoscere la proprietà ma non apprezza invece la simbologia utilizzata per rappresentarla. Appare simile la risposta di Fed. Singolare, invece, il caso di Eri:

Eri: No perché viene un numero pari

L'allieva sta probabilmente confrontando il risultato ottenuto da qualche calcolo (viene un numero pari) con uno dei numeri presenti nella scrittura (evidentemente un numero dispari). Un'altra interpretazione è che Eri stia in realtà rispondendo alla domanda successiva del test (si veda il test completo nella sez. 6.4.4).

Passando all'analisi dell'uguaglianza che rappresenta la proprietà distributiva, la stessa studentessa dimostra ancora difficoltà:

Eri: No perché $6 \times 8 = 48$ e $6 \times 3 = 18$ non va bene perché se riuniamo i risultati delle moltiplicazioni non fa 11

Sembra che la bambina stia considerando 11 (l'ultimo numero che compare in fondo a destra) come risultato di tutta l'espressione. Questa interpretazione suggerisce una visione procedurale del simbolo di uguaglianza che viene visto soltanto come *stimolo per una risposta* (Molina & Ambrose, 2008).

Non è l'unica a rispondere "no" per questa seconda uguaglianza. Diversi bambini affermano che non è vera perché non è stata applicata nessuna proprietà. Probabilmente questi studenti vogliono confrontare i due membri in modo relazionale ma, non riuscendo a riconoscere la relazione data dalla proprietà distributiva, ritengono che le due espressioni numeriche non possano essere equivalenti. Questi allievi potrebbero quindi avere una difficoltà nell'analizzare la struttura dell'espressione dato che non riconoscono la proprietà, tuttavia dimostrano di star sviluppando pensiero relazionale perché non sono ricorsi immediatamente al calcolo dei risultati per effettuare il confronto; interpretano quindi l'uguale come *espressione di una relazione* (ibidem).

Per quanto riguarda coloro che sostengono la correttezza dell'uguaglianza, solo due studenti ricorrono al confronto fra i risultati; interpretano l'uguale come *espressione di un'azione* sulle operazioni indicate (ibidem). Entrambi questi bambini dimostrano un buon senso della struttura; in particolare Sam rivela una *reificazione* (Sfard, 2009) delle moltiplicazioni che diventano complemento oggetto di un'azione di somma:

Marti: Sì perché $48 + 18$ fa 66 e 6×11 fa 66

Sam: Sì ha scritto una cosa corretta, perché **ha sommato le due moltiplicazioni**, se sommi il risultato delle moltiplicazioni il risultato è uguale se fai 6×11

Si noti che Sam dimostra di essere in grado di passare da una visione delle moltiplicazioni come oggetto (ha sommato le due moltiplicazioni) a una visione delle moltiplicazioni come processo (se sommi il risultato delle moltiplicazioni).

La maggior parte dei sostenitori del "sì", riconosce l'applicazione di una proprietà. Diversi nominano proprio la proprietà distributiva, altri (forse per un'interferenza nel richiamo dalla memoria del nome della proprietà) la chiamano "associativa".

Fab: Sì, perché $8 + 3 = 11$ e quindi fa 6×11

Car: Ha scritto una cosa corretta perché ha usato la proprietà associativa

Joh: Sì perché la proprietà associativa c'è anche nella moltiplicazione

Confrontando i due ultimi interventi si può notare che in Car si ritrova la visione procedurale della proprietà notata precedentemente: la proprietà viene “usata” così come prima la proprietà commutativa veniva applicata o eseguita. Joh invece dice che la proprietà “c'è” come se fosse un attributo, incorporata nell'operazione stessa. Pertanto questo bambino mostra una reificazione della proprietà. Purtroppo, l'impossibilità di eseguire ulteriori interviste (si veda la sez. 6.4 per avere una spiegazione dettagliata delle motivazioni) non permette di approfondire questa analisi.

Non è né positiva né negativa la risposta di Gab: “Se non va moltiplicato torna, se va moltiplicato non torna”. Lo studente sembra aver difficoltà a valutare la struttura dell'espressione, oppure potrebbe star mettendo in dubbio l'attinenza della scrittura dell'immagine con la possibile consegna dell'ipotetico insegnante dei bambini in figura. La sua frase potrebbe significare “se l'insegnante aveva chiesto di calcolare il risultato finale svolgendo l'ultima moltiplicazione, allora la scrittura è incompleta”. Ammettendo questa interpretazione, lo studente dimostra un *bisogno di chiusura* (Collins, 1974) per via dell'assenza di un risultato, il che è associabile a una visione di tipo procedurale (Kieran, 1981).

9.1.1 Confronto con il pre-test

Dato che gli studenti di classe quinta sono già stati esposti negli anni precedenti a numerose espressioni aritmetiche (a differenza di quelli di seconda), appare opportuno confrontare il modo in cui questi bambini confrontano le uguaglianze dopo l'intervento con quello che erano in grado di fare prima dell'intervento stesso. I bambini sono stati sottoposti ad un test iniziale (pre-test, cfr sez. 6.4.1) in cui viene richiesto di completare alcune uguaglianze. Fra queste, ve ne sono di concatenate, altre contengono espressioni numeriche. Una visione relazionale del simbolo di uguaglianza consiste nel concepire i due membri dell'uguaglianza come unità da mettere in relazione; nel caso di espressioni numeriche che contengono più operazioni, tale unità è passibile di un'interpretazione strutturale riconoscendo le relazioni fra le sottoparti (negli esempi successivi il prodotto per una somma e la somma di due prodotti). Pertanto le uguaglianze contenenti espressioni permettono di mettere in evidenza sia il modo in cui gli studenti interpretano il simbolo di uguaglianza sia il loro senso della struttura.

Agli studenti viene anche chiesto di specificare quali proprietà abbiano utilizzato nel rispondere, questo permette di fare osservazioni circa il loro senso dell'operazione. Fra le uguaglianze fornite nel test, si focalizzerà l'analisi su

- A. $(3 + 2) \times (... + 1) = ...$
- B. $6 \times ... = ... \times 6 = ... \times ...$
- C. $3 \times (2 + 5) = (3 \times 2) + (3 \times ...)$

dato che, come si vedrà a breve, sono sufficienti a mettere in evidenza le differenze nell'approccio degli studenti al confronto fra espressioni numeriche prima e dopo i cicli didattici proposti. In tabella 9.1.1.1 sono riportate le frequenze di risposte corrette, errate o mancanti per ciascuna delle tre.

Consegna	Corrette	Errate	In bianco
A	9	9	4
B	7	11	4
C	9	7	6

Tab. 9.1.1.1: Sintesi dei risultati del pre-test per le consegne analizzate.

Analizzando in particolare l'uguaglianza A si può osservare che 9 studenti la completano in modo corretto. Fra gli altri, non c'è un errore particolarmente frequente. Quattro bambini su 22 lasciano questa consegna in bianco.

Marti completa l'uguaglianza scrivendo $(3+2) \times (1+1) = 7$, ovvero riportando come risultato la somma di tutti i numeri dell'espressione. Similmente, Gab scrive $(3+2) \times (2+1) = 8$. Sara invece sembra considerare solo il prodotto della somma dei numeri nella prima parentesi per il primo della seconda parentesi, ottenendo $(3+2) \times (2+1) = 10$; allo stesso modo Joh scrive $(3+2) \times (5+1) = 25$. Ale sembra invece considerare solo il prodotto fra i primi due addendi di ciascuna parentesi, scrive $(3+2) \times (3+1) = 9$.

Mat completa scrivendo $(3+2) \times (1+1) = 2$ mentre per Nic un'uguaglianza corretta è $(3+2) \times (5+1) = 6$. Entrambi i bambini riportano come risultato, dopo l'uguale, la somma dei numeri nella seconda parentesi. Eri scrive che $(3+2) \times (3+1) = 63$, forse riportando la somma dei primi due addendi di ciascuna parentesi come decina del risultato, quella dei secondi addendi per le unità. Di più difficile interpretazione la compilazione di Pet: $(3+2) \times (4+1) = 100$.

Pertanto la maggior parte degli studenti rivela un senso della struttura poco sviluppato, nonostante nella consegna proposta fossero presenti delle parentesi che, generalmente, dovrebbero "aiutare gli studenti a vedere la struttura, focalizzando la loro attenzione" (Hoch & Dreyfus, 2004, p. 56) sia nel contesto dell'algebra sia in quello aritmetico (Marchini & Papadopoulos, 2011; Schneider et al, 2012). Questo è consistente con recenti risultati che mostrano che gli studenti con un basso senso della struttura non sempre sono aiutati dalle parentesi (Banerjee & Subramaniam, 2005) e possono anche ignorarle (Gunnarsson, Sönnnerhed, & Hernell, 2016).

La concatenazione di uguaglianze B permette di mettere in evidenza la visione procedurale dell'uguale di molti studenti. Sette studenti riescono a completare correttamente questa consegna. Fra gli altri, le soluzioni più comuni sono:

$$6 \times 1 = 6 \times 6 = 36 \times 36$$

$$6 \times 1 = 6 \times 6 = 1 \times 6$$

L'uguale viene quindi visto da questi bambini come stimolo per una risposta (Molina & Ambrose, 2008), in senso procedurale (Kieran, 1981), da sinistra verso destra o anche al contrario. Quattro bambini lasciano questa consegna in bianco e non sono tutti compresi fra quelli che lasciano in bianco l'uguaglianza A.

L'uguaglianza C è completata correttamente da nove bambini ma solo una afferma esplicitamente di aver applicato la proprietà distributiva. Gli altri fanno probabilmente affidamento al calcolo dei risultati, così come mostrato nel protocollo di Dan (Fig. 9.1.1.1).

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. At the top, the equation $3 \times (2 + 5) = (3 \times 2) + (3 \times 5)$ is written. Below this, arrows point down to the calculations. On the left, $3 \times 2 = 6$ is written, with an arrow pointing to the 6. On the right, $3 \times 5 = 15$ is written, with an arrow pointing to the 15. Below these, the numbers 6 and 15 are added together to get 21. To the right of this, the expression $10 + 10 + 10 = 30$ is written, with arrows pointing to the 10s and the final result 30. The work demonstrates a procedural approach to solving the problem rather than using the distributive property.

Fig. 9.1.1.1: La soluzione della consegna C prodotta da Dan.

Sei la lasciano in bianco, mentre gli altri completano inserendo al posto dei punti 2 oppure 3 oppure 10. Pertanto è evidente che solo pochi studenti hanno una conoscenza (anche basilare) della proprietà distributiva. Viene invece nominata esplicitamente la proprietà commutativa da sei studenti, altri potrebbero averla usata nel completare la prima uguaglianza in B (dato che riportano lo stesso numero in entrambi gli spazi bianchi) ma poi affermano di non aver usato nessuna proprietà.

In definitiva il pre-test mostra un pensiero relazionale poco sviluppato, salvo alcune eccezioni. Di fatto la visione dell'uguale è prevalentemente procedurale, il senso della struttura scarso vista la difficoltà a completare le uguaglianze A e C. La conoscenza delle proprietà è dimostrata in pochissimi casi così come l'uso, anche intuitivo, della proprietà distributiva non è diffuso.

Un confronto con i dati raccolti nel test a posteriori dimostra quindi un notevole progresso nello sviluppo del pensiero relazionale. Infatti nel post-test (All. 2), la maggior parte dei bambini utilizza consapevolmente le proprietà delle operazioni per riconoscere l'equivalenza fra espressioni quando invece prima erano ben pochi quelli in grado di farlo. L'uguale viene inizialmente interpretato come procedurale dalla maggior parte dei bambini mentre questa visione persiste soltanto in una studentessa nel post-test. Per quel che riguarda il senso della struttura, la totalità dei bambini è in grado di interpretare correttamente l'uguaglianza in cui è applicata la proprietà distributiva anche senza parentesi quando, invece, prima della sperimentazione erano pochi a possedere questa abilità.

9.2 Sviluppo del pensiero relazionale nella classe seconda

La totalità dei bambini riconosce la veridicità dell'espressione scritta a destra nella fig. 8.3.1; tuttavia, le argomentazioni riportate rivelano diverse modalità di pensiero. Come si può notare nell'allegato 2, ci sono due studenti che lasciano in bianco la risposta. Fra gli altri, la maggior parte afferma che la scrittura è corretta perché " 7×4 è uguale a 4×7 ". Questa giustificazione è di per sé tautologica dato che consiste solo in una conversione nel linguaggio verbale della relazione che è riportata nell'immagine in forma simbolica. Tuttavia, questo tipo di frase appare interessante perché le moltiplicazioni, 7×4 e 4×7 , compaiono col ruolo di sostantivi. Pertanto, si nota che le operazioni di moltiplicazione sono intese da questi bambini come oggetti piuttosto che processi, si hanno esempi di reificazione (Sfard, 2009).

Appaiono in contrasto le due argomentazioni di Sim e di SofB:

Sim: Ha scritto **due operazioni uguali**.

SofB: Ha fatto **due moltiplicazioni diverse** con gli stessi numeri.

I due bambini dissentono sul fatto che le operazioni siano uguali; SofB infatti sottolinea il fatto che i due prodotti sono differenti sebbene i fattori (o forse i risultati) siano gli stessi. Sim invece ritiene che le due operazioni siano uguali anche se non motiva questa affermazione; anche in questo caso il termine 'operazioni' potrebbe riferirsi ad una procedura e dunque l'affermazione potrebbe riferirsi all'uguaglianza dei risultati o dello svolgimento delle due procedure.

Sei studenti argomentano l'equivalenza fra i due prodotti mettendo in evidenza che hanno lo stesso risultato. L'uguale viene quindi interpretato come *espressione di un'azione* (Molina & Ambrose, 2008) di confronto tra i risultati.

Vi sono alcune evidenze del fatto che alcuni studenti di questo gruppo stiano intraprendendo un processo di oggettificazione della moltiplicazione: il risultato è visto come una proprietà dell'operazione, una caratteristica che gli appartiene (NicG: c'hanno lo stesso risultato) e non come l'output di un processo. Tuttavia, ci sono casi in cui appare chiaro che la moltiplicazione è interpretata ancora come un processo, distinto dal suo risultato:

NicS: **Fare** (4×7) è uguale a (7×4) .

Abd: Luca **ha calcolato** 4×7 e **dà** risultato 7×4 .

Anche in questi casi però si possono osservare tracce di una *condensazione* (Sfard, 1994) dell'operazione; tale condensazione è messa in evidenza dall'uso delle parentesi (nel caso di NicS) o dal fatto che il prodotto 7×4 è considerato esso stesso come risultato (nel caso di Abd).

I bambini che utilizzano la proprietà commutativa per argomentare l'equivalenza sono una minoranza; questi studenti notano che le operazioni hanno gli stessi fattori riportati in ordine diverso:

Mel: Corretta perché non cambia niente solo le cifre sono messe all'incontrario.

Zen: Perché i numeri sono uguali però sono messi in ordine diverso.

La situazione è simile per quanto riguarda la proprietà distributiva espressa attraverso l'uguaglianza rappresentata a sinistra nella figura 9.1.1. C'è solo un bambino che analizza la relazione fra i fattori dei prodotti per argomentare l'equivalenza:

Zen: Perché $8 + 3$ fa 11.

Zen, che prima aveva notato l'inversione dell'ordine dei fattori, sembrerebbe quindi far uso di pensiero relazionale in entrambi i casi. Questa seconda argomentazione riguarda, però, soltanto i fattori non comuni, senza riportare niente sul fatto che gli altri fattori siano tutti

uguali. Permangono pertanto dei dubbi sulla concezione della proprietà distributiva che il bambino può aver sviluppato.

Gli altri studenti non concordano tutti sulla correttezza dell'uguaglianza riportata nell'immagine. Alcuni si limitano a descrivere il processo di confronto fra i risultati delle due operazioni oppure descrivono la loro interpretazione della struttura dell'espressione senza discutere del fatto che l'uguaglianza sia corretta o meno.

SofB: Perché ha fatto tre moltiplicazioni diverse e poi ha scritto = e poi ha fatto questa moltiplicazione (6×11).

Anche in questo caso ci sono alcuni studenti che giustificano la propria risposta affermando che i due membri dell'uguaglianza hanno lo stesso risultato. Tuttavia, tutti quelli che argomentano in questo modo, usando i verbi “fare” e “dare” per parlare del risultato dell'espressione costituita dalla somma di due prodotti. Questo tipo di espressione viene quindi visto come un processo, diversamente da quello che si è notato prima per le singole moltiplicazioni. Singolare il caso di NicG che parla dell'espressione usando il plurale

NicG: No perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ non **fanno** 6×11 .

Sembra quindi che questo bambino veda l'espressione a sinistra dell'uguaglianza come un insieme di oggetti (probabilmente i due prodotti). Si noti che nella frase di NicG il prodotto 6×11 compare come complemento oggetto, come se tutta la moltiplicazione fosse il risultato, come osservato precedentemente nel caso di Abd. Diverso è il caso di Lor in cui la moltiplicazione a destra dell'uguale e tutta l'espressione a sinistra sembrano essere intesi entrambi come due processi equivalenti:

Lor: Perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ è come fare 6×11

Si noti che non c'è nessun riferimento ai risultati, pertanto anche questa fase potrebbe forse essere un'istanza di pensiero relazionale sebbene non si possa dare un'interpretazione univoca in quanto non si ha nessun indizio sul modo in cui questo bambino interpreti la struttura dell'espressione.

Sono pochi, seppur presenti, i casi in cui viene riportato per intero tutto il processo di confronto dei risultati, facendo riferimento ai diversi passi della procedura:

MAIb: Sì, $6 \times 3 = 18$ $6 \times 8 = 48$ $48 + 18 = 66$ $6 \times 11 = 66$.

Sim: Perché ha fatto $8 \times 6 = 48$ mentre $6 \times 3 = 18$ $48 + 18 = 66$ e $6 \times 11 = 66$ sicché ha fatto una cosa giusta.

Nella frase di Sim si può notare che 6×8 è stato sostituito con 8×6 applicando quindi la proprietà commutativa, quantomeno in forma di *teorema in atto* (Vergnaud, 1985). Infine, sono presenti anche tre casi in cui non viene riconosciuta la possibilità di svolgere i calcoli nell'espressione a sinistra dell'uguaglianza.

Mir: No perché non si può fare un'operazione con il per, il più e il per.

Mel: Non corretta perché non è così non si può fare.

Fra: No perché non puoi fare un'operazione con il + con dei numeri della divisione.

Sembra quindi che questi bambini non riconoscano la relazione che permette di stabilire l'equivalenza fra strutture diverse in base all'uguaglianza dei risultati. Tuttavia, alcuni di loro hanno interpretato espressioni simili durante la sperimentazione in classe (cfr sez. 10.2). L'interpretazione di questo fenomeno richiede un ulteriore approfondimento.

In sintesi, sembra che la maggior parte degli studenti di seconda stia ancora sviluppando il proprio pensiero relazionale rispetto alle espressioni aritmetiche. Di fatto nel caso dell'uguaglianza relativa alla proprietà commutativa, la maggior parte ricorre al calcolo del risultato per argomentare la correttezza dell'uguaglianza stessa. I risultati vengono calcolati anche nel caso della proprietà distributiva ma solo da una minoranza. Alcuni bambini ritengano che l'uguaglianza non sia vera. In generale, questi studenti dimostrano una visione dell'operazione di moltiplicazione meno oggettificata rispetto ai bambini di quinta primaria; tuttavia sono presenti alcune evidenze di reificazione.

Per quanto riguarda il senso della struttura, ci sono bambini che enunciano la proprietà commutativa facendo riferimento alla posizione dei fattori, solo uno invece giustifica l'uguaglianza relativa alla proprietà distributiva mettendo in evidenza la relazione additiva fra i fattori non in comune.

Rimangono alcune interpretazioni dubbie, ovvero:

- La diversa interpretazione sulla "stessità" dei prodotti con fattori invertiti che viene data da Sim e SofB.
- Il significato di proprietà distributiva costruito (o non) dai bambini che danno una risposta negativa (NicG, Mir, Mel e Fra).
- L'effettivo uso di pensiero relazionale da parte dei bambini che sembrano riconoscere la relazione di equivalenza data dalla proprietà distributiva (Zen e Lor).

Per questo si è deciso di effettuare, dopo qualche settimana, un'ulteriore intervista a questi bambini. I risultati di tali interviste sono discussi nella prossima sezione.

9.2.1 Interviste di approfondimento

Per disambiguare alcune interpretazioni relative alle risposte date nel test, si è deciso di effettuare un'ulteriore intervista (sez. 6.4.5) ad alcuni dei bambini della classe seconda sperimentale. Nell'intervista viene chiesto ai bambini di commentare nuovamente l'immagine dei due bambini alla lavagna che era stata proposta nel test a lungo termine (sez. 6.4.4, fig. 9.1.1). Viene poi mostrata ai bambini la risposta che avevano dato e si chiede loro di commentarla indicando se sono ancora d'accordo con quanto avevano scritto o se cambierebbero tale risposta.

Sono poi mostrate altre uguaglianze con struttura simile e si chiede di stabilire se sono vere o false. Le uguaglianze proposte sono:

$$5 \times 6 = 5 \times 2 + 5 \times 4$$

$$5 \times 6 = 5 \times 3 + 5 \times 4$$

$$5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5$$

Infine si chiede allo studente come si potrebbe spiegare la correttezza o meno di queste espressioni facendo riferimento all'artefatto, ovvero alla tavola di Laisant usata in classe. Si mostra un'uguaglianza dello stesso tipo rappresentata con segni ibridi (Fig. 9.2.1.1) legati all'attività fatta precedentemente con l'artefatto (cfr sez. 10.2) e si chiede di commentarli.

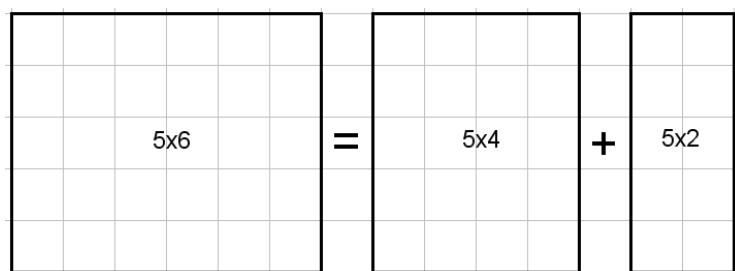


Fig. 9.2.1.1: Immagine dell'uguaglianza rappresenta con segni ibridi.

Le sbobinature complete delle interviste sono riportate nell'allegato 3. Accanto agli interventi dei bambini e dell'intervistatore è riportata l'analisi che ha condotto ai risultati presentati di seguito. Nel sintetizzarli, si farà ancora una volta riferimento all'interpretazione dell'uguaglianza, al senso della struttura e al senso dell'operazione in modo che le informazioni così riportate permettano di trarre delle conclusioni sul pensiero relazionale mostrato da questi studenti. Nell'allegato 3 gli interventi di ciascun bambino sono numerati. Di seguito viene utilizzata la stessa numerazione degli interventi riportando, di fronte al numero, l'iniziale del bambino.

9.2.1.1 Interpretazione del simbolo di uguaglianza

Il simbolo di uguaglianza viene interpretato diversamente dagli otto bambini intervistati. La possibilità di una duplice interpretazione per questo segno viene messa in evidenza dai bambini stessi. In particolare è esplicitata da Mel.

- Me1 R: Ti volevo far vedere questo disegno qua. È il disegno di due bambini che stanno scrivendo su una lavagna. Secondo te quello che hanno scritto questi bambini è giusto?
- Me2 Mel: Questa è giusta. [indica l'uguaglianza che rappresenta la proprietà commutativa]
- Me3 R: Spiegami un attimo perché però.
- Me4 Mel: Praticamente qui c'è 4×7 dice che è uguale... non uguale per esempio il numero, il risultato, uguale perché sette per quattro è uguale 28 e anche quattro per sette fa 28 solo che le cifre, per esempio il 4 e il 7 sono messe all'incontrario in 7×4 .

Una delle due possibili interpretazioni è quella di indicare che deve essere dato il risultato (uguale come *stimolo per una risposta* nella terminologia di Molina & Ambrose, 2008) e la

bambina specifica che non è questo il caso. L'altra possibile interpretazione riguarda i risultati delle due espressioni che si trovano ai membri dell'uguaglianza (uguale come *espressione di un'azione*, ibidem). Nell'intervento di Mel riportato alla linea Me4 viene inoltre enunciata la proprietà commutativa facendo riferimento al particolare caso di questa operazione, quindi in forma di teorema in atto. Il ruolo dato all'uguale, il riferimento alla posizione delle cifre e quindi l'enunciato della proprietà fanno classificare questo intervento come un'istanza di pensiero relazionale.

Un chiaro esempio di interpretazione del simbolo di uguaglianza come espressione di equivalenza fra due espressioni aritmetiche viene mostrato da Fra.

- F53 R: [...] Ora te ne faccio vedere una lunghissima. Di questa che ne pensi? [mostra $5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5$]
- F54 Fra: [riscrive l'uguaglianza sul proprio foglio] È giusta!
- F55 R: L'hai già fatto?
- F56 Fra: Sì.
- F57 R: Raccontami un po'. Perché io non sono veloce come te.
- F58 Fra: Aspetta lo scrivo. 5×4 , venti [scrive 20 sotto 5×4 già scritto in precedenza, continua così borbottando a scrivere i risultati delle prime due moltiplicazioni] Se avrei messo il 3 metto il 2 [fa un cerchietto intorno al 3 e ci scrive sopra un 2] e qua metto il 5 [cerchia il 4 e sopra scrive un 5, ottiene la prima parte scrittura mostrata in Fig. 9.1.2.1] sarebbe l'operazione uguale.
- F59 R: [annuisce] Però lì ci sono il 4 e il 3. E com'è che tu sei sicuro che anche col 4 e il 3 fa uguale?
- F60 Fra: Qui fa 20 e qui è uguale a 35 [mette un + fra i risultati delle prime due moltiplicazioni e sotto scrive 35] e qui 10 e 25 [scrive i risultati delle moltiplicazioni a destra dell' = ottenendo la parte più bassa della scrittura mostrata in Fig. 9.1.2.1] fa 35. È giusta.

$$\begin{array}{r}
 5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5 \\
 20 + 15 = 35 \quad 10 + 25 = 35
 \end{array}$$

Fig. 9.1.2.1: Scrittura prodotta da Fra nell'argomentare la correttezza dell'ultima uguaglianza.

Fra non giustifica l'equivalenza facendo solo ricorso ai calcoli dei risultati ma trasforma una delle due espressioni in modo da mantenere inalterato il risultato e contemporaneamente ottenere un'espressione che lui riconosce come equivalente a quella dall'altro lato

dell'uguaglianza (linea F58). Anche in questo caso viene mostrato pensiero relazionale, di fatto il tipo di compensazione effettuato dimostra senso dell'operazione così come il fatto di individuare che $5 \times 5 + 5 \times 2 = 5 \times 2 + 5 \times 5$, ovvero l'applicazione della proprietà commutativa della somma fra i due prodotti. Il bambino sta quindi anche distinguendo le parti in cui l'espressione è suddividibile e le relazioni che fra esse intercorrono.

Nell'intervento riportato alla linea F60 Fra dimostra anche di riuscire a mettere in relazione l'interpretazione dell'*uguale come equivalenza* con quella dell'*uguale come espressione di un'azione*.

Questi casi non sono gli unici, altri esempi sono dati dagli interventi riportati nell'allegato 3 alle linee 24, 28, 64 e 74 dell'intervista di Lor, alla linea 104 dell'intervista di NicG e alle linee 42 e 52 dell'intervista di Sim.

Altri bambini presentano invece visioni più procedurali del simbolo di uguaglianza. In particolare SofB confronta sempre le espressioni ai membri dell'uguaglianza facendo ricorso al calcolo dei risultati, anche nel caso in cui potrebbe essere applicata la proprietà commutativa:

So51 R: [...] Passiamo a quella dell'altro bambino? [si riferisce all'uguaglianza che rappresenta la proprietà commutativa] Allora: scriviamocela.

So52 SofB: [la scrive sul foglio] Fanno tutt'e due ventotto

So53 R: Come fai a sapere che fanno tutt'e due ventotto?

So54 SofB: Perché ha scritto quattro per sette e sette per quattro, hanno lo stesso risultato.

Pertanto SofB dimostra di interpretare l'uguale come espressione di un'azione. Il simbolo è considerato come "bidirezionale", di fatto la bambina non mostra nessun problema quando le vengono mostrate uguaglianze del tipo "prodotto + prodotto=prodotto" o, viceversa, "prodotto=prodotto + prodotto". Quando le viene chiesto esplicitamente se ha una preferenza fra le immagini in cui viene mostrata un'operazione del tipo "rettangolo + rettangolo = rettangolo" (Fig. 9.1.2.7) oppure "rettangolo = rettangolo + rettangolo" chiarisce esplicitamente di ritenerle entrambe corrette allo stesso modo (linea 144 nell'allegato 3).

Appare diversa invece la situazione per Mir e Zen. In particolare Mir sembra fare una forte resistenza nell'interpretazione delle scritture mostrate, chiarendo che la simbologia utilizzata non rappresenta il suo modo di interpretare la situazione. Quando gli viene chiesto di provare a calcolare i risultati delle espressioni che compaiono nell'uguaglianza che rappresenta la proprietà distributiva, Mir mostra un senso di disagio:

Mi20 Mir: Allora, $48 + 18$ fa cinquant... fa 66, aspetta eh [svolge il calcolo in colonna] Sì fa... no fa...

Mi21 R: Otto e otto fa sedici, scrivo 6 e porto 1...

- Mi22 Mir: Sì fa 66. Però non tornerebbe perché non puoi fare con l'addizione la moltiplicazione.
- Mi23 R: Però te l'hai fatto lì.
- Mi24 Mir: Torna il risultato ma non...
- Mi25 R: Non ti convince il modo in cui l'ha scritto?
- Mi26 Mir: Sì.
- Mi27 R: Tu come lo scriveresti per scriverlo per bene?
- Mi28 Mir: Sei per otto quarantotto [scrive l'operazione, seguita dall'= e sotto scrive il risultato] sei per tre uguale [scrive quello che ha detto] ehm... diciotto. Quarantotto più diciotto [completa la seconda riga con i simboli + e =] sessantasei. Perché prima lo fai così e poi questo [cerchia la seconda riga così come mostrato in Fig. 9.1.2.2] rimane...
- Mi29 R: Quel piano lì sono i risultati del piano di sopra?
- Mi30 Mir: Sì.
- Mi31 R: Ok. Qui però. Qui c'è 6×8 uguale 48 [scandisce le parole e tocca col dito ciascuno dei simboli corrispondenti a queste parole] quindi questo uguale è l'uguale di questo risultato qui [indica il 48]
- Mi32 Mir: [disegna delle linee in obliquo che partono dal simbolo = e vanno al piano di sotto, verso il corrispondente risultato, ottenendo la scrittura in Fig. 9.1.2.2]

Fig. 9.1.2.2: Scrittura prodotta da Mir per la prima uguaglianza.

- Mi33 R: Ho capito. Va bene, così funziona. Sembrerebbe. Senti, allora te ne faccio vedere anche altre. Dimmi se secondo te, queste qua... prendiamole una alla volta [mostra $5 \times 6 = 5 \times 2 + 5 \times 4$] Questa qua, che te ne pare? È sempre la stessa storia, no?
- Mi34 Sì, il risultato... farebbe 30 e 5 per... sì! Torna. Al massimo questa, se proprio... questi dovrebbero essere invertiti [indica i due membri dell'uguaglianza]

Nonostante abbia verificato l'uguaglianza fra i risultati, Mir non è d'accordo nell'affermare che la scrittura è corretta (linea Mi22). Diversamente, ritiene che una scrittura corretta debba riportare un simbolo di uguaglianza a seguito di ciascuna delle operazioni (Fig. 9.1.2.2). Le linee oblique tracciate dallo studente nell'intervento alla linea Mi32 rimarkano la necessità di mantenere ogni operazione connessa col proprio risultato attraverso il simbolo di

uguaglianza. Questo disagio compare nuovamente alla linea Mi34 ed è espresso ritenendo che i membri dell'uguaglianza debbano essere invertiti in modo da ottenere la forma "prodotto+prodotto=prodotto" piuttosto che "prodotto=prodotto+prodotto". Le parole "se proprio..." sembrano essere l'inizio di una frase del tipo "se proprio è necessario scrivere un'espressione del genere, deve almeno rispettare la struttura <termine, operatore, termine, uguale, risultato>".

Mir dimostra quindi una visione dell'uguale come "stimolo per una risposta", ovvero l'uguale è il prompt per un risultato e ha un preciso verso, da sinistra verso destra.

Altrettanto si può dire di Zen che (così come mostrato alle linee 32, 52, 64 e 88 della sua intervista nell'allegato 3) rappresenta diverse concatenazioni errate di uguaglianze (Fig. 9.1.2.3) e non riesce nel confronto dei risultati delle espressioni ai due membri se non, solo alcune volte, con l'aiuto dell'intervistatore.

- Z81 R: [...] Senti guarda quella in fondo [si riferisce a $5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5$], come ti sembra? Chi ha scritto quella cosa lì, secondo te, ha scritto una cosa giusta?
- Z82 Zen: Cinque per quattro[fa il conto con le dita, ne alza 4] fa 20. 5×3 fa 15. 5×2 , 10 e cinque per cinque, venticinque
- Z83 R: Funziona?
- Z84 Zen: No
- Z85 R: No? Controlliamo: che calcolo bisogna fare per controllare?
- Z86 Zen: Venti più quindici [quando nomina i numeri li indica con la penna] fa 35.
- Z87 R: Ce lo scriviamo da qualche parte che così ce lo ricordiamo?
- Z88 Zen: [scrive il 35, poi prosegue con i calcoli come mostrato in fig. 9.1.2.3] ... più 10 uguale 45 ma qui [indica l'ultimo prodotto] non viene 45.
- Z89 R: Però ti posso far notare una cosa: dov'è che stanno i più e dov'è che sta l'uguale?
- Z90 Zen: [indica il primo più e l'uguale] questo e questo.
- Z91 R: E poi?
- Z92 Zen: E quaggiù [indica il secondo +]
- Z93 R: Cosa vorranno dire? [segue silenzio] Guarda: se io lo scrivessi in questo modo qua [scrive $20 + 15 = 10 + 25$] Se scrivessi questa cosa qui, secondo te, è giusta o sbagliata?
- Z94 Zen: Settanta...

$$\begin{array}{cccc}
 20 & 15 & 10 & 25 \\
 5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5 \\
 20 + 15 = 35 + 10 = 45
 \end{array}$$

Fig. 9.1.2.3: Scrittura prodotta da Zen per la seconda uguaglianza.

Il significato che Zen sembra attribuire alle scritture mostrate sembra “somma tutti i risultati dei prodotti” così come dimostra la scrittura riportata in figura 9.1.2.3, l’intervento alla linea Z88 e la risposta allo stimolo scritto dall’intervistatore durante l’intervento riportato alla linea Z93. Pertanto appare chiaro che questo bambino non riconosce la l’uguaglianza come equivalenza tra espressioni in base alla struttura e alla relazione tra gli elementi di questa struttura (ovvero la proprietà distributiva). Riconosce l’uguaglianza solo come uguaglianza tra i risultati di una procedura contingente e in sé non immediatamente generalizzabile.

In sintesi, la maggior parte dei bambini interpreta l’uguale come espressione di un’equivalenza. Fanno eccezione SofB, Mir e Zen.

Tornando alle interpretazioni sulle risposte date da questi bambini nel test a lungo termine e che erano rimaste ambigue, l’analisi fin qui proposta fornisce già alcuni elementi di discussione. La differenza di interpretazione del simbolo di uguaglianza fra Sim e SofB potrebbe essere un primo elemento che giustifica la diversa opinione sulla “stessità” di 4×7 e 7×4 , infatti se per Sim sono due espressioni equivalenti, per SofB sono invece due diverse operazioni con lo stesso risultato che vanno confrontate. Mir dimostra invece una visione dell’uguale come stimolo per una risposta. Questa interpretazione fornisce una prima motivazione alla risposta negativa di Mir rispetto alla correttezza dell’espressione che rappresenta la proprietà distributiva. D’altra parte, invece, la risposta di Zen allo stesso quesito (che era “Perché $8+3$ fa 11”) non sembra interpretabile come un’applicazione della proprietà distributiva. Altri elementi a favore di questa interpretazione in negativo saranno dati successivamente quando si analizzerà il senso dell’operazione di questo bambino.

9.2.1.2 Senso della struttura

Precedentemente si è visto che Fra riconosce la possibilità di far decrescere uno dei fattori di un prodotto in un’espressione incrementando un fattore di quella ad essa sommata, in modo da mantenere lo stesso risultato (linea F58). Il bambino riconosce quindi l’espressione aritmetica come un’unica entità: si tratta di una delle abilità che definiscono il senso della struttura.

L’espressione $5 \times 4 + 5 \times 3$ viene da lui trasformata in $5 \times 5 + 5 \times 2$ e quest’ultima espressione è ritenuta equivalente a $5 \times 2 + 5 \times 5$; l’alunno applica quindi la proprietà commutativa dell’addizione per scambiare l’ordine dei due prodotti. Pertanto Fra riconosce quali trasformazioni è utile fare per ottenere una struttura equivalente a quella che si trova dall’altro lato dell’uguaglianza, nel farlo sfrutta le parti di cui l’espressione è composta e le relazioni che fra esse intercorrono. In questo modo mostra delle abilità che caratterizzano il senso della struttura.

Questa interpretazione sembra essere anche consistente con la caratterizzazione di pensiero strutturale data da Mason e colleghi (2009):

structural thinking is present only when students' explanations show that they understand the fundamental importance of the operations involved, make use of equivalence, the direction of compensation required to maintain equivalence, and how particular results are part of a more general pattern⁵³. (p.23)

La spiegazione di Fra riportata alla linea F58 mostra quindi la consapevolezza che lo studente ha delle regolarità della struttura; mostra un buono sviluppo del senso della struttura. Tuttavia, non tutti gli interventi di Fra sono di questo tipo. All'inizio dell'intervista il bambino indica $6 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$ come scorretta, allo stesso modo in cui aveva fatto nel test a lungo termine. Secondo lui, l'uguaglianza sarebbe vera se 6×11 fosse sostituito da 12×12 . Di seguito è riportato il modo in cui giustifica questo assunto:

- F11 R: No aspetta. Spiegami da dove è uscito fuori 12 e 12.
- F12 Fra: Sei per otto più sei per tre [mentre lo dice lo scrive] Avrei fatto sei più sei [cerchia i due 6 che ha scritto, Fig. 9.1.2.4] che fa 12.
- F13 R: Ho capito. E così è uscito il primo 12.
- F14 Fra: E 8 più 3 [cerchia le cifre che nomina] che fa 12.
- F15 R: Non sono d'accordo. $8+3$ quanto fa?
- F16 Fra: $8+3$... undici.
- F17 R: 11. Ok.
- F18 Fra: Quindi sarebbe non 12×12 ma 12×11 .

Fig. 9.1.2.4: Scritture prodotta da Fra per la prima uguaglianza.

In questi interventi, Fra riconosce che nell'espressione $6 \times 8 + 6 \times 3$ sono messe in relazione due parti: due moltiplicazioni connesse da una somma; il bambino elabora questa struttura secondo una regola di tipo sintattico che è inconsistente dal punto di vista matematico. Le trasformazioni che fa nella figura 9.1.2.4a sono meramente sintattiche: sta trasformando l'espressione come se l'addizione operasse nello stesso modo sui primi e sui secondi fattori delle moltiplicazioni. Apparentemente, in una sorta di eccesso di senso della struttura, impone una certa simmetria alla trasformazione.

⁵³ Il pensiero strutturale è presente solo quando le spiegazioni degli studenti mostrano che comprendono l'importanza fondamentale delle operazioni coinvolte, come far uso dell'equivalenza, la direzione della compensazione richiesta per mantenerla e come particolari risultati fanno parte di una struttura più ampia.

L'intervistatore chiede successivamente di verificare la correttezza di tale trasformazione. Fra propone di calcolare i risultati delle espressioni:

- F27 R: [...]Come si fa per arrivare al risultato di questa cosa?
- F28 Fra: Si fa 48 più 6×3 [scrive 6×3 sul foglio] uguale... 18 [lo scrive accanto a 6×3 senza mettere un =] $48 + 18$ uguale... [mentre lo dice lo scrive, compreso il simbolo =] 6×11 uguale [lo scrive poco più in basso. Poi lo riscrive in colonna, Fig. 9.1.2.4b, e inizia a fare il calcolo]. Quarantotto più diciotto [lo scrive in colonna, Fig. 9.1.2.4c] uguale... [svolge il calcolo] Sessantasei. È giusta.
- F29 R: È giusta? E allora che cosa c'era che non andava qui? [indica l'espressione in cui Fra aveva sommato tutti i fattori ottenendo 12×11] Nel controllo che avevi fatto all'inizio. Perché all'inizio mi avevi detto "non è giusta".
- F30 Fra: Perché pensavo che bisognava fare 12×11 .
- F31 R: E invece alla fine basta 6×11 ? [Fra annuisce e resta in silenzio] Ok senti. Però stavo pensando: non so se te lo ricordi, ma un po' di tempo fa ve l'avevo già chiesta questa cosa [mostra il test a lungo termine svolto da Fra] e tu mi avevi risposto così: questo [indica la risposta alla prima domanda] era quello 4×7 e 7×4 e hai risposto "perché 4×7 è uguale a 7×4 ". Sei ancora d'accordo con quello che avevi scritto?
- F32 Fra: Sì.
- F33 R: Se lo dovessi ridire oggi, lo scriveresti così?
- F34 Fra: Sì.
- F35 R: Invece su quest'altra [indica la risposta relativa alla proprietà distributiva] che cosa mi diresti?
- F36 Fra: Mmm... Non lo scriverei come ho scritto qua.
- F37 R: E come scriveresti adesso?
- F38 Fra: Sì, perché bisogna calcolare i risultati delle due moltiplicazioni, calcolare il risultato della terza [fa un cerchietto nell'aria sopra a 6×11 scritto sul foglio] e vedere se i primi due sono uguali a quello... il loro risultato.

Alla linea F28, Fra rende esplicita la sua interpretazione aritmetica dell'espressione $6 \times 8 + 6 \times 3$. Seguendone la struttura, Fra è in grado di dividerla nelle sue parti: riconosce che l'espressione è composta di due moltiplicazioni che poi devono essere sommate. Quindi sta riconoscendo le relazioni che intercorrono fra le parti in cui l'espressione può essere divisa. Questa interpretazione è esplicitata nuovamente alla linea F38. Fra dimostra quindi due delle abilità che caratterizzano il senso della struttura.

Questa volta il bambino sta interpretando l'equivalenza fra le due espressioni in modo diverso rispetto a prima. Inizialmente ha considerato $6 \times 8 + 6 \times 3$ e 12×11 come equivalenti perché una poteva essere trasformata nell'altra attraverso una manipolazione sintattica. In questo ultimo estratto invece ritiene le espressioni equivalenti perché hanno lo stesso risultato (linee F28 e F38). Possiamo considerare la prima come un'interpretazione sintattica dell'equivalenza fra le espressioni, la seconda come un'interpretazione di tipo semantico. Fra riesce a far uso di entrambe le interpretazioni ma evidentemente non sono ancora ben armonizzate e l'interpretazione semantica sembra mantenere la priorità.

Nel caso delle altre due uguaglianze, Fra ricorre nuovamente all'interpretazione di tipo semantico. Calcola i risultati delle due espressioni ai lati dell'uguaglianza e controlla se sono uguali:

- F43 R: Perfetto. E quindi torna. E invece se ti faccio vedere questa? [mostra $5 \times 6 = 5 \times 3 + 5 \times 4$]
- F44 Fra: Trenta [scrive 30 sul foglio]. Quindici [lo scrive], venti [lo scrive accanto e poi inserisce un + fra i due numeri. Fa il calcolo a mente e scrive =35, Fig. 9.1.2.5a]. Non torna.
- F45 R: Potremmo cambiarla per farla tornare? [silenzio lungo] Se io volessi lasciare questo così [indica il membro dell'uguaglianza in cui compare la somma] di qua [indica l'altro membro] che cosa ci dovrei scrivere?
- F46 Fra: Ehm... [avvicina la penna al foglio su cui sono stampate le espressioni]
- F47 R: Riscriviamola sul foglio [indica il foglio su cui il bambino stava già scrivendo, Fra riscrive tutta l'uguaglianza] Ok. Diciamo che questo lo voglio così [indica il membro dell'uguaglianza in cui compare la somma, sul foglio del bambino] ma vorrei cambiare quest'altro [indica l'altro membro] per farlo essere giusto.
- F48 Fra: Bisognerebbe cambiare il 6 [circonda la cifra] in un 7 [lo scrive sopra, Fig. 9.1.2.5b]

In questa parte dell'intervista, il ricercatore cerca di spingere Fra verso l'interpretazione di tipo sintattico e Fra risponde in modo consistente dal punto di vista matematico. Tuttavia, non è possibile determinare se la modifica proposta dal bambino dipende da una trasformazione sintattica ($3+4=7$) oppure dal confronto dei risultati delle espressioni. Se si considera il comportamento di Fra alle righe F27-38 e alle righe F53-58, allora entrambe le interpretazioni appaiono plausibili. Si noti che spingendo Fra a manipolare sintatticamente le espressioni coinvolte nell'uguaglianza, il ricercatore potrebbe aver suggerito al bambino che questo tipo di comportamento è ammissibile; forse anche per questo il comportamento di Fra alle righe F53-58 differisce dal modo in cui ha affrontato le uguaglianze mostrategli precedentemente.

Fig. 9.1.2.5: Scritture prodotta da Fra per l'uguaglianza $5 \times 6 = 5 \times 3 + 5 \times 4$.

Seppure esemplare, il caso di Fra non è unico. Quasi tutti i bambini, con l'eccezione di Zen (si vedano le righe Z81-Z94 mostrate precedentemente) mostrano almeno alcune delle abilità che caratterizzano il senso della struttura. Tuttavia, oltre a Fra, anche Lor, Sim e NicG ritengono che $6 \times 8 + 6 \times 3 = 12 \times 11$ basandosi su trasformazioni sintattiche dello stesso tipo. Addirittura, Mir che non mostra mai questo tipo di trasformazione, discutendo dell'immagine in figura 9.1.2.7 – in cui è rappresentata con i rettangoli l'uguaglianza $5 \times 6 = 5 \times 4 + 5 \times 2$ – afferma che:

Mi95 Mir: Poi gli fai vedere che qui... quant'è? Cinque. Allora, questo è sei. Gli fai capire che mettendo questi due [indica ciascuno dei due rettangoli piccoli con gli indici e li sposta come se avvicinasse i due rettangoli] e cinque poi... **se cinque non gli torna perché dovrebbe fare 10** ehm... aspetta ho perso il conto. Gli fai fare $2 + 4$, sei. Poi gli fai notare che è la colonna del 5 e quindi per forza deve essere 5 e conta anche questo [indica il rettangolo più grande].

Quando dice “se cinque non gli torna perché dovrebbe fare 10” sembra star considerando la possibilità che venga utilizzata la trasformazione scorretta che viene mostrata nelle interviste degli altri compagni, ovvero che oltre ai fattori non in comune fra i due prodotti considerati (4 e 2), venga sommato anche il fattore comune ($5 + 5 = 10$). Tuttavia, questi bambini, quando viene loro richiesto, sono in grado di svolgere i calcoli ai due lati dell'uguaglianza per verificare l'equivalenza fra i risultati.

Andando oltre il buono sviluppo delle abilità che caratterizzano il senso della struttura, è possibile quindi osservare un fenomeno che possiamo interpretare come indice di un *senso della struttura incompleto* (Maffia & Mariotti, in press-b); tale fenomeno è caratterizzato da una relazione instabile fra il livello sintattico e semantico nell'interpretazione e nel trattamento delle espressioni numeriche. La trasformazione del tipo $a \times b + a \times b \rightarrow (a+a) \times (b+c)$ può essere interpretata come un tentativo di azione correttiva volto a superare l'imperfetta struttura della proprietà distributiva che manca di simmetria. Questa necessità di simmetria potrebbe dipendere anche dalle esperienze legate alla proprietà commutativa, si tratta quindi di una particolare fonte di difficoltà che differenzia la proprietà distributiva dalle altre.

Di fatto la proprietà distributiva soffre di una duplice mancanza di simmetria. Da un lato non c'è simmetria nel ruolo dei termini perché il fattore comune alle moltiplicazioni gioca un ruolo differente rispetto agli altri fattori. D'altro canto, la struttura dell'uguaglianza $a \times b + a \times b = a \times (b+c)$ è asimmetrica perché da un lato dell'uguale c'è una somma di prodotti mentre dall'altro c'è solo un prodotto.

La trasformazione proposta da Fra nella figura 9.1.2.4a risulterebbe essere un tentativo di dare senso a tale uguaglianza. Questa ipotesi interpretativa è avvalorata dal fatto che Fra non

dimostra nessun tipo di difficoltà nell'affrontare $5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5$, che effettivamente presenta simmetria nelle strutture delle due espressioni ai membri dell'uguaglianza.

Lo "scollamento" fra il piano sintattico e quello semantico è altrettanto evidente nel caso di Mir, seppure in senso opposto. Mir infatti è perfettamente in grado di interpretare il significato delle espressioni proposte, tant'è che svolge i calcoli correttamente rispettando le convenzioni per l'ordine delle operazioni (linea Mi20 riportata nella pagine precedenti). Tuttavia, questo studente non è in grado di cogliere la regolarità che permette di generalizzare una relazione tra i risultati senza eseguire effettivamente i calcoli. Coerentemente con quanto aveva scritto nel test al lungo termine, ritiene che non sia possibile "fare con l'addizione la moltiplicazione" (Mi22).

All'interno del gruppo degli studenti che davano risposta negativa nel test a lungo termine, Mir è l'unico che non ritratta la propria risposta e anzi, la conferma prima ancora che questa gli venga nuovamente mostrata per commentarla. Pertanto appare lecito affermare che questo studente presenta delle particolari difficoltà, sia nell'interpretazione del simbolo di uguaglianza sia nel senso della struttura, rispetto agli altri alunni intervistati.

9.2.1.3 Senso dell'operazione

Il senso dell'operazione è stato definito nella sez. 3.3 come l'insieme delle abilità di rappresentare una stessa operazione in modi diversi e di applicarne le proprietà. Nel contesto dell'intervista, per argomentare sulla correttezza delle uguaglianze proposte, i bambini sono costretti a confrontarsi con il riconoscere l'applicazione della proprietà commutativa e della proprietà distributiva. L'applicazione delle proprietà può inoltre essere riscontrata, in alcune interviste, nello svolgimento dei calcoli utilizzati per verificare l'equivalenza fra due espressioni.

Per quel che riguarda la proprietà commutativa, questa viene enunciata da tutti i bambini tranne Zen. Le formulazioni proposte fanno quasi tutte riferimento all'uguaglianza da discutere, sono quindi in forma di teorema in atto. Ne è un esempio la formulazione di Fra:

F6 Fra: 4×7 , se cambi posizione al 7 e lo metti al posto del 4 viene 7×4 e fa lo stesso risultato.

Come si può vedere, questo studente fa riferimento sia al cambiamento di posizione dei fattori (trasformazione di tipo sintattico) sia all'invarianza dei risultati, ovvero all'interpretazione di tipo semantico. Altre formulazioni considerano soltanto l'uno o l'altro aspetto. Per esempio NicG si concentra sull'equivalenza dei risultati:

N80 NicG: Anche lui è giusto perché 4×7 è uguale a 7×4 perché il risultato non cambia.

Diversamente, Mir inizialmente si concentra soltanto sulla trasformazione sintattica ed esplicita il riferimento all'uguaglianza dei risultati solo quando viene sollecitato dall'intervistatore:

Mi4 Mir: Se cambi, per esempio, se metti 4×7 [con l'indice indica prima un fattore e poi l'altro] è uguale a 7×4 . [sposta il dito sull'operazione all'altro membro dell'uguaglianza]

Mi5 R: In che senso è uguale?

Mi6 Mir: Fanno lo stesso risultato [scorre con il pollice su tutta la scrittura]

Un'eccezione rispetto alle altre è la formulazione data da Sim. Questo bambino infatti non fa nessun riferimento alle cifre 7 e 4 ma a una trasformazione che può essere fatta in generale scambiando di posto alle cifre e mantenendo invariato il risultato:

Si32 Sim: perché le cifre son sempre le stesse però si scambiano di posto [fa un gesto col dito, una sorta di rotazione nell'aria] però il risultato è lo stesso.

Si tratta di un'eccezione rispetto agli altri casi perché la formulazione fornita, seppure attraverso l'uso congiunto di parole e gesti (quindi di segni effimeri) rivela un avvio alla decontestualizzazione, ovvero al passaggio da teorema in atto (applicato sulle particolari operazioni considerate) a un principio teorico (di carattere generale, valido per qualsiasi operazione di questo tipo).

Come si è visto precedentemente, risulta più complessa la situazione per la proprietà distributiva. Di fatto i bambini non hanno a disposizione un modo semplice per esprimere questa proprietà attraverso il linguaggio naturale (come avviene nel caso della proprietà commutativa) e quindi non si trova mai una vera e propria formulazione a parole della proprietà stessa. Sono diverse invece le situazioni in cui questa viene applicata in forma di teorema in atto. Per esempio Mir, volendo calcolare il risultato di 6×11 calcola prima il prodotto di 6×10 e poi aggiunge un altro 6:

Mi17 R: Mi spieghi come hai fatto a calcolare 6×11 ? Perché hai ragione, fa 66 ma l'hai fatto molto veloce. Come hai fatto a farlo così veloce?

Mi18 Mir: Perché sapendo che 6×10 fa 60 [R annuisce] facendo per 11 aggiungi un altro 6.

Un altro esempio è dato da Lor quando, su richiesta dell'intervistatore di dare un ulteriore esempio di applicazione della proprietà commutativa, decide di dimostrare che $8 \times 9 = 9 \times 8$. Quando il bambino afferma che i risultati sono gli stessi, l'intervistatore gli chiede di esplicitare il modo in cui ha ottenuto tali risultati:

L31 R: Mi spieghi che calcoli hai fatto?

L32 Lor: Qui per 8×9 ho fatto 8×10 , ottanta, e poi ho tolto 8.

L33 R: E per fare 9×8 invece?

L34 Lor: Ho fatto 9×9 che fa 81 e poi 81 meno 9.

Come si può notare, Lor utilizza la proprietà distributiva del prodotto sulla sottrazione. In particolare questo studente sfrutta due prodotti che sono semplici da memorizzare (ovvero un quadrato e un prodotto per 10, cfr sez 2.3) e “torna indietro” a partire da questi per avere il risultato desiderato.

La proprietà distributiva viene applicata da alcuni bambini anche nel giustificare la correttezza (o meno) delle uguaglianze proposte. Questo appare particolarmente chiaro nell'intervista di Sim:

Si37 R: Questa qua [mostra l'uguaglianza $5 \times 6 = 5 \times 2 + 5 \times 4$], secondo te? Che te ne pare?

Si38 Sim: È giusta.

Si39 R: Come fai a essere così sicuro? Perché tu sei velocissimo ma non capisco se tu lo vedi, c'hai un trucchetto. Come fai a farlo così veloce?

Si40 Sim: Cinque per sei, trenta. Cinque per due, dieci. Cinque per quattro, venti e venti più dieci, trenta.

Si41 R: Quindi avevi controllato i risultati?

Si42 Sim: Sì, perché avevo controllato anche che **$4+2$ fa 6** . In quella di prima, io pensavo fosse sbagliata perché si doveva addizionare anche questo [indica il fattore in comune fra i prodotti in un'uguaglianza discussa precedentemente] e invece no. Sicché ho controllato anche qui. [indica l'uguaglianza sulla stampa]

Nella linea Si40, Sim usa il confronto fra i risultati per stabilire la correttezza dell'uguaglianza. Tuttavia, la velocità con cui ha risposto inizialmente (linea Si38) fa dubitare l'intervistatore del fatto che Sim abbia effettivamente svolto tutti calcoli (linea Si39). Infatti, successivamente lo studente dichiara di aver controllato che la somma dei fattori non in comune dei due prodotti sommati coincida con il secondo fattore del prodotto che si trova a membro sinistro dell'uguaglianza (linea Si42). Nello stesso intervento il bambino esplicita di aver precedentemente interpretato male le relazioni fra le operazioni presenti nell'uguaglianza e mostra adesso di star utilizzando la proprietà correttamente. In questo senso, l'intervista sembra essere stata occasione di apprendimento per il bambino e l'uso della proprietà distributiva sembra essersi spostato dalla zona di sviluppo prossimale (dato che prima è stato necessario l'aiuto dell'intervistatore) alla zona di sviluppo attuale (dato che in questo caso risolve il problema autonomamente).

Altrettanto sembra potersi dire di Lor: inizialmente lo studente usa la proprietà distributiva in modo erroneo. Quando si trova ad affrontare le ultime due uguaglianze, questo bambino dimostra di aver chiara la relazione fra le diverse moltiplicazioni che compaiono:

L61 R: [...]. Proviamo a vederne un'altra, così ci risistemiamo [mostra $5 \times 6 = 5 \times 3 + 5 \times 4$] questa secondo te come va? Funziona o non funziona?

L62 Lor: No.

- L63 R: Come hai fatto a capire che non funziona?
- L64 Lor: Perché $5 \times \dots$ perché qui fa 5×6 e lo smontaggio è 3 e 4 e invece dovrebbe essere 3 e 3.
- L65 R: Perché 3 e 4 cosa verrebbe invece?
- L66 Lor: Sette.
- L67 R: Quindi se noi facciamo tutto questo calcolo qui [passa l'indice intorno a $5 \times 3 + 5 \times 4$] che risultato ci dovrebbe venire alla fine?
- L68 Lor: Trentacinque.
- L69 R: Perché tu hai fatto...che moltiplicazione?
- L70 Lor: $5 \times 3 \dots$ ah no. 5×7 .
- L71 R: Che fa 35, ok. E quindi questa è 15 [indica 5×3] e 20 [indica 5×4] fa 35. Ok. L'ultima per essere sicuri. [mostra $5 \times 3 + 5 \times 4 = 5 \times 5 + 5 \times 2$] E se scrivo una cosa così, funziona?
- L72 Lor: Sì, perché...
- L73 R; Come hai fatto a controllare?
- L74 Lor: Perché il 4... perché se tipo il 3... allora: perché $2 + 5$ fa 7 e anche $4 + 3$. [mette la penna sul primo 5 dell'uguaglianza] 5 e 5 [sposta la punta sul secondo 5], 5 e 5 [indica i 5 oltre l'uguale].

Nella linea L64 Lor si riferisce chiaramente alla relazione additiva fra i fattori non in comune nelle moltiplicazioni. Oltre a notare la presenza di uno “smontaggio” erroneo, suggerisce anche una possibile scomposizione corretta. Lo stesso avviene alla linea L74. In quest'ultimo intervento il bambino nota anche la presenza del fattore in comune 5. Questo aspetto, fondamentale per l'applicazione della proprietà distributiva, viene reso esplicito solo da questo studente e solo in questo intervento; mentre sembra essere dato per implicito negli altri casi in cui la proprietà viene utilizzata. Si noti che l'uso della parola “smontaggio” può essere interpretato come un riferimento alle attività di costruzione e decostruzione di rettangoli proposte agli studenti (cfr sez. 10.2).

NicG è uno dei pochi bambini a mettere in evidenza da subito la relazione additiva fra i fattori non in comune. Pertanto l'intervistatore cerca di indagare se il bambino consideri o meno la necessità di un fattore in comune fra le moltiplicazioni. Per farlo viene proposta un'uguaglianza in cui una moltiplicazione non ha fattori in comune con le altre due: $5 \times 2 + 6 \times 6 = 5 \times 8$ (linea 105 nell'intervista a NicG riportata nell'allegato 3). In questo caso il bambino ricorre al calcolo dei risultati per verificare l'uguaglianza ma non riesce a esprimere a parole il fatto che della presenza di un fattore in comune sia necessaria:

- N123 R: Ma com'è che alcune volte torna e alcune volte no?

N124 NicG: Perché se questo e questo [indica i primi due prodotti] il loro risultato insieme forma questo [indica il prodotto dopo l'uguale] è corretta perché ... Non lo so spiegare tanto bene. Perché se questo fa 32 e il loro [indica i due prodotti a sinistra dell'=] risultato viene 32, viene. Il risultato va bene.

L'intervistatore propone altre uguaglianze anche a Zen (linea 31 nell'intervista nell'allegato 3) dato che il bambino sembrava aver messo in evidenza la relazione additiva fra i fattori già nella risposta data al test a lungo termine. Tuttavia, quando l'intervistatore scrive l'uguaglianza $4 \times 3 + 5 \times 8 = 6 \times 11$, il bambino reagisce producendo la scrittura mostrata in figura 9.1.2.6.

The image shows a handwritten equation on a grid background: $4 \times 3 = 12 + 5 \times 8 = 40 = 6 \times 11 = 66$. The numbers are written in blue ink.

Fig. 9.1.2.6: Scrittura prodotta da Zen per l'uguaglianza.

Come si può notare, le uguaglianze sono concatenate seguendo un'interpretazione dell'uguale come "stimolo per una risposta". Inoltre, il bambino dimostra di non riuscire a interpretare la struttura del membro di sinistra dell'uguaglianza. La mancanza di senso della struttura implica la mancanza di pensiero relazionale.

Come visto in precedenza, anche Mir mostra delle difficoltà a interpretare la struttura delle espressioni proposte. Tuttavia, questo bambino riesce a gestire bene la rappresentazione della proprietà distributiva attraverso l'uso del modello rettangolare. Di seguito è riportata la reazione di questo bambino alle domande relative alla rappresentazione della proprietà distributiva attraverso questo modello, ovvero quando gli viene mostrata la figura 9.1.2.7.

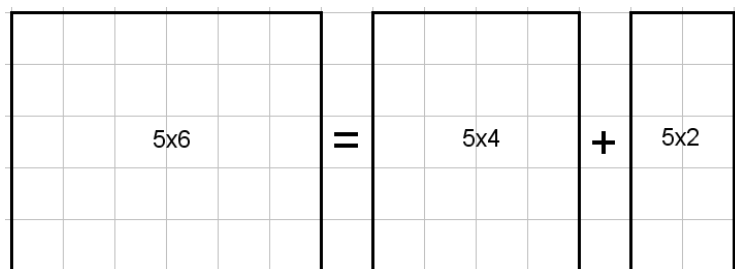


Fig. 9.1.2.7: Immagine dell'uguaglianza rappresenta facendo uso del modello rettangolare.

Mi78 R: [...] Secondo te, scrivere questo [indica l'espressione $5 \times 6 = 5 \times 2 + 5 \times 4$ scritta solo con i simboli aritmetici] o disegnare questo qua è la stessa cosa?

[...]

Mi83 Mir: Non cambierebbe niente.

Mi84 R: Non cambia niente?

Mi85 Mir: No.

Mi86 R: E com'è che fanno a vederlo da questo disegno qui che i risultati sono giusti?

- Mi87 Mir: O conta così: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... [indica con la punta i quadratini all'interno di uno dei rettangoli più piccoli].
- Mi88 R: Fino in fondo diciamo. Quindi facciamo così: lui conta tutti questi quadretti, poi cosa fa?
- Mi89 Mir: Poi conta questi [indica l'altro rettangolo] e non c'è bisogno che conta anche questi [indica il rettangolo più grande all'altro membro dell'uguaglianza] basta che mette insieme i numeri, fa un'addizione.
- Mi90 R: Come fa a essere sicuro che mettendo insieme questi quadretti [indica i due rettangoli con tutta la mano] vengono questi quadretti [indica l'altro rettangolo]? Come faccio a convincerlo? Perché tu hai detto che non importa ricontarli tutti.
- Mi91 Mir: Allora. Se proprio lo vuoi convincere gli fai contare questi [indica uno a uno i quadretti del rettangolo grande] oppure gli fai fare questo... aspetta. Mettere... questo [fa 4 linee verticali sul foglio] ho fatto a trattini, così.
- Mi92 R: Ok. Facciamo uno schema.
- Mi93 Mir: [fa una lunga linea e poi altre due linee verticali, ottenendo il disegno in Fig. 9.1.2.8] e conta 1, 2, 3, 4, 5, 6 e qui lo nota [conta i quadretti della base dei due rettangoli più piccoli] 1, 2, 3, 4, 5, 6.



Fig. 9.1.2.8: Disegno realizzato da Mir per spiegare la relazione additiva fra le basi dei rettangoli.

Nell'intervento riportato alla linea M89, Mir fa esplicito riferimento alla relazione additiva fra i rettangoli, dice "mette insieme i numeri, fa un'addizione". Negli interventi alle linee Mi91 e Mi93 rappresenta questa l'unione delle due basi in maniera schematica facendo notare come l'affiancamento di due quadretti ai quattro già presenti dia come risultato una linea di sei. Pertanto il bambino sta rappresentando la relazione additiva fra le basi dei rettangoli data dalla proprietà distributiva ma, riesce a farlo solo nel caso dei rettangoli.

Questo non accade per tutti gli altri intervistati. Infatti, tutti gli allievi sono in grado di interpretare ciascun rettangolo come il prodotto che gli corrisponde e riescono a validare la correttezza delle uguaglianze rappresentate per mezzo dei rettangoli andando a sommare i risultati. Tuttavia, Mir è l'unico che mette in evidenza la relazione additiva fra le basi dei rettangoli.

Pertanto, il modello rettangolare è interpretato da tutti come un possibile modello per la moltiplicazione che si aggiunge al modello della moltiplicazione come addizione ripetuta a cui i bambini erano già stati esposti prima dell'inizio dell'intervento sperimentale. Anche se

durante queste interviste, il modello rettangolare non viene utilizzato spontaneamente nell'argomentare le proprietà della moltiplicazione stessa, possiamo osservare evidenze di un legame fra i significati costruiti per le proprietà delle operazioni e l'attività svolta in classe col supporto dell'artefatto. Per esempio Sim, quando deve argomentare la correttezza dell'uguaglianza rappresentata in Fig. 9.1.2.7 ridisegna i due rettangoli più piccoli affiancati (Fig. 9.1.2.9) ottenendo un disegno simile ad altri apparsi durante l'attività in classe e che, come si vedrà meglio nella sezione 10.2.1, richiama molto una delle consegne eseguite e che potremmo classificare come un segno artefatto.

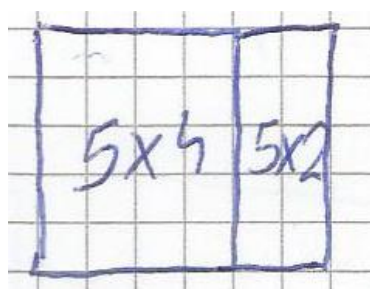


Fig. 9.1.2.9: Disegno realizzato da Sim per spiegare la correttezza dell'uguaglianza rappresentata col modello rettangolare.

In sintesi, ripercorrendo l'analisi complessiva delle interviste, è possibile affermare che, nella maggior parte delle interviste, si possono osservare comportamenti che testimoniano l'emergere di pensiero relazionale. In diversi casi si nota che lo sviluppo del senso della struttura richieda ancora un'armonizzazione delle interpretazioni sintattica e semantica delle scritture. SofB dimostra di interpretare il simbolo di uguaglianza come espressione di un'azione, il suo pensiero relazionale è meno sviluppato rispetto agli altri compagni. Difficoltà più evidenti sono presenti nei casi di Mir e Zen. Entrambi hanno una visione estremamente procedurale del simbolo di uguaglianza che comporta interpretazioni scorrette della struttura delle espressioni presentate.

Queste difficoltà potrebbero essere spiegate anche alla luce di una mancata reificazione per le operazioni aritmetiche. Evidenze a favore di questa ipotesi possono essere ottenute andando a confrontare alcuni interventi degli intervistati. Si considerino, per esempio, le frasi che Mir utilizza per spiegare il modo in cui, a suo avviso, devono essere svolti i calcoli per effettuare il confronto fra le espressioni:

Mi22 Mir: Sì fa 66. Però non tornerebbe perché **non puoi fare** con l'addizione la moltiplicazione

[...]

Mi28 Mir: Sei per otto quarantotto sei per tre uguale ehm... diciotto. Quarantotto più diciotto, sessantasei. Perché prima **lo fai così** e poi questo rimane...

In queste espressioni compare spesso un generico "tu" che deve fare o non fare. I verbi indicano una visione procedurale delle operazioni e il riferimento a un agente umano (sebbene generico) esplicita il fatto che per Mir, le operazioni, dipendono fortemente da chi le svolge. Appaiono diversi i discorsi di altri studenti:

N124 NicG: Perché se questo e questo **il loro risultato insieme forma questo** corretta perché ... Non lo so spiegare tanto bene. Perché se questo fa 32 e **il loro risultato viene 32, viene. Il risultato va bene.**

L64 Lor: Perché $5 \times \dots$ perché qui fa 5×6 e **lo smontaggio è 3 e 4 e invece dovrebbe essere 3 e 3.**

F28 Fra: **Si fa** 48 più 6×3 uguale... 18. $48 + 18$ uguale... 6×11 uguale. Quarantotto più diciotto uguale... Sessantasei. È giusta.

Per quanto alcune siano confuse, i soggetti di queste frasi sono le operazioni stesse o le relazioni che fra esse intercorrono. Anche quando c'è un riferimento a un agente umano, questo è del tutto impersonale ("si fa"); è avvenuto un *alienamento*, una delle modalità attraverso cui la reificazione prende atto (cfr. sez. 5.2.2). Le operazioni acquisiscono quindi lo status di oggetti matematici che non dipendono da chi le esegue. Tuttavia, si può notare che l'uso di termini come "fa" oppure "viene" nell'indicare la relazione fra le operazioni e i loro risultati mostra che i due non sono considerati come equivalenti. Sembra non essere ancora avvenuta una vera e propria *stessizzazione*: l'operazione e il suo risultato non sono viste come due diverse *designazioni* (Arzarello et al, 2001) o *realizzazioni* (Sfard, 2009) condensabili⁵⁴ in uno stesso oggetto matematico (un numero).

In definitiva si può affermare che l'analisi delle interviste permette di disambiguare le interpretazioni rimaste in sospeso per quanto riguardava il test a lungo termine. In particolare:

- La diversa interpretazione sulla "stessità" dei prodotti con fattori invertiti che viene data da Sim e SofB è interpretabile alla luce di una diversa concezione del simbolo di uguaglianza.
- Il significato di proprietà distributiva costruito dai bambini che danno una risposta negativa (NicG, Mir, Mel e Fra) è differente. Di fatto NicG e Fra utilizzano la proprietà per operare manipolazioni sintattiche (non sempre corrette). Mel non mostra applicazioni della proprietà distributiva, Mir invece la usa in forma di teorema in atto quando deve svolgere dei conti ma non la riconosce nelle scritture che deve commentare nell'intervista.
- Zen e Lor sembravano riconoscere la relazione di equivalenza data dalla proprietà distributiva già nel test a lungo termine. Questo è confermato nell'intervista di Lor; Zen invece mostra una visione dell'uguale come stimolo per una risposta e grosse difficoltà nell'interpretazione della struttura di un'espressione aritmetica. Si può affermare che non vi sono evidenze di pensiero relazionale per questo studente.

⁵⁴ Il termine è utilizzato in modo consistente sia con l'uso che ne viene fatto da Arzarello e colleghi (Arzarello, Bazzini, & Chiappini, 2001) sia da Sfard (1994).

9.3 Confronto fra le due classi

A seguito dei risultati delle due classi, presentati nelle sezioni precedenti, è possibile fare un confronto fra i significati sviluppati dagli studenti relativamente alle proprietà delle operazioni.

In entrambi i gruppi classe appare chiara la presenza di istanze di pensiero relazionale; tuttavia, nella classe quinta primaria sono molti gli studenti che utilizzano le proprietà della moltiplicazione per giustificare la correttezza delle equivalenze proposte mentre per i bambini della classe seconda questo avviene quasi esclusivamente per la proprietà commutativa. Questa proprietà è enunciata da molti, ma con modalità diverse: alcune volte si fa riferimento solo al piano sintattico (si decreta l'equivalenza facendo riferimento all'ordine dei fattori invertito), altre solo al piano semantico (si confrontano i risultati). Eppure, la formulazione classica della proprietà prevede proprio un nesso di causalità fra la trasformazione sintattica e il risultato che se ne ottiene sul piano semantico: "invertendo l'ordine dei fattori, si ha lo stesso risultato". Pertanto se ne può concludere che molti fra gli studenti di seconda hanno una visione 'incompleta' della proprietà che necessita di un'armonizzazione dei piani sintattico e semantico.

Lo stesso può essere affermato nel caso della proprietà distributiva che, tuttavia, mostra delle peculiari fonti di difficoltà. Queste potrebbero essere ascrivibili al fatto che non è possibile darne una facile formulazione verbale, al fatto che non si tratta una proprietà *di* una operazione ma piuttosto una relazione *fra* due operazioni e alla mancanza di simmetria nelle strutture aritmetiche utilizzate per rappresentarla.

Si può però mettere in evidenza il fatto che alcuni studenti di seconda, durante l'intervista cambiano il loro modo di utilizzare la proprietà distributiva arrivando ad applicarla correttamente nel verificare le uguaglianze proposte.

Pertanto si può affermare che, al termine dell'intervento sperimentale, l'uso della proprietà distributiva per verificare la correttezza di uguaglianze fra espressioni aritmetiche è interiorizzato da molti fra gli studenti di quinta mentre è entrato a far parte della zona di sviluppo prossimale di alcuni fra quelli di seconda.

Andando a vedere le risposte in termini di "sì" e "no" colpisce il fatto che il numero di studenti di quinta che sostiene che una o entrambe le uguaglianze mostrate nella figura 9.1.1 siano false è maggiore di quello degli studenti di seconda. Una differenza sostanziale può essere evidenziata nelle motivazioni.

Fra gli studenti della classe seconda, l'unico che continua a sostenere la non correttezza dell'uguaglianza che rappresenta la proprietà distributiva anche dopo l'intervista è Mir; questo bambino mostra una visione procedurale dell'uguaglianza e una scarsa reificazione delle moltiplicazioni come oggetto matematico. Nel caso degli studenti di quinta, i sostenitori del "no" giustificano il loro dissenso affermando che non riescono a notare quale proprietà permetta di trasformare l'espressione che si trova a un membro dell'uguaglianza in quella che si trova all'altro membro.

Pertanto i discorsi degli studenti delle diverse classi sembrano muoversi su due piani differenti. Per la maggior parte degli studenti di seconda, la correttezza delle espressioni che si trovano ai due membri è verificabile passando al calcolo dei risultati; tale calcolo può essere eventualmente abbreviato utilizzando le proprietà delle operazioni. Il simbolo di uguaglianza è interpretato per lo più come espressione di un'azione. Gli oggetti del discorso sono i numeri sui quali le proprietà agiscono, generalmente, in forma di teorema in atto. Vi sono comunque alcuni segni di reificazione delle operazioni; si riscontrano negli studenti che riescono a mostrare in alcune occasioni una visione dell'uguale come segno di equivalenza.

Nel discorso degli allievi di quinta invece le proprietà sembrano essere interpretate come procedure, regole di trasformazione, da applicare agli oggetti matematici 'operazioni'. Il confronto di espressioni aritmetiche viene interpretato da molti di questi studenti come ricerca di una proprietà che permetta la trasformazione sintattica da una all'altra; l'uguale è visto come simbolo di equivalenza. Anche in questo caso si nota quindi che le risposte matematicamente errate possono dipendere da uno "scollamento" tra il piano sintattico e quello semantico. Tuttavia, queste osservazioni non sono generalizzabili a tutti: il caso di Eri può essere preso come esempio di studente che ha ancora una visione procedurale delle operazioni mentre Sam mostra il caso in cui le due visioni sono ben armonizzate.

In definitiva, si può affermare che in entrambe le classi è osservabile uno sviluppo del pensiero relazionale. La diversa risposta di molti alunni alla consegna proposta nel test finale mostra una differenza nei significati per le proprietà delle operazioni che sono stati sviluppati. Una possibile spiegazione delle differenze tra gli allievi di seconda da quelli di quinta risiede nel fatto che gli studenti di quinta elementare avessero già reificato l'oggetto matematico "operazione" (quantomeno nel caso della moltiplicazione) prima dell'inizio dell'intervento sperimentale e pertanto hanno potuto trarre vantaggio dal fatto che, per loro, le moltiplicazioni costituivano già oggetti matematici manipolabili e sui quali ha senso 'applicare regole'. Per i bambini di seconda elementare si trattava di oggetti ancora da "costruire".

L'analisi delle attività di classe riportata nei capitoli successivi sarà finalizzata a descrivere il processo di sviluppo di questi significati a partire dall'uso dell'artefatto e attraverso la mediazione dell'insegnante. Tale analisi potrà fornire altri elementi a favore delle ipotesi interpretative fin qui riportate mostrando come le attività progettate attorno all'uso dell'artefatto possano aver influito su tale processo.

10 Espressione del potenziale semiotico dell'artefatto: classe seconda

Usando le lenti della TMS, si analizzano i dati raccolti durante le attività degli studenti relative ai cicli didattici presentati (cap. 7). Pertanto, analizzando le attività semiotiche individuali e collettive svolte durante la sequenza didattica si cercherà di delineare l'emergere e lo svilupparsi del potenziale semiotico dell'artefatto.

Lo scopo di questa analisi è quello di mostrare come il significato di proprietà delle operazioni si sia sviluppato; utilizzando gli strumenti di analisi descritti nel quadro teorico di riferimento si individuano le catene semiotiche utili per esplicitare il processo di mediazione semiotica e descriverne l'efficacia. La descrizione delle catene semiotiche, attraverso il susseguirsi di diversi tipi di segni (segni artefatto, pivot e matematici) permette di collegare l'attività con l'artefatto e i significati personali che emergono da esse, ai significati matematici di proprietà delle operazioni, che sono obiettivo dell'intervento didattico e la cui costruzione / sviluppo da parte degli allievi abbiamo messi in luce nella sezione precedente.

Si porrà poi l'accento sul ruolo dell'insegnante in tale sviluppo e dunque nel processo di mediazione semiotica. Si ricordi che, durante i diversi cicli didattici implementati, i bambini interagiscono sia con l'insegnante sia con il ricercatore che svolge quindi il ruolo di osservatore/partecipante. Laddove sarà necessario riportare trascrizioni delle discussioni di classe, si indicherà con R il ricercatore e con M la maestra della classe. Tuttavia, nell'analisi, ci si riferirà ad entrambi come "insegnante", in quanto entrambi conoscono le finalità dell'attività didattica e intervengono con l'intenzione di promuovere il processo di mediazione semiotica.

Di seguito si presentano le catene semiotiche che sono state messe in evidenza dalla nostra analisi. Gli eventi critici (cfr sez. 6.5.4) delle discussioni sono trascritti e ciascun intervento è analizzato sia in riferimento all'evoluzione dei segni sia, quando presente, all'intervento dell'insegnante e i suoi esiti. Gli interventi sono riportati con una numerazione progressiva e, nel caso in cui vi siano stati degli accadimenti tra un evento e l'altro, sono riassunti nella narrativa.

Nel capitolo 7 sono descritte le modalità in cui le consegne sono state implementate (ovvero seguendo il modello del ciclo didattico) ed è riportata l'analisi a priori del potenziale semiotico. Nella sezione 7.1 sono descritte le attività svolte preliminarmente allo scopo di introdurre il funzionamento della tabella ai bambini. Nella lettura delle sezioni successive si consideri che le attività di classe qui riportate seguono temporalmente le attività introduttive della sezione 7.1 e pertanto tutti gli studenti conoscono già il funzionamento dell'artefatto e sono in grado di associare la moltiplicazione corrispondente a ogni casella della tabella. Inoltre, i bambini sono in grado di identificare le dimensioni di ciascun rettangolo come fattori della moltiplicazione e il numero di quadretti in esso contenuti come risultato. Pertanto ogni rettangolo ha il doppio riferimento semantico all'operazione e al suo risultato. Le attività

preliminari sono anche servite a condividere un lessico relativo all'artefatto e alle sue parti. I bambini della classe seconda, in particolare, si riferiscono alle caselle della tabella chiamandole "mattonelle" mentre i quadretti contenuti in esse sono detti "quadrati".

10.1 Commutatività nella classe seconda⁵⁵

La consegna data agli studenti è quella di colorare una casella qualsiasi all'interno della tabella 5×5, indicare l'operazione a cui corrisponde e successivamente ritagliare un cartoncino delle stesse dimensioni della casella colorata. In seconda battuta, si è chiesto loro di trovare all'interno della tabella una casella a cui il cartoncino potesse essere sovrapposto. Tale casella deve essere colorata e deve essere indicata l'operazione a essa corrispondente (cfr sez. 7.2). Alcuni bambini ripetono l'operazione per più di una coppia di caselle utilizzando colori diversi. Lavorando a piccoli gruppi si chiede ai bambini di discutere su somiglianze e differenze fra le caselle colorate con lo stesso colore; nella discussione collettiva le osservazioni dei singoli gruppi sono poi condivise con tutta la classe.

10.1.1 Sovrapponibilità di rettangoli: caselle gemelle

Durante la primissima fase del lavoro, in uno dei piccoli gruppi emerge l'uso del termine "gemelle" per riferirsi alle due caselle colorate con lo stesso colore. Quando viene chiesto di riportare a tutta la classe i risultati del confronto nei gruppi, Sim interviene utilizzando questo termine:

Estratto 1			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
1	Sim: Le due gemelle sono nella stessa posizione. Due sono in alto , due a sinistra . Sono nella posizione perché se giri il foglio diventa all'incontrario. Questa è la mia. La scrittura della mia tabella.	"Gemelle" "posizione" "giri" Segni artefatto che si riferiscono al compito svolto e all'artefatto : la posizione è relativa alla tabella e ciò che si gira è la tabella. Le parole "alto" e "sinistra" indicano posizioni nella tabella	
2	R: Ok! Allora partiamo da questa idea qui. Siete tutti d'accordo che se uno gira il foglio...le caselle vanno nella stessa posizione ?	"posizione" "gira" L'azione di girare può essere collegata all'inversione dei fattori, quindi questi termini hanno la possibilità di riferirsi sia all'azione con l'artefatto sia ai significati matematici in gioco; per questo hanno la potenzialità di servire da Pivot	Focalization L'insegnante riformula quanto detto da Sim: selezionando alcune delle parole usate da Sim attua un focalizzazione attirando l'attenzione su l'operazione di girare e su cosa resta invariante. Passa dal verbo "sono" al verbo "vanno" forse per rendere più comprensibile

⁵⁵ L'analisi qui proposta è riassunta anche in (Mariotti & Maffia, Chi non impara a memoria le tabelline?, 2014).

			agli altri allievi il processo di trasformazione di cui parla Sim Sono ripetute solo alcune delle parole che aveva utilizzato Sim e viene invertita la relazione logica tra le due frasi: Prima era “sono nella stessa posizione perché se giri” Qui diviene “Se giri vanno nella stessa posizione ...”
3	Coro: No		
4	<i>Segue intervento non comprensibile</i>		
5	R: Guardate la vostra tabella. Il vostro compagno dice che se girate il foglio, le gemelle è come se fossero nella stessa posizione.	“Gemelle” “posizione” “girate” L’insegnante mette in relazione l’essere gemelle (quindi uguali) con l’azione del girare (invertire i fattori) Questi segni si riferiscono al compito, quindi sono segni artefatto, ma sono potenziali pivot	Back to the task + Focalization Viene aggiunto “gemelle” ma chiedendo di guardare il proprio elaborato.
6	Sim: Tipo: se io lo giro così [fa ruotare il foglio] diventa... questa è qua	“giro” Segno artefatto. Così [ruotando] Segno contestuale che si riferisce all’azione fatta al momento.	

Evoluzione dei segni Sim esordisce nella discussione fornendo una descrizione della posizione delle caselle colorate (linea 1). La descrizione del bambino si riferisce alla posizione assoluta all’interno della tabella (a sinistra e in alto) e non alla posizione relativa delle due caselle. Sempre nello stesso intervento, il bambino esplicita la possibilità di utilizzare un’operazione di rotazione per portare una casella nella posizione della sua gemella. L’operazione di rotazione è riferita all’intero foglio e non soltanto a una casella (linea 6).

Ruolo dell’insegnante L’insegnante, decide di focalizzare soltanto sulla seconda parte dell’intervento di Sim riutilizzando parte delle parole dette dal bambino, ovvero facendo riferimento solo al “girare” (linea 2). La classe non mostra di comprendere l’intervento di Sim (linea 3) e la riformulazione dell’insegnante.

Cogliendo la possibilità di usare il termine “gemelle” per richiamare i molti aspetti in comune fra le due caselle, l’insegnante condivide questa espressione con tutta la classe integrandola nelle proprie frasi (linea 5). Il docente decide quindi di riproporre l’affermazione iniziale del bambino, stavolta però focalizzando anche sulla prima parte del suo intervento (linea 5, si ripete in linea 7), ovvero integrando anche il segno artefatto “gemelle”.

Estratto 2			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
7	R: Il vostro compagno dice che le gemelle ce n’è sempre una in verticale e una in orizzontale e se la girate una va nella posizione dell’altra. Giusto? Ho detto bene?	“verticale” e “orizzontale” sono segni contingenti che però sostituiscono “alto” e “sinistra” usati prima da Sim Si tratta di segni artefatto perché si riferiscono alla struttura della tabella e ne identificano le parti salienti. Tuttavia sono segni nuovi che sostituiscono le parole “in alto” e “a sinistra” usate prima da Sim (linea 1). Rispetto a ‘in alto’ e ‘a sinistra’, orizzontale e verticale sono due segni solitamente accoppiati e per questo in una relazione simmetrica, possono dunque orientare verso la simmetria tra le due caselle. In questo senso possiamo dire che c’è un avanzamento nella catena.	Focalization Fa eco alle parole di Sim cambiandone alcune per distinguere le due posizioni, prima di tornare a parlare di una corrispondenza tra loro. L’uso di verticale e orizzontale potrebbe essere intenzionale; in ogni caso questa sostituzione può essere interpretata come orientata verso la mediazione del significato di simmetria tra le due caselle.
8	Sim: [annuisce]		
9	R: Cominciamo dalla prima idea: siete d’accordo tutti che quando ci sono due gemelle una è sempre in verticale e una è sempre in orizzontale ?	“verticale” “orizzontale” “gemelle” Segni artefatto L’uso della parola sempre suggerisce la volontà di passare alla generalità.	Provide for a synthesis “siete d’accordo tutti che...” uso di ‘sempre’ per generalizzare
10	NicG: Sì!		
11	Lor: Ma! Chissà!		
12	R: Guardate un po’ i vostri fogli. Siete tutti d’accordo che ce n’è sempre una in orizzontale e una in verticale ?	“verticale” “orizzontale” Segni artefatto	Back to the task “guardate un po’ i vostri fogli”
13	Coro: Sì! Certo!		

Evoluzione dei segni Le parole “in alto” e “a sinistra” utilizzate inizialmente da Sim (linea 1) sono sostituite dall’insegnante con “verticale” e “orizzontale” (linee 7 e 9). Viene inoltre espressa la generalità del risultato mediante l’aggiunta la parola “sempre”: si suggerisce di

generalizzare dal singolo caso di Sim a tutti i casi (almeno tutti quelli dei bambini della classe). Allo stesso modo, il riferimento alla rotazione del foglio viene mutato nel riferimento alla rotazione delle caselle. Sim riconosce in queste parole il significato che voleva dare (linea 8). Questa formulazione appare più chiara anche per gli altri bambini che infatti stavolta rispondono in modo affermativo (linee 10 e 13), seppur con qualche eccezione (linea 11). In questa parte della discussione si arriva a condividere la diversa posizione delle due caselle colorate e la possibilità di passare dall'una all'altra mediante una rotazione/giro.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante, volendo chiarire meglio qual è l'operazione che porta una casella nell'altra, cambia le parole usate da Sim utilizzando però una frase con struttura simile (linea 7). Probabilmente conscio del profondo cambiamento realizzato, il ricercatore chiede a Sim una conferma. C'è anche un tentativo di mettere in evidenza che, con una rotazione (che corrisponde a quella fatta fisicamente dai bambini durante la ricerca della casella a cui il cartoncino si sovrappone), è possibile portare una casella nell'altra. Tuttavia, vengono ancora mostrate delle perplessità da alcuni bambini, in particolare Lor (linea 11) e quindi viene fatta la richiesta di ritornare all'analisi degli elaborati individuali per condividere almeno il fatto che le due caselle hanno orientazione diversa (linea 12).

10.1.2 Simmetria della tabella: i quadrati sono degli specchi

La discussione procede e la descrizione della relazione tra le caselle gemelle viene arricchita da MALb, il quale suggerisce che la casella 5×5 appaia come uno "specchio":

MALb: [Che] questo quadrato grande [indica il quadrato 5×5] è come uno **specchio**.

Successivamente, l'insegnante chiede a MALb di colorare le caselle della tabella alla lavagna⁵⁶ nello stesso modo in cui lo erano quelle sul suo foglio. Lo studente usa il gesso colorato per colorare approssimativamente le caselle corrispondenti a 5×3 e 3×5.

Estratto 3			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
14	R: Ok, guardate quelle che vi dice MALb. Lui dice che c'è una casella che funziona come uno specchio . Fallo un po' rivedere MALb qual è quella che funziona come uno specchio .	"casella" si riferisce direttamente all'artefatto "specchio" viene individuata e riutilizzata per il potenziale collegamento alla simmetria. Segno pivot	Focalization + Provide a synthesis "Guardate quelle che vi dice MALb" serve a focalizzare l'attenzione. Successivamente fa una sintesi di quanto detto dal bambino ripetendo alcune delle sue parole.
15	MALb: Questa [indica la casella 5×5, Fig. 10.1.1] perché qui [indica con entrambe le mani la casella subito sopra, cioè 5×4, e quella a sinistra, cioè 4×5. Fig. 10.1.2] c'è uno spazio bianco e qui c'è uno spazio colorato [indica con le due mani le caselle successive, cioè 5×3 e 3×5]	Le posizioni delle caselle sono indicate con termini (qui) e gesti (indicare) di tipo deittico. L'uso di deissi porta verso la generalizzazione, i gesti delle due mani che indicano prima una poi l'altra delle due caselle fungono da	

⁵⁶ Si tenga presente che, anche se nelle fotografie non è sempre evidente, la lavagna è quadrettata.

		segni pivot , infatti si riferiscono alle caselle specifiche ma anche la relazione tra le due caselle, e si trasformano in forme più generiche come spazio bianco e spazio colorato. “spazio” viene utilizzato per dire “casella”	
16	R: Siete tutti d'accordo con MALb?		Focalization
17	<i>Alcuni dicono sì ma la maggioranza dice di no</i>		
18	R: Ma perché? Perché non avete capito quello che ha detto o ... ?		
19	NicS: Io non ho capito niente!		
20	Sim: Io non c'ho capito nulla!		
21	Coro: Neanch'io!		

Evoluzione dei segni L'esempio mostrato alla lavagna permette a MALb di portare avanti la sua argomentazione utilizzando soprattutto segni di tipo deittico (parole e gesti) (linea 15). Tuttavia, la spiegazione data dal bambino risulta ancora incomprensibile per diversi dei suoi compagni (linee 17 e 19-21).



Fig. 10.1.1: MALb indica la casella 5×5 che, secondo lui, funge da “specchio”.



Fig. 10.1.2: MALb usa entrambe le mani per indicare due caselle alla volta.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante non interviene, se non per sincerarsi che gli allievi stiano comprendendo quanto detto da MALb. Una volta chiaro che i compagni non stiano seguendo – in particolare che anche Sim non riconosce il proprio ragionamento in quello del compagno che rimanda allo “specchio” – l'insegnante decide comunque di continuare a mantenere il focus su questo intervento, forse perché contiene il riferimento allo specchio che permetterebbe di introdurre la simmetria come trasformazione/relazione tra le caselle, per poi arrivare alla relazione tra i prodotti. Decide di colorare una nuova casella: la scelta ricade sulla casella 3×4. Indica poi la casella 4×3 (linea 22, Fig. 10.1.3).



Fig. 10.1.3: L'insegnante indica una casella chiedendo se sia la gemella di quella colorata.



Fig. 10.1.4: Sim indica, a due a due, le caselle gemelle della seconda riga e seconda colonna.

Estratto 4			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
22	R: [...] La sua gemella ? È questa qua [indica la casella, Fig. 10.1.3] giusto?	"gemella" Continua a essere usato come segno Pivot per indicare la simmetrica	Back to the Task
23	<i>Alcuni dicono sì e alcuni dicono no</i>		
24	R: [Colora la casella che aveva indicato] Come si fa a capire se è la gemella ? Voi come avete fatto per capire se erano gemelle ?	"gemella" e "gemelle" qui sono utilizzate per richiedere un criterio di congruenza fra caselle. Segni Pivot	Back to the Task
25	MAB: Io ho contato i quadretti .	"quadretti" è un segno artefatto, si riferisce ai quadratini contenuti in ciascuna casella. Come previsto dall'azione back to the task, riemergono e segni artefatto ad esprimere come si è svolto il compito. Contare è ambiguo perché si può contare in vari modi, pivot?	Contare è ambiguo perché si può contare in vari modi, l'insegnante lo sfrutta dopo proprio per la sua ambiguità.
26	R: Allora provo a contare anche io i quadretti . Allora qui ce n'è 1, 2, 3 in orizzontale . 1, 2, 3, 4 in verticale .	Il conteggio dei quadretti è realizzato non sul numero totale di quelli contenuti in una casella, ma sui quadretti dei lati, ovvero sulle dimensioni del rettangolo. Tornano "orizzontale" e "verticale" che fanno da ponte tra questa descrizione della casella tramite i quadretti	Focalization & Back to the Task Fa eco al bambino e poi ritorna alla consegna e interpreta il contare come identificare le dimensioni del rettangolo.

		/dimensioni e quella precedente, ovvero quella rielaborata sulla descrizione di Sim	
27	Sim: Ah! Ora ho capito quello che ha detto MALb!	L'uso di orizzontale e verticale sembra avere effetto, almeno su Sim.	
28	R: Allora, provo a contare anche di qua. Qui ce n'è 1, 2, 3, 4 e qui ce n'è 1, 2, 3. Sono gemelle ?	Altro esempio, segni deittici e caratterizzazione delle dimensioni col conteggio	Attraverso questo intervento e il successivo [30], il significato di gemelle si arricchisce di una caratteristica che non dipende dalla posizione specifica ma dal fatto di scambiarsi le dimensioni.
29	Coro: Sì!		
30	R: Quelle che invece aveva colorato MALb erano questa [colora nuovamente la casella 3×5 in modo che il colore sia più evidente] e questa qua [ri-colora anche 5×3]. Sono gemelle quelle che ha colorato MALb?	Ancora un esempio, deissi senza più il conteggio ma solo colorando le due caselle che si corrispondono e chiamandole gemelle. Il segno gemelle è ora esplicitamente messo in relazione alla proprietà che hanno le due caselle di scambiarsi le dimensioni verticale e orizzontale.	
31	Coro: Sì! Certo!		
32	R: Allora, MALb ha detto che è come se qui [indica la casella 5×5] ci fosse uno specchio .	Ritorna l'uso del segno 'specchio', riferendosi (deissi) alla casella specifica, che però si trova in relazione con quelle di cui si è parlato poco prima. Specchio agisce da segno Pivot dalla descrizione della relazione tra le caselle alla proprietà che caratterizza l'essere gemelle.	Focalization sulle parole che precedentemente aveva detto MALb, in particolare sul segno specchio, con ritorno alla simmetria come criterio di 'gemellarità'.
33	NicS: Perché si ripetono tutti due volte.	"si ripetono" è un'osservazione del fatto che le caselle sono associabili a due a due. Si riferisce probabilmente all'osservazione del disegno. Ora il disegno è interpretato come una tabella che contiene caselle che si ripetono, è un modo nuovo di 'vedere' la tabella.	

34	R: Vi sembra anche a voi che ci sia uno specchio ?		Ask for a Sythesis
35	NicS: Perché si ripete sempre tutto due volte.		
36	R: Si ripete tutto due volte.	Qui l'insegnante ri-usa il termine del bambino	Focalization
37	Sim: [si alza in piedi e va alla lavagna] È vero perché se metti per così questa è con questa , questa è con questa , questa è con questa ... [parla molto velocemente e intanto indica con le due mani le varie coppie di caselle gemelle della seconda riga e seconda colonna, Fig. 10.1.4]	Sim fornisce la sintesi richiesta ma lo fa con segni deittici (sia le parole sia i gesti) che potrebbero essere interpretati come segni che richiamano la corrispondenza tra due caselle (caselle gemelle) dato che sono indicate due alla volta	
38	Lor: Non si è capito niente Sim.		
39	R: Praticamente Sim sta dicendo che ogni volta lui riesce a trovare per ciascuna di quelle caselle una gemella da quest'altro lato [indica rispettivamente la seconda colonna e la seconda riga].	"ogni volta" e "per ciascuna" vengono usati per indicare generalità ma l'indicazione "quest'altro lato" è contingente. La frase è quindi ibrida	Focalization + Provide a Synthesis Ripete la frase del bambino ma inserendo al posto dei gesti gli elementi di generalità che Sim aveva espresso solo con la ripetizione di termini e gesti deittici
40	NicG: Ma però ce ne sono altre!		
41	R: Ce ne sono tante. Però ascoltate un attimo, ci sono i vostri compagni che vogliono parlare		
42	<i>NicS parla molto piano e non si sente cosa dica.</i>		
43	R: Ok, allora: NicS dice però che non sono proprio tutte perché abbiamo detto che i quadrati non hanno i gemelli .	"quadrati" si riferisce alle caselle di forma quadrata. Il termine è usato in modo consistente col linguaggio matematico a significare che qui si riferisce a particolari caselle della tabella, quelle con le dimensioni uguali. In questo senso è più un segno pivot che un segno matematico	Provide a Synthesis "i quadrati non hanno i gemelli"
44	Sim: Infatti io non ho detto tutte, ho detto quelle di là		
45	R: Tutte quelle di quel lato , ok.	Ancora, il riferimento a particolari caselle (i non quadrati) è dato in riferimento alla loro posizione nella tabella. Si tratta di segni relativi	Focalization Fa eco alle parole del bambino per confermare.

		all'uso dell'artefatto	
46	<i>Fra parla molto piano. R interviene per ripristinare il silenzio nella classe e chiede a Fra di parlare con voce più alta.</i>		
47	Fra: Tutte le mattonelle sono uno specchio . Questa [indica la 5×5] riflette questa e questa, questa, questa [indica tutte le coppie di caselle gemelle nella quinta riga e colonna]... Invece questa [indica 4×4] riflette questa, questa, questa... [indica tutte le coppie di mattonelle gemelle nella quarta riga e colonna].	Tutte le mattonelle Potrebbe riferirsi sia alla linea dei quadrati sia a ciascun quadrato che fa da cardine per scambiare una riga con la colonna. La parola "riflette" viene mutuata dal campo d'esperienza dello specchio. Il riferimento alle caselle è ancora deittico	
48	R: Cioè lui sta dicendo che tutti i quadrati sono degli specchi .	Cambia la frase del bambino sostituendo "mattonelle" con "quadrati"	Provide a Synthesis "tutti i quadrati sono degli specchi"
49	MAB: È vero!		
50	Coro: È vero!		
51	R: Siete tutti d'accordo su questa cosa?		
52	Coro: Sì!		
53	R: C'è qualcuno che non è d'accordo? O che non ha capito? [segue silenzio] La scriviamo allora questa cosa?		
54	Coro: Sì!		

Evoluzione dei segni In questa parte di discussione si cerca di "caratterizzare la gemellarità" senza fare riferimento all'azione ovvero all'uso del cartoncino. Secondo la formulazione del compito la casella gemella è proprio quella ricoperta dal cartoncino che si è prima ritagliato. Qui viene rimosso dal discorso il riferimento ad una parte dell'artefatto (il cartoncino), spostandosi verso i significati matematici. Si sposta il focus da ciò che è stato fatto verso l'analisi della tavola e in particolare della relazione di congruenza (in particolare uguaglianza delle dimensioni fra i lati) che c'è fra le caselle che si trovano in posizione simmetrica, relazione che è intrinseca nella tavola di Laisant stessa.

Il suggerimento di contare, dato inizialmente da MAB per decidere se due caselle siano gemelle o meno (linea 25), è ambiguo: potrebbe riferirsi sia alle dimensioni del rettangolo sia al numero di quadretti complessivamente contenuto in essi. Sfruttando questa ambiguità, l'insegnante interpreta il segno "contare" riferendosi alle dimensioni delle caselle (linea 26), in questo modo focalizza l'attenzione e orienta la discussione verso considerazioni sui fattori della moltiplicazione. La presenza di un secondo esempio rispetto a quello dato precedentemente da MAB (linea 30) sembra essere d'aiuto per gli studenti che cominciano a comprendere la precedente affermazione del bambino (linee 27 e 31). In particolare NicS

sostiene che si tratti di uno specchio perché tutto si ripete due volte (linee 33 e 35); l'insegnante fa eco a questa affermazione che viene quindi validata (linea 36). Sim cerca di far notare come questo vale per molte caselle della tabella (linea 37) ma ancora una volta Lor sostiene che l'intervento di Sim sia incomprensibile (linea 38). Seguono considerazioni in merito al fatto che non tutte le caselle abbiano una "gemella" (linee 43-45).

L'insieme di tutte le considerazioni emerse porta Fra ad affermare che "tutte le mattonelle sono uno specchio" (linea 47). Si noti che inoltre, nel suo intervento, Fra utilizza il verbo "riflettere" riferendosi proprio alla caselle che fungono da specchio, il bambino ha quindi acquisito la metafora dello specchio nel proprio discorso. Gli esempi che mostra dopo aver fatto questa affermazione suggeriscono il fatto che Fra stia dando un ruolo particolare ai quadrati. Pertanto l'insegnante ripete ancora la frase di Fra sostituendo "mattonelle" con "quadrati" (linea 48). Questa affermazione trova l'accordo di tutta la classe (linee 49-54).

Negli estratti 1 e 2, la parola "gemelle" è stata legata all'azione di rotazione: due caselle sono gemelle se una può essere portata nell'altra con una rotazione. Alcuni bambini si sono dimostrati perplessi rispetto a questo tipo di affermazione. In questi ultimi due estratti di trascrizione, invece, la parola "gemelle" viene associata al fatto di avere le stesse dimensioni (linee 24-29) e allo "specchiarsi" in un quadrato (linee 32-39).

La rotazione del rettangolo può essere messa in relazione con l'inversione dell'ordine dei fattori, così come il fatto di avere le stesse dimensioni può portare a parlare di due moltiplicazioni con gli stessi fattori. Tuttavia, le parole e i disegni utilizzati in questa prima parte della discussione fanno ancora riferimento all'artefatto.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante non propone una strategia per verificare se le caselle sono gemelle ma segue, interpretandolo, il suggerimento di MAb (linea 26). Allo stesso modo, quando deve far sintesi, ripete l'intervento di Sim, modificandone la forma (linea 39). Inoltre, decide quali esempi fornire (linea 22) e proprio questi esempi sembrano essere d'aiuto agli studenti nella comprensione di interventi precedenti (linee 27 e 31).

Sintetizzando quanto emerge in questi stralci di discussione, si può notare che il ruolo dell'insegnante è generalmente quello di far eco alle affermazioni degli studenti interpretando i segni che possono risultare ambigui ("contare" per esempio). Tali segni vengono utilizzati come segni pivot: L'interpretazione del segno che si realizza nell'eco ha una funzione di focalizzazione che fa progredire la catena semiotica, permettendo di mettere in relazione la relazione di simmetria osservabile nella tabella con lo scambio tra le dimensioni delle caselle/rettangoli. Gli studenti manifestano in modo piuttosto esplicito il loro consenso o dissenso in merito alle affermazioni che vengono quindi ridiscusse se l'insegnante focalizza l'attenzione su di esse.

Si può notare che l'uso di parole emerse dagli interventi degli studenti, quali "gemelle" e "specchio" sembra favorire la partecipazione di molti bambini alla discussione. L'insegnante le usa spesso e queste ritornano anche negli interventi degli allievi. In questa parte della discussione viene quindi a crearsi un linguaggio condiviso da studenti e insegnante per

riferirsi ad aspetti dell'attività che possono essere messi in relazione con i significati matematici obiettivo.

10.1.3 Introduzione dei simboli aritmetici

Successivamente, per avvicinarsi ai segni matematici che sono il suo obiettivo, l'insegnante cambia la direzione della discussione passando alla seconda consegna che era stata data precedentemente agli studenti. Chiede di inserire nelle caselle colorate i numeri corrispondenti. Il primo a proporsi è MALb che inserisce il numero "15" all'interno delle due caselle da lui colorate precedentemente alla lavagna (ovvero 3×5 e 5×3). La consegna viene quindi interpretata dal bambino in merito ai risultati dei prodotti e non i fattori.

L'insegnante focalizza su questo intervento:

Estratto 5			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
55	R: Prima MALb, quando è venuto a scrivere i numeri nei gemelli ha messo il 15 sia qui che qui [indica 3×5 e 5×3].	"numeri" è usato per riferirsi alla scrittura simbolica in cifre, è un segno matematico "gemelli" viene qui usato al maschile differentemente da prima, insieme a "numeri" collega i simboli matematici all'artefatto	Focalization sull'intervento di MALb
56	Sim: Eh! Perché sono gemelle !	"gemelle" è di nuovo al femminile	
57	R: Quindi i gemelli hanno sempre dentro lo stesso numero ?	"gemelli" maschile Si riferisce sempre all'artefatto Aggiunto a numero l'aggettivo "stesso", propende verso l'idea di equivalenza	Ask for a sythesis
58	<i>Alcuni bambini dicono sì e altri no</i>		
59	R: Sì o no?		
60	Coro: Sì!		
61	R: Provo a fare un esempio: qui io c'ho 1, 2, 3 [conta i quadretti lungo il lato di 3×4 , una delle caselle colorate precedentemente di verde] in orizzontale , e 1, 2, 3, 4 in verticale . Che numero ci metto lì dentro?	"orizzontale" e "verticale" sono usati per riferirsi alle dimensioni del rettangolo, sembra un tentativo di spostare l'attenzione sui fattori anziché il risultato	La risposta in coro non sembra convincere l'insegnante che quindi torna all'esempio
62	Sim: Sette!	Sembra un'interferenza fra somma e prodotto	
63	R: Che numero ci metto qui dentro? Qui sono 1, 2, 3..	Si parla di numero, al singolare. Suggerisce quindi il significato di "risultato" Inoltre sembra mettere in	Back to the task

		dubbio l'affermazione di Sim	
64	Sim: Dodici!		
65	Coro: Dodici!		
66	R: Tutti d'accordo col 12?		Focalization Facendo eco al 12 potrebbe star suggerendo che è la risposta attesa
67	Coro: Sì		
68	R: [scrive 12 in una casella] Allora nella sua gemella che numero ci metto?	"gemella" torna al femminile Numero è ancora usato col significato di risultato	
69	Lor: Dodici!		
70	Coro: Dodici!		
71	R: Tutti sicuri?		
72	Coro: Sì!		
73	R: [scrive 12 anche nell'altra casella] Qualcuno però mi spiega perché nelle gemelle ci sono sempre gli stessi numeri ?	Ritorna il termine "stessi". La frase è ibrida con riferimento sia ai numeri (segni matematici) sia alle caselle gemelle (segni artefatto); la frase ibrida può fungere da segno pivot	Ask for a synthesis
74	Sim: Perché le gemelle devono essere uguali ! Come Fra con il suo gemello sono uguali !	La parola "gemelle" viene utilizzata con significato richiamato dall'esperienza esterna (il fatto che Fra abbia un fratello gemello). Allo stesso modo "uguali" sembra riferirsi alla somiglianza nell'aspetto	

Evoluzione dei segni Anche in questa parte della discussione, Sim e Lor hanno un ruolo importante nell'avanzamento: Sim riconosce da subito il fatto che le gemelle debbano contenere lo stesso "numero" (linea 56). Questa ha nel corso della discussione il significato di risultato del prodotto. La classe non appare subito certa del fatto che due caselle gemelle contengano sempre lo stesso numero di quadretti (linea 58). Quando viene determinato il numero di quadretti contenuto in una delle due caselle colorate di verde, è Lor a proporre immediatamente che lo stesso numero (dodici) venga riportato anche nell'altra (linea 69). Molti studenti ripetono il suo intervento e la classe sembra concordare tutta (linea 70 e seguenti).

Quando l'insegnante richiede di argomentare (linea 73) Sim risponde facendo riferimento proprio alla parola "gemelle" che però porta con sé il significato che questo bambino le dà in altri contesti (linea 74). L'uso di un termine del linguaggio quotidiano da un lato facilita la

discussione permettendo a molti di partecipare pur non avendo a disposizione i termini tecnici (come per es. “simmetriche” o “congruenti”) per riferirsi alle caselle dello stesso colore. D'altra parte però, questo termine non è neutro per i bambini, porta con sé il riferimento alle loro esperienze di vita (come il fatto che Fra abbia un fratello gemello) e quindi al significato che questa parola assume attraverso esse, ovvero quello di totale somiglianza nelle sembianze.

Sebbene siano stati introdotti nel discorso i numeri (e anche la parola “numeri”), quelli enunciati dagli studenti sono sempre risultati, solo l'insegnante fa riferimento alle dimensioni. Il significato matematico è sempre quello di risultato, si rafforza la rappresentazione della casella con il suo risultato – si scrive 12 dentro ciascuna casella – e ci si allontana invece dalla rappresentazione 3×4 e 4×3 .

Fin qui sembra che si sia sviluppata una relazione tra mattonelle gemelle e numero di quadretti contenuti che giustifica il fatto di usare il risultato della moltiplicazione come segno che rappresenta una casella e la sua gemella. Tuttavia, preso un qualsiasi numero, le possibili fattorizzazioni sono diverse e quindi il risultato non può essere una rappresentazione univoca di una casella.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante pone inizialmente l'attenzione sul modo in cui MALb ha portato a termine la consegna (linea 55). Successivamente ripete più volte frasi del tipo “nelle gemelle ci sono gli stessi numeri” (linee 57 e 73) rafforzando il legame fra caselle congruenti e uguaglianza del risultato. In particolare, la parola “numero” è introdotta e utilizzata solo dall'insegnante in termini generali. Gli studenti si riferiscono sempre al risultato particolare dell'esempio considerato.

La ripetuta richiesta di giustificazione dell'uguaglianza del risultato per due caselle gemelle (linee 57 e 73) appare legata alla volontà di esplicitare il fatto che si tratta di due moltiplicazioni che danno lo stesso risultato ma nessuno studente fa questo tipo di intervento.

Andando avanti, la discussione cambia direzione: nella fase successiva l'insegnante prosegue con la verifica dell'affermazione inversa rispetto a “tutte le gemelle contengono lo stesso numero”. In particolare, l'insegnante fa notare che la casella 2×2 contiene tanti quadretti quanto le caselle 1×4 e 4×1 . Tutti i bambini concordano sul fatto che queste tre caselle non siano tutte gemelle. Allora l'insegnante chiede nuovamente come si può fare per verificare se due caselle sono gemelle. Già propone di provare a sovrapporre i corrispondenti cartoncini, MALb suggerisce di contare i quadretti. Questo intervento fornisce l'opportunità di discutere della differenza fra fattori e risultato:

Estratto 6			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
75	R: C'è bisogno di contare tutti i quadrati che stanno dentro alla mattonella per capire se sono gemelli oppure si può fare prima?	“contare” è un segno matematico che non riguarda più l'attività fatta in precedenza ma richiama esperienze fatte in passato.	Back to the Task Qui si ritorna a una consegna che non è quella che ha dato principio a questa discussione ma

		Si parla però di contare i “quadratin” quindi si è ancora nel contesto dell’artefatto L’espressione stanno dentro evoca per opposizione quelli che stanno sul bordo.	quella di determinare il numero di quadratini di una casella. Consegna già nota agli studenti. C’è anche una focalizzazione attraverso l’opposizione tra l’espressione pronunciata “stanno dentro” e quella evocata “stanno sul bordo”.
	[...]		
76	Lor: Basta...Basta che conti eh... [si alza e va alla lavagna di fronte al disegno della tabella] Tipo nel 12, basta che conti questi qui [col dito scorre i quadretti che stanno lungo l’altezza del rettangolo 4×3] e poi conti questi quattro [col dito scorre i quadretti che stanno lungo la base della casella].	I gesti fatti suggeriscono che il contare si riferisca ad individuare le dimensioni della casella contando i quadretti. Queste espressioni e gesti deittici portano nella discussione le dimensioni della casella e quindi, potenzialmente, i fattori della moltiplicazione	
77	R: Siete d’accordo con Lor?		Focalization
78	<i>Alcuni dicono sì, altri no</i>		
79	Lor: Ma poi ci fai la moltiplicazione e ti viene!	“moltiplicazione” Segno matematico che fa parte dell’obiettivo. La proprietà commutativa deve essere identificata come proprietà della moltiplicazione	
80	R: Allora scusa. Vai Lor torna a posto. Provo a cercare di vedere se ho capito quello che ha detto Lor. Lor dimmi se dico bene. Cioè Lor dice: non importa contare tutto quanto quello che c’è dentro, basta che conti per esempio [scorre col dito lungo i lati della casella 3×4] che questi siano 3 e che questi siano 4. Se è uguale a quell’altra casella [indica la gemella] allora sono due gemelle.	Permane “contare” col senso di “determinare il risultato”. L’espressione “tutto quanto quello che c’è dentro” richiama i quadretti della casella e quindi il risultato della moltiplicazione. Viene poi spostata l’attenzione su “questi” e “questi”; si tratta delle dimensioni della casella. Questa è la parte di intervento che richiama quella di Lor. Vengono inserite esplicitamente nella stessa frase le parole “uguale” e “gemelle”. Qui il significato sembra essere “se le dimensioni sono uguali, le	Focalization + Provide a synthesis Viene focalizzato sull’intervento di Lor ma con una sintesi che integra termini emersi precedentemente nella discussione

		caselle sono gemelle”. La parola gemelle può avere qui più significati: “avere lo stesso risultato”, “essere messe a specchio”, “essere congruenti allo stesso cartoncino”; funge da Pivot.	
81	Lor: Sì perché faccio la moltiplicazione !	Il bambino si rispecchia nelle parole dell’insegnante. Aggiunge il segno matematico che era stato omissso. Il riferimento al “fare” sembra indicare una lettura procedurale dell’operazione e quindi il fine ultimo di ottenere il risultato.	
82	R: Lui dice: io faccio la moltiplicazione . Perché te dici che fare 3×4 o 4×3 [nel dirlo indica prima una e poi l’altra casella] è la stessa cosa ? Siete d’accordo con Lor?	Viene ripetuto il segno matematico “moltiplicazione” Si aggiunge il riferimento alle moltiplicazioni rappresentate dalle caselle di cui è stato parlato fino a questo momento. Viene fatto un tentativo di stessizzazione facendo riferimento a una vaga “cosa” L’interpretazione di “cosa” può essere sia in relazione all’artefatto (stesso rettangolo) sia in contesto matematico (stesso risultato). Segno Pivot	Focalization Fa eco al bambino e aggiunge altri segni matematici. A seguito fornisce una sintesi, seppure in forma di domanda.
83	Coro: Sì! Certo!		
84	R: Cioè se io faccio 3×4 oppure 4×3 viene sempre la stessa cosa ?	Ripete con l’aggiunta di “sempre”, spingendo verso la generalizzazione.	Provide a synthesis
85	Coro: Certo! Sì!		
86	R: Ma questo vale solo per 4×3 e 3×4 o vale per tutte le moltiplicazioni ?	La parola “solo” viene usata in contrapposizione con “sempre”. La domanda assomiglia a quelle precedenti ma viene sottolineato l’aspetto di generalità contrastando il caso generale col singolo esempio.	Ask for a synthesis Più specificamente richiesta di generalizzazione
87	Coro: Vale per tutte !	Viene recepita la richiesta di spiegare il risultato nei termini della sua	

		generalità. La parola “tutte” è integrata nell’intervento dei bambini.	
88	Lor: Soltanto che cambi moltiplicazione.	La parola “cambi” ha interpretazione dubbia: potrebbe riferirsi al fatto che cambiando moltiplicazione, la proprietà commutativa continua a valere oppure al fatto che applicando la proprietà si cambia la moltiplicazione di partenza.	

Evoluzione dei segni L’affermazione iniziale di Lor (linea 76) contiene molti riferimenti di tipo deittico, sia nei gesti (indicando i lati del particolare rettangolo a cui si riferisce) sia nelle parole (con l’uso di termini come “qui” oppure “questi”). L’insegnante rielabora l’intervento di Lor aggiungendo in fondo un confronto fra le due caselle (linea 80); il che era assente nell’affermazione del bambino.

Si noti che, anche negli interventi successivi (linea 82), attraverso i gesti l’insegnante collega le proprie affermazioni con i segni artefatto rappresentati alla lavagna. L’enunciato verbale dei prodotti “tre per quattro” e “quattro per tre” in contemporanea col gesto deittico rivolto verso il disegno sulla lavagna permette di creare un legame fra i segni matematici espressi a parole e quelli artefatto rappresentati graficamente. In questo senso, *il gesto funge da segno pivot*.

Da questo momento la discussione si sposta sempre più dal piano dell’artefatto verso segni matematici: gli interventi successivi (linee 79, 81, 82, 86, 88) si riferiscono alle moltiplicazioni e i bambini rispondono insieme senza che nessuno manifesti disagio. Si noti però che frasi come “se io faccio 3×4 oppure 4×3 viene sempre la stessa cosa” (linea 84) possono essere interpretate come frasi ibride. Di fatto si fa riferimento a degli specifici prodotti ma il risultato viene espresso come “cosa”. Questo termine vago può essere interpretato come risultato della moltiplicazione ma potrebbe anche essere inteso in riferimento all’artefatto (per esempio si potrebbe intendere che si ha lo stesso rettangolo o lo stesso numero di quadretti), pertanto funge da segno pivot.

L’insegnante utilizzando sia i gesti sia le parole mette in relazione i segni matematici con la parola “gemelle”. Questo segni acquisiscono quindi il ruolo di segni pivot.

Ruolo dell’insegnante In questa parte di discussione l’insegnante sfrutta gli interventi di Lor per fare un passo in avanti verso i significati matematici. L’insegnante, così come in altre occasioni precedenti, rielabora le parole di Lor (linee 80 e 82) aggiungendo termini artefatto nei casi in cui vuole condividere l’affermazione del singolo con tutta la classe; inserendo termini matematici quando, alla fine, richiede una sintesi.

Lor concorda con l'interpretazione che l'insegnante dà delle proprie parole ma precisa che le lunghezze così determinate servono a fare una moltiplicazione (linea 81). L'insegnante fa eco a questa affermazione approfittando dell'introduzione del termine matematico nel discorso per far riferimento ai prodotti (linea 82).

Nell'estratto 7, l'insegnante sposta rapidamente la discussione verso i segni matematici. In particolare, generalizza immediatamente il risultato ottenuto prima con l'esempio di 3×4 e 4×3 .

Estratto 7			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
89	R: Provo a scrivere questa ultima cosa che ci siamo detti. La scrivo in questo spazio qui [disegna un riquadro sulla lavagna e, senza dir niente, al suo interno scrive "Nella moltiplicazione non importa l'ordine"]. Siete tutti d'accordo che nella moltiplicazione non importa l' ordine ?	Viene inserito nella discussione il segno "ordine" ma, come si vede dopo, con un significato poco chiaro.	Provide a synthesis Inserisce una frase che non contiene il termine "ordine" precedentemente non utilizzato. Quindi sta inserendo un nuovo segno mentre fornisce una sintesi
90	Coro:Sì!		
91	R: Ma che cosa vuol dire l' ordine ?	Viene chiesto di esplicitare il significato del nuovo segno che però è stato introdotto dall'insegnante stesso	Richiesta di esplicitare il significato di una parola (segno)
92	NicG: Fare le cose per bene.	L'allievo esplicita un significato di ordine che si riferisce ad un uso quotidiano della parola. Emerge una discordanza fra il significato matematico e un significato del termine nell'uso quotidiano	
93	R: No. Ecco...		
94	Lor: Che se tipo te fai quattro per tre o tre per quattro , non importa.	Lor propone una interpretazione della frase precedente facendo riferimento al caso specifico del prodotto di 3 e 4. Implicitamente fornisce una risposta alla domanda sul significato della parole 'ordine'.	
95	R: Allora: l' ordine non nel senso che non importa essere precisi, ma nel senso che non importa se mettiamo prima un numero e poi l'altro .	Qui "ordine" è usato come segno matematico Viene esplicitata l'interpretazione che questo termine ha nella cultura matematica: la frase 'mettiamo prima un	Qui emerge la seconda parte dell'azione fatta prima dall'insegnante [linea 91] che completa l'azione volta a discutere il significato di una parola. In questo caso l'insegnante

		numero e poi l'altro' funge da definizione	contrasta i due significati emersi indicando quello da selezionare all'interno del contesto matematico di riferimento.
96	NicG: Ah!		
97	R: Quindi bisogna essere precisi e ordinati ma non importa se scriviamo prima tre per quattro o quattro per tre , perché il risultato	L'intervento assomiglia nella forma a quello nella linea 95 ma invece di essere generale, si riferisce all'esempio particolare discusso	Provide a synthesis Usa l'esempio e le parole usate da Lor "non importa" e lo riformula in termini di risultato
98	Coro: È uguale .	Diversi studenti completano la frase in coro introducendo il segno "uguale" per la prima volta nella discussione.	

Evoluzione dei segni Viene introdotto dall'insegnante il termine 'ordine', che però acquisisce un significato matematico condiviso soltanto nel corso della discussione. Di fatto inizialmente viene interpretato come "fare le cose per bene", ovvero come contrario di 'disordine' (linea 92). L'elaborazione successiva sul significato della parola 'ordine' all'interno della cultura matematica condivisa (linea 95 e 97) avviene per l'intervento esplicito dell'insegnante che sposta la discussione sul significato della parola 'ordine', ovvero sul confronto tra il significato usato nel linguaggio quotidiano e quello matematico. Gli studenti partecipano alla parte finale della sintesi sottolineando l'uguaglianza dei risultati quando l'ordine dei numeri nella moltiplicazione non viene mantenuto. Tuttavia, non si tratta della totalità della classe.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante è deciso ad arrivare a una sintesi su quanto emerso rispetto alle caselle con stesse dimensioni. Tuttavia, questo viene fatto senza richiamare i segni utilizzati precedentemente ma facendo riferimento immediatamente all'idea di ordine (linea 89). Non viene però specificato che ci si riferisce all'ordine dei fattori, ed è l'insegnante che pone la domanda esplicita sul significato della parola 'ordine'. Lor fornisce una risposta implicita proponendo una interpretazione della frase precedente che fa riferimento al caso specifico del prodotto di 3 e 4. L'insegnante contrasta questo significato con quello usato nel linguaggio quotidiano e propone una sintesi. La consapevolezza di aver forse introdotto un termine – ordine – non condiviso porta l'insegnante ad un'azione importante per lo sviluppo del processo semiotico. Viene fatta una "richiesta di significato" a cui segue una "proposta di significato"; queste azioni si rivelano fondamentali perché, in questo caso, l'ambiguità non risiede nella possibilità di interpretare il segno nel contesto dell'artefatto o in quello matematico e quindi la parola non può fungere da segno pivot. Si noti che si tratta di azioni non classificabili nelle categorie fornite dal quadro teorico (cfr sez. 5.3.4) dato che la finalità dell'insegnante non è nessuna di quelle considerate da Mariotti e Maracci (2010): viene in effetti selezionato un significato di un segno emerso nella discussione, come nella "Focalization", ma la selezione non avviene tra significati che si riferiscono all'artefatto e significati matematici.

10.1.4 Produzioni individuali successive: cosa è interiorizzato?

Terminata la discussione collettiva, vengono proposte agli studenti delle consegne individuali. L'insegnante richiede di colorare in rosso tutte le caselle che non hanno gemelle per poi usare uno stesso colore (diverso dal rosso) per ogni coppia di caselle gemelle presente nella tabella (Fig. 10.1.5). Una studentessa rivela difficoltà nello svolgere questa consegna e necessità dell'aiuto dell'insegnante per portarla a termine. Pertanto, al termine della discussione, l'abilità di determinare caselle gemelle fa parte almeno della zona di sviluppo prossimale della totalità degli studenti.

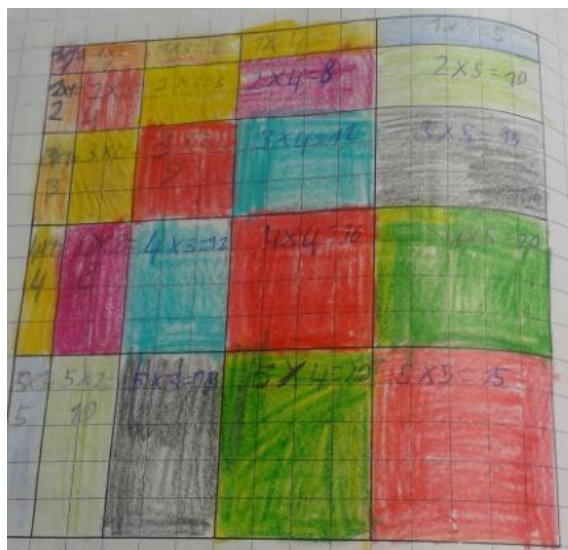


Fig. 10.1.5: Esempio di elaborato per la prima consegna data dopo la discussione collettiva.

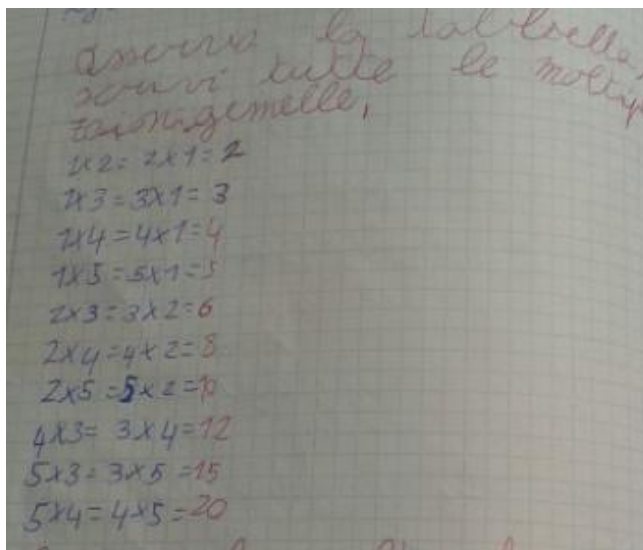


Fig. 10.1.6: Esempio di elaborato per la seconda consegna data dopo la discussione collettiva.

Terminata questa prima consegna l'insegnante chiede agli studenti di trascrivere, usando i simboli aritmetici, tutte le coppie di **"moltiplicazioni gemelle"**. Inoltre, fornendo un esempio, li invita a posizionare un uguale fra le due moltiplicazioni ottenute e a scrivere poi il risultato corrispondente a entrambe le moltiplicazioni (Fig. 10.1.6).

Quest'ultima consegna, attraverso l'esempio dato dall'insegnante, permette di passare a una rappresentazione simbolica scritta. Viene introdotto il simbolo di uguaglianza con una doppia funzione. In ciascuna delle scritture, il simbolo di uguaglianza tra le moltiplicazioni rappresenta l'equivalenza fra le due operazioni con i fattori invertiti; il secondo simbolo "=" (quello tra la seconda moltiplicazione e il risultato) indica il calcolo del risultato, pertanto ha una valenza più procedurale. Lo stesso può valere per l'uso dell'uguale che viene fatto nella consegna di colorazione (Fig. 10.1.5). Pertanto, complessivamente, sebbene venga introdotto l'uguale come simbolo relazionale, l'interpretazione procedurale fornisce la base per il significato della relazione..

Si noti che nella consegna data dall'insegnante per questa seconda attività individuale, la parola 'gemelle' viene utilizzata come aggettivo per le moltiplicazioni. Nel corso dell'intera discussione che ha preceduto l'attività (estratti 1-7), la parola gemelle è stata utilizzata per riferirsi alle caselle. La consegna scritta sui quaderni dei bambini invece recita "osserva la tabella, scrivi tutte le moltiplicazioni gemelle". L'insegnante quindi, intende sfruttare la corrispondenza fra caselle e moltiplicazioni per trasferire la proprietà di essere gemelle delle

caselle (che dipende da tutte le caratteristiche emerse nella discussione) alle moltiplicazioni a esse associate. La “gemellarità” fra moltiplicazioni viene indicata col simbolo di uguaglianza. In questo senso, la parola ‘gemelle’ funge da segno pivot per collegare l’attività svolta con l’artefatto ai segni matematici qui introdotti.

Evidenze a favore dell’interpretazione della “gemellarità” delle moltiplicazioni, espresse in forma simbolica scritta, come uguaglianza tra i risultati – ovvero dell’uso della proprietà commutativa come teorema in atto – si hanno da altre attività svolte dall’insegnante durante il resto dell’anno scolastico. In particolare, negli ultimi mesi dell’anno, l’insegnante ha chiesto agli studenti di fornire i risultati di alcune moltiplicazioni in una lunga lista al fine di fornire dei feedback sui risultati sbagliati. In diversi protocolli è possibile notare che quando compare un risultato scorretto, questo è riportato anche per la moltiplicazione che ha l’ordine dei fattori invertito: per esempio se 28 viene fornito come risultato di 9×3 , allora compare anche come risultato di 3×9 (Fig. 10.1.7).

$5 \times 1 = 5$	$1 \times 5 = 5$
$4 \times 3 = 12$	$3 \times 4 = 12$
$1 \times 9 = 9$	$9 \times 1 = 9$
$6 \times 4 = 24$	$4 \times 6 = 24$
$3 \times 1 = 3$	$1 \times 3 = 3$
$5 \times 9 = 45$	$9 \times 5 = 45$
$9 \times 3 = 28$	$3 \times 9 = 28$
$2 \times 5 = 10$	$5 \times 2 = 10$
$1 \times 5 = 5$	$5 \times 1 = 5$
$6 \times 2 = 12$	$2 \times 6 = 12$
$3 \times 9 = 28$	$9 \times 3 = 28$
$5 \times 2 = 10$	$2 \times 5 = 10$
$4 \times 9 = 36$	$9 \times 4 = 36$
$8 \times 5 = 40$	$5 \times 8 = 40$
$9 \times 2 = 18$	$2 \times 9 = 18$
$5 \times 4 = 20$	$4 \times 5 = 20$
$2 \times 10 = 20$	$10 \times 2 = 20$

$3 \times 7 = 21$
$5 \times 9 = 48$
$6 \times 3 = 18$
$4 \times 4 = 16$
$2 \times 3 = 6$
$5 \times 4 = 20$
$9 \times 7 = 43$
$3 \times 1 = 3$
$10 \times 5 = 50$
$7 \times 9 = 43$
$9 \times 0 = 0$
$8 \times 9 = 72$
$9 \times 5 = 48$
$7 \times 8 = 56$

Fig. 10.1.7: Esempi di calcoli con risultato scorretto ma consistenti con la proprietà commutativa. Elaborati di Sim e SofM.

10.1.5 Una catena semiotica: l’evoluzione del segno “gemelle”

Andando ad analizzare la discussione nel suo complesso, è possibile notare la frequente presenza di un segno ricorrente: il termine “gemelle” che cambia progressivamente di significato (Fig. 10.1.8).

Inizialmente il termine “gemelle” è utilizzato da un gruppetto di studenti per riferirsi alle specifiche caselle colorate durante l’attività con l’artefatto. Si tratta di quelle caselle a cui può essere sovrapposto esattamente un particolare rettangolo di cartoncino. Questo termine viene riutilizzato dall’insegnante per riferirsi genericamente a una generica coppia di caselle che potrebbero essere state colorate con lo stesso colore a seguito dell’attività col cartoncino (estratto 1, linea 5), anche se questa non viene realmente eseguita.

Attraverso i successivi interventi degli studenti e le focalizzazioni dell'insegnante, la parola si arricchisce di ulteriori significati: prima una casella può essere portata nella propria gemella con una rotazione (estratto 2), poi è possibile vedere una come il "riflesso" dell'altra in uno dei quadrati della diagonale principale che funge da "specchio" (estratti 3 e 4).

La richiesta dell'insegnante di ritornare alla seconda parte della consegna, ovvero di inserire dei numeri all'interno delle caselle (linea 63), permette di individuare le caselle gemelle come quelle caselle che hanno le stesse dimensioni e, di conseguenza, lo stesso numero di quadretti interni. Gestì deittici sono utilizzati per indicare le caselle mentre con le parole viene introdotto il termine 'moltiplicazioni' (linea 82). Nella discussione intervengono, attraverso il riferimento a particolari esempi, segni (matematici) dell'aritmetica, seppur espressi solo a parole (estratti 6 e 7).

Il collegamento con i simboli aritmetico-algebrici viene invece fatto dopo la discussione, solo attraverso una consegna in cui compare nuovamente uso del termine "gemelle" che da aggettivo per le caselle della tabella diventa aggettivo per le moltiplicazioni che vengono poi collegate dal simbolo di uguaglianza (Fig. 10.1.6). Nelle scritture alle quali si giunge al termine di questa catena, del tipo $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$, il simbolo di uguaglianza è suscettibile di interpretazioni diverse.

La prima interpretazione del simbolo di uguaglianza si riferisce alla "gemellarità" fra le moltiplicazioni, ovvero fra le caselle a esse corrispondenti. Il suo significato può esser associato alle diverse interpretazioni del termine 'gemelle', interpretazioni che sono emerse nella discussione e che sono arrivate fino all'idea di 'cambio dell'ordine', anche se quest'ultimo significato non sembra sia stato ancora consolidato. Le interpretazioni e le mutue relazioni costruite in successione sono riassunte nella figura 9.2.1.8.

La seconda interpretazione del simbolo di uguaglianza riporta all'aspetto procedurale e si riferisce all'uguaglianza dei risultati delle due moltiplicazioni gemelle. Pertanto, l'equivalenza fra le due moltiplicazioni viene rapportata al fatto di avere lo stesso risultato.

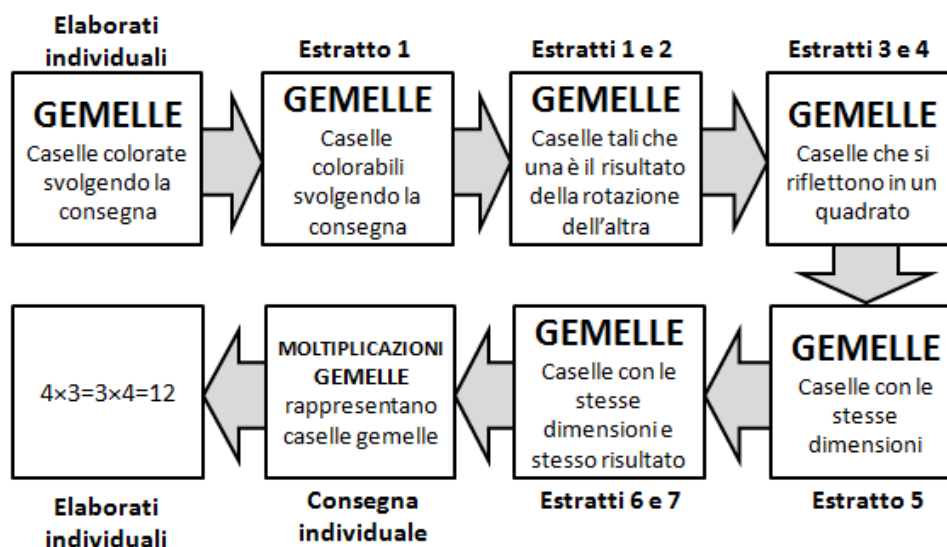


Fig. 10.1.8: Schematizzazione della catena semiotica che collega la consegna di colorazione delle caselle simmetriche alla scrittura simbolica dell'equivalenza fra moltiplicazioni con fattori invertiti.

10.2 Proprietà distributiva nella classe seconda

Nell'analisi del potenziale semiotico della tavola di Laisant (cap.7) si è messa in evidenza la possibilità di collegare alcuni compiti di composizione e scomposizione di rettangoli alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla somma.

In particolare, sono state progettate due consegne, entrambe descritte nella sezione 7.3, che agli occhi dell'esperto possono essere rispettivamente associate alla proprietà distributiva come trasformazione della somma di due prodotti in un prodotto, e alla proprietà distributiva come scomposizione di un prodotto nella somma di altri due.

Nella sezione 10.2.1 si analizza l'evoluzione dei segni e l'attività dell'insegnante relative alla consegna di composizione. Nella sezione 10.2.2 si analizza l'attività che segue alla consegna di scomposizione.

10.2.1 Distributività come composizione⁵⁷

L'analisi che segue si riferisce alle attività descritte nella sezione 7.3, in particolare, la consegna proposta agli studenti consiste nel colorare due caselle della tabella che si trovano nella stessa riga per poi individuare le moltiplicazioni a cui corrispondono. Si chiede quindi di ritagliare due cartoncini delle stesse dimensioni delle caselle colorate, incollarli in modo che formino un unico rettangolo e quindi andare a cercare nella tabella una casella a cui questo rettangolo di cartoncino si sovrapponga esattamente. Ciascuno studente svolge questa consegna individualmente.

Successivamente, gli studenti vengono divisi in piccoli gruppi. Si chiede ad ogni gruppo di mettere in evidenza le somiglianze fra i rettangoli colorati da ciascuno degli studenti di cui il gruppo è composto.

Già nell'attività in piccoli gruppi emerge il fatto che alcuni bambini non sono riusciti a trovare nella tavola di Laisant di dimensioni 5×5 la casella corrispondente al proprio rettangolo di cartoncino. Per esempio, lo si può notare nell'estratto trascritto di seguito: uno scambio tra la maestra (M) e due bambini che fanno parte di uno stesso gruppo (Zen e Gin) nel quale interviene anche il ricercatore (R).

M: Ma l'hai trovata una mattonella grande come codesta?

Zen: No.

M: Perché no? Prova a girarla [Zen sposta il proprio cartoncino di dimensioni 6×2 alla ricerca della casella corrispondente senza successo, Fig. 10.2.1.1]. Come possiamo fare? Troviamo un'altra soluzione, proviamo a pensarci.

Gin: Non si può fare perché non è fino al dieci. [...]

R: Gin che cos'è che stavi dicendo? Non si trova perché...

⁵⁷ L'analisi qui proposta consiste in una rielaborazione di quelle già pubblicate in (Maffia & Mariotti, 2016) e in (Maffia & Mariotti, 2015).

Gin: Perché non arriva al dieci. Se c'era fino all'otto [prende il suo cartoncino che ha dimensioni 8×3] ci stava.

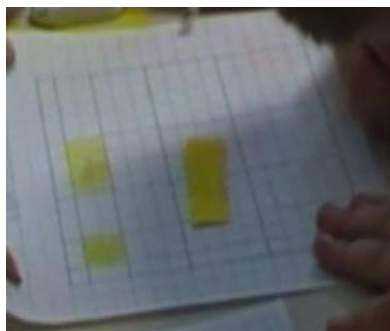


Fig. 10.2.1.1: Elaborato individuale di Zen prima della discussione.

10.2.1.1 Rappresentare la somma di due prodotti: l'emergere di segni ibridi

All'inizio della discussione, l'insegnante invita gli studenti a riportare quanto emerso nel momento di lavoro in gruppo. Sin da subito, diversi fra gli studenti che non hanno trovato la casella corrispondente alla somma di quelle inizialmente colorate da loro, chiedono di poter provare a cercare tale casella all'interno della tavola 10×10 che si trova su un cartellone appeso alla parete della classe.

Dopo che alcuni hanno trovato la propria casella, Lor alza la mano per fare un'osservazione personale. Viene invitato dall'insegnante ad alzarsi e andare al cartellone:

Estratto 8			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
1	Lor: Che quando due mattonelle sono lontane [mette la mano sul cartellone] puoi calcolare il risultato e poi lo sai [mette la mano nella stessa zona del cartellone].	Mattonelle è un segno artefatto già condiviso dalla classe e si riferisce alle caselle della tavola Calcolare il risultato è un segno matematico di interpretazione ambigua: può riferirsi sia ai risultati delle moltiplicazioni sia alla somma dei loro risultati La frase è ibrida, contiene sia segni artefatto sia matematici	
2	R: E come fai a calcolarlo il risultato ?	Ripetendo la frase "calcolare il risultato" sembra richiedere una specificazione sul significato di questa espressione	Focalization Fa eco alla parole del bambino
3	Lor: Fra questi due [indica due caselle nella quarta riga] fai 9×4 fa 36 [indica la casella 4×9] più 20 [indica la casella 4×5] fa 56 .	Riferendosi esplicitamente a Lor e all'esempio da lui proposto l'insegnante fornisce una riformulazione dove "Fra questi (+ gesto) fai" è sostituito con un generico "il risultato di due	Provide a synthesis La riformulazione proposta dall'insegnante è anche una interpretazione della frase ibrida appena formulata da Lor.

		mattonelle” Si tratta di frasi ibride in cui si richiama l’artefatto attraverso il segno artefatto “mattonelle” ma si chiama in gioco il contesto matematico con termini come “risultato” e “addizione”. Il riferimento all’addizione sembra dare per implicito che con il termine “risultato” ci si riferisca a un numero e che l’operazione di addizione è fra due numeri che sono “il risultato di due mattonelle”. Tuttavia il gesto richiama l’azione con i cartoncini.	Anche se con riferimento a quanto detto dal bambino, fornisce un’interpretazione più generale di quanto riportato da Lor attraverso un singolo esempio L’azione di sintesi ed in particolare la generalizzazione è attuata verbalmente usando sia termini generici, che gesti, anch’essi generici. La combinazione dei termini e dei gesti sembra particolarmente efficace perché nel processo di generalizzazione non si perda il significato, che resta solidamente ancorato all’artefatto mediante il gesto.
4	R: [...] Lor mi ha fatto un esempio e mi ha detto che se si conosce il risultato di due mattonelle si può scoprire quello di un’altra. Io ho capito così, poi mi dici se ho capito bene. Te mi hai detto che se io so il risultato di due mattonelle [indica due caselle immaginarie nell’aria, Fig. 10.2.1.2a] posso fare l’addizione [avvicina le dita, Fig. 10.2.1.2b]. Vero?	Riferendosi esplicitamente a Lor e all’esempio da lui proposto l’insegnante fornisce una riformulazione dove “Fra questi (+ gesto) fai” è sostituito con un generico “il risultato di due mattonelle” Si tratta di frasi ibride in cui si richiama l’artefatto attraverso il segno artefatto “mattonelle” ma si chiama in gioco il contesto matematico con termini come “risultato” e “addizione”. Il riferimento all’addizione sembra dare per implicito che con il termine “risultato” ci si riferisca a un numero e che l’operazione di addizione è fra due numeri che sono “il risultato di due mattonelle”. Tuttavia il gesto richiama l’azione con i cartoncini.	Provide a synthesis La riformulazione proposta dall’insegnante è anche una interpretazione della frase ibrida appena formulata da Lor Anche se con riferimento a quanto detto dal ragazzo, fornisce un’interpretazione più generale di quanto riportato da Lor attraverso un singolo esempio L’azione di sintesi ed in particolare la generalizzazione è attuata verbalmente usando sia termini generici, che gesti, anch’essi generici. La combinazione dei termini e dei gesti sembra particolarmente efficace perché nel processo di generalizzazione non si perda il significato, che resta solidamente ancorato all’artefatto mediante il gesto.

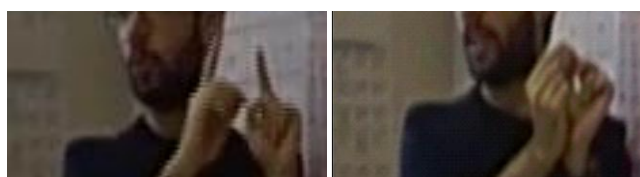


Fig. 10.2.1.2: Gesti dell’insegnante mentre ripete l’affermazione di Lor.

Evoluzione dei segni Lor dà avvio alla discussione interpretando lo scopo dell'attività proposta come riconducibile a quello di calcolare un risultato (linea 1); in particolare si riferisce alla somma dei risultati di due moltiplicazioni che si trovano nella stessa riga (linea 3) e lo fa portando un esempio che non può essere quello ottenuto nella precedente attività individuale dato che i fattori coinvolti sono maggiori di 5. Pertanto le frasi di Lor (linee 1 e 3) possono essere considerate esempi generici, anche se non ancora generalizzazioni. Sono frasi ibride in cui viene fatto riferimento alle 'mattonelle', ovvero le caselle, della tavola e anche ai risultati delle moltiplicazioni a esse corrispondenti e che sono combinate attraverso una somma. Non vi è però un riferimento diretto all'uso del cartoncino proposto nella consegna.

Tale riferimento viene introdotto da parte dell'insegnante ma solo attraverso la comunicazione non verbale. Di fatto, gli interventi dell'insegnante (linee 2 e 4) sono frasi ibride in cui si parla ancora di mattonelle e di risultati, ma i gesti sembrano riferirsi all'operazione di prendere/tagliare dei cartoncini (Fig. 10.2.1.2a) per poi incollarli insieme (Fig. 10.2.1.2b).

Ruolo dell'insegnante L'insegnante nel fornire una sintesi, rielabora l'affermazione iniziale del bambino generalizzandola e interpretando il calcolo (l'addizione fra moltiplicazioni) come combinazione di rettangoli. Nella linea 2 usa termini matematici come "addizione" e "risultati" ma mescolandoli con parole che richiamano l'uso dell'artefatto, come "mattonelle". Allo stesso modo, nella linea 4 interpreta quanto affermato da Lor sostituendo i riferimenti all'esempio specifico con termini più generali. Forse consapevole del fatto che non tutti gli allievi hanno seguito la generalizzazione, e allo scopo di coinvolgere tutti nella discussione, l'insegnante decide di rilanciare la discussione (nell'estratto 9) proponendo un esempio più semplice rispetto a quello scelto precedentemente da Lor (che riguardava numeri maggiori di 5) :

Estratto 9			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
5	R: Proviamo a fare un esempio perché forse non tutti sono riusciti a vedere quello che faceva Lor. [...] Se io prendo la mattonella 2×3 [disegna un rettangolo alto 2 e largo 3 ⁵⁸ , scrive dentro 2×3 come mostrato in Fig. 10.2.1.3a]. Siete d'accordo che questa è la mattonella 2×3?	"Mattonella" ritorna come segno artefatto ma viene messo in collegamento con due diverse rappresentazioni: L'utilizzo del segno matematico "2×3" come nome per la mattonella collega la casella con la moltiplicazione corrispondente Il segno grafico consiste in un rettangolo che contiene il segno matematico. L'utilizzo di "questa" in riferimento al rettangolo disegnato alla lavagna	Provide a synthesis Vengono scelte due moltiplicazioni che potrebbero essere fra quelle colorate in partenza dai bambini per iniziare a fare una sintesi di quanto può emergere dall'attività L'esempio viene scelto per funzionare da esempio generico

⁵⁸ Si ricordi che, anche se nelle fotografie non è sempre evidente, la lavagna è quadrettata e i rettangoli sono disegnati in modo che le misure in "quadretti della lavagna" corrispondano a quelle dei quadretti sul foglio. Tuttavia, i bambini seduti nei banchi più lontani dalla lavagna hanno sicuramente difficoltà a vedere la quadrettatura.

		collega la parola mattonella a un generico rettangolo che potrebbe rappresentare sia la casella sia il cartoncino usato durante l'attività	
6	Coro: Sì!		
7	R: E ci metto insieme la mattonella 2×4 [disegna il rettangolo con la stessa altezza e largo 4 affiancato al precedente, scrive 2×4] questo qui è grande come quale mattonella... messo tutto insieme?	Il riferimento all'addizione fatto precedentemente alla linea 4 è qui sostituito con un generico "metto insieme" che può far riferimento sia all'incollaggio dei rettangoli sia alla somma dei risultati delle moltiplicazioni. "Metto insieme" ha quindi la potenzialità di essere usato come segno pivot.	Provide a synthesis Viene completata la consegna di mettere insieme i due rettangoli, stavolta però non è svolta con i cartoncini ma su una rappresentazione grafica in cui si dice che i rettangoli rappresentino le mattonelle della tavola ma vengono utilizzati come se fossero i pezzi di cartoncino.

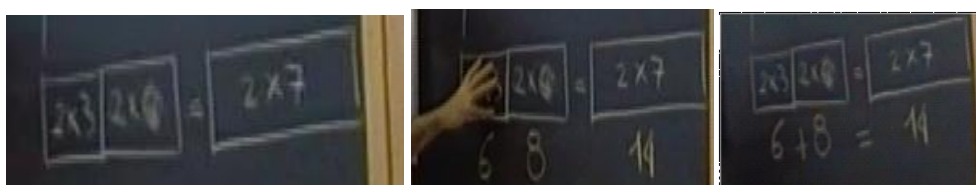


Fig. 10.2.1.3: Segni grafici disegnati dall'insegnante sulla lavagna.

Evoluzione dei segni L'insegnante torna a usare segni artefatto come "mattonella" e "metto insieme" ma introduce una nuova rappresentazione grafica in cui compaiono rettangoli con scritte dentro le operazioni: si tratta di un sistema semiotico misto che richiama i cartoncini usati dagli studenti e le caselle (segni artefatto) ma anche le operazioni (segni matematici). I segni grafici sulla lavagna sono legati sia al contesto dell'artefatto sia a quello matematico. Hanno la funzione di collegare segni artefatto e matematici e sono quindi nel loro complesso dei segni pivot.

Ruolo dell'insegnante Dato che la discussione è iniziata con un intervento di uno studente a cui non hanno fatto seguito interventi di altri, l'insegnante ripete un'attività simile a quella svolta dai bambini con i cartoncini. L'esempio viene scelto in modo da simulare la situazione maggiormente diffusa nella classe: dall'unione di due caselle con entrambe le dimensioni minor di 5, se ne ottiene una con una dimensione maggiore di tale numero. Viene fatta inoltre la scelta di non ripetere effettivamente l'attività ma di rappresentarla alla lavagna riportandone, in un unico disegno, la partenza e l'esito.

Estratto 10			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
8	Sim: Fa quattordici	Si riferisce al numero complessivo di quadretti contenuti nei due rettangoli che vengono uniti	

9	R: L' altezza quant'è intanto?	Altezza È un segno artefatto che si riferisce ai rettangoli disegnati ma ha la potenzialità di essere messo in relazione con il fattore in comune fra le moltiplicazioni	Focalization Sim ha già fornito il risultato della moltiplicazione che corrisponde al rettangolo che si otterrà dall'unione. L'insegnante non lo asseconda subito ma, volendo tornare a esplicitare le relazioni fra le dimensioni dei rettangoli (ovvero i fattori delle moltiplicazioni), focalizza sulla dimensione comune.
10	Sim: Due	"altezza" viene associato ad un numero in risposta alla domanda "quanto è?"	
11	Lor: Due! Due per sette! Due per sette!	Lor individua la moltiplicazione corrispondente al rettangolo "risultato".	
12	R: Quindi questa è uguale [scrive il simbolo uguale] alla mattonella che ha [traccia un segmento verticale di due quadretti oltre il simbolo di uguaglianza] altezza due ed è lunga [traccia una linea orizzontale nell'aria] quanto?	Il segno combinato, grafico e vocale ("uguale" e "=") sembra riferirsi alle caselle o ai cartoncini (come somiglianza, congruenza); ma, con la scrittura del simbolo "=" c'è un tentativo di collegamento con segni matematici. La coppia data da parola e segno grafico ('uguale'/=) è un segno pivot. Altezza e lunghezza sono segni artefatto, si riferiscono alla mattonella e alle sue dimensioni, all'orizzontale (base) e alla verticale (altezza). In questo modo hanno il potenziale di riferirsi ai fattori del prodotto.	Provide a synthesis Viene fornita la soluzione per la consegna di incollare i due cartoncini, ma lo si fa attraverso una rappresentazione degli oggetti concreti (cartoncini e tabella) attraverso segni grafici ibridi, disegnati alla lavagna, segni che proprio per la loro natura ibrida sono potenzialmente riconducibili sia all'uso dell'artefatto che alla matematica, sono segni pivot. Come si vedrà dopo l'introduzione di questi segni pivot ha un ruolo chiave nell'evoluzione dei segni.
13	Lor: Sette!	"larghezza" viene associato a un numero	
14	Coro: Sette!	Lor individua per primo la lunghezza del rettangolo "risultato" che però non è ancora disegnato alla lavagna. La classe lo segue.	
15	R: [completa il rettangolo di altezza 2 e lunghezza 7 e scrive dentro il prodotto 2×7] Proviamo a vedere cosa succede ai risultati ? Allora: mi avete detto che questa qua	"Risultati" faceva parte delle indicazioni del task e era stata usata da Lor (linea 1). La parola risultati viene	Apparentemente l'insegnante continua nell'elaborazione dell'intervento iniziale di Lor (si veda linea 4)

	[indica la casella a destra dell'uguale] c'ha quattordici quadretti . Vero?	messa in relazione con i quadretti della mattonella. Si torna al contesto dell'artefatto creando così un discorso ibrido in cui le parole "quanti /avere quadretti" e "risultato" sono utilizzate come interscambiabili	
16	Coro: Sì		
17	R: [scrive, col gesso giallo, il numero 14 sotto la casella a destra dell'uguale] E quest'altra [indica la prima delle due caselle a sinistra dell'uguale] invece quanti ne aveva?	Il colore giallo del segno sembra poter rappresentare la distinzione tra i numeri che sono fattori e i numeri che sono risultati. Questo permette di focalizzare sul diverso "status" dei numeri all'interno delle scritture matematiche Si parla di "questa" al femminile, si sta quindi parlando di mattonelle	Nell'elaborare la sintesi si inverte il processo: mentre nella soluzione del task originale si lavora prima sulle caselle di partenza e poi sul cartoncino ottenuto, qua viene fatto un lavoro a ritroso Focalization sul ruolo diverso dei numeri nelle scritture matematiche
18	Coro: Sei!	"quanti quadretti" viene associato ad un numero	
19	Sim: Sei		
20	R: [scrive il numero 6 in giallo sotto la casella corrispondente] E questa? [indica la seconda casella delle due a sinistra dell'uguale]	Si parla ancora di "questa" al femminile, si sta quindi parlando di mattonelle	
21	Coro: Otto!		
22	R: [scrive il numero 8 sotto la casella]	In questo modo la casella viene associata al numero di quadretti che la compongono.	
23	Lor: Fa quattordici!	Lor individua da subito una relazione operativa fra i numeri. Lo si deduce dall'uso del verbo "fare". Tuttavia non esplicita il tipo di operazione	
24	R: Allora, che cosa succede se le metto insieme [percorre il perimetro delle caselle di sinistra col dito]	Riprende il segno artefatto "metto insieme" già precedentemente (linea 7) utilizzato per riferirsi all'operazione di unione delle caselle ma con riferimento ai risultati / quadretti.	Interpretazione delle parole della consegna alla luce del processo e della sua rielaborazione nella sintesi proposta Qui viene usata la parola metto insieme che si riferisce al compito, ma in realtà l'operazione di unione dei cartoncini non è stata eseguita di nuovo, ma è stata reinterpretata. Qui infatti si rilegge la consegna come mettere insieme i

			risultati (o i quadretti)
25	Sar: Sei per otto uguale quattordici	Sembra che qui la bambina stia in qualche modo cercando di completare la frase matematica scritta alla lavagna (figura 10.2.1.3b) usando un template noto, in questo caso però scorretto dal punto di vista matematico (mancanza di controllo sulla semantica)	
26	R: Allora, se io metto insieme i quadrati di questo [indica con tutta la mano la prima casella a sinistra dell'uguale, Fig. 10.2.1.3b]	Il segno che finora è stato usato per riferirsi all'unione delle due caselle viene usato per parlare esplicitamente di un'operazione sui quadretti contenuti in una casella. I numeri scritti in giallo sono le risposte fornite alla domanda "quanti quadretti?" quindi sembra si stia cercando di creare un collegamento fra le due cose: "metto insieme" viene usato come segno pivot	Sembra stia chiedendo / offrendo una sintesi interpretando le parole della bambina ma la frase viene interrotta.
27	Sim: Ma che sei per otto uguale quattordici Sar?! Sei più otto quattordici!	Seguendo il processo di trascrizione matematica, ma notando l'errore della compagna, lo corregge usando i numeri presenti alla lavagna ma collegandoli con la relazione aritmetica che li lega.	
28	Lor: Sei più otto perché fai tutto	"Tutto" Sembra riferirsi all'idea di calcolare una somma. Potrebbe essere un richiamo alle parole chiave spesso usate nella tradizione didattica: "in tutto" corrisponde all'addizione	

Evoluzione dei segni In questa parte di discussione ritornano alcuni dei segni usati precedentemente. In particolare la parola 'risultato' inizialmente impiegata da Lor (linea 1) viene richiamata alternandone l'uso a 'quadretti'. Vengono a crearsi frasi ibride in cui questi termini appaiono come interscambiabili. In particolare, quando viene chiesto ai bambini di determinare il numero di quadretti che si trovano nelle caselle disegnate alla lavagna (linee 17 e 20), loro rispondono rapidamente (linee 18, 19 e 21) e nessuno si alza per contare i quadretti alla lavagna. Pertanto appare plausibile che gli studenti abbiano determinato il

numero di quadretti calcolando il risultato della moltiplicazione scritta all'interno dei rettangoli disegnati. In conclusione, i segni 'quadretti' e 'quadratini' che si riferiscono al contesto dell'artefatto, sono qui usati per parlare dei risultati delle moltiplicazioni. Si tratta di segni pivot che nel lungo processo di elaborazione di una sintesi portato avanti nella discussione, sembrano aver funzionato per arrivare a rappresentare il mettere insieme cartoncini attraverso diverse scritture, tra loro coordinate sulla base delle diverse interpretazioni della stessa azione, quella appunto di mettere insieme.

Il segno artefatto 'mettere insieme' era stato usato precedentemente per riferirsi all'unione dei due rettangoli (linea 7) mentre in questa parte di discussione è utilizzato in riferimento ai quadratini (linea 26). Sim e Lor lo interpretano in termini di addizione. Sar invece parla di una moltiplicazione fra i due numeri. In ogni caso sembra che la scrittura riportata alla lavagna, ovvero 6_8_14 abbia avuto il potere di richiamare per Sar e per i suoi compagni l'usuale "template" di una espressione aritmetica. La scelta dell'espressione corretta, dipende dal significato che ad essa si assegna e non solo dalla sua struttura; per Sar 6_8_14 richiama l'usuale "template" di una operazione aritmetica e, dato che si sta parlando di moltiplicazioni, suggerisce di riempire gli spazi mancanti con una relazione moltiplicativa; per Sim e Lor invece rappresenta la relazione additiva tra le basi dei due rettangoli uniti.

Ruolo dell'insegnante All'inizio della discussione, Sim ha già individuato il risultato della somma dei risultati delle due moltiplicazioni di partenza (linea 8). L'insegnante tuttavia non dà un feedback immediato rispetto a questo risultato ma chiede agli studenti di analizzare i rettangoli riportandoli alla consegna. Probabilmente, desidera mettere in evidenza la relazione fra le dimensioni dei rettangoli (fattori delle moltiplicazioni) e quadretti in essi contenuti (risultati).

Dal punto di vista del processo di mediazione semiotica, l'insegnante fa una scelta rilevante: inserisce il simbolo di uguaglianza nel discorso (linea 12). Il segno grafico viene inserito mentre la parla "uguale" viene detta a voce, con riferimento alle caselle o ai cartoncini (interpretabile come somiglianza, congruenza); ma, con la scrittura del simbolo "=" rappresenta un tentativo di collegamento con segni matematici. La coppia data da parola e segno grafico ('uguale'; =) rappresenta un collegamento tra il contesto dell'artefatto e quello matematico: è un segno pivot.

Il simbolo di uguaglianza scritto potrebbe essere interpretato in modo procedurale: a sinistra dell'uguale si trovano i termini su cui l'operazione di "incollaggio" agisce mentre a destra del simbolo c'è il risultato di tale operazione. D'altro canto, il disegno nel suo complesso rappresenta una messa in relazione fra delle operazioni e non fra i loro risultati.

Tuttavia, negli ultimi interventi (linee 24 e 26) l'insegnante non richiama più le dimensioni ma solo i risultati; il focus torna sugli aspetti più procedurali e sull'interpretazione del segno "metto insieme".

Estratto 11			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
29	R: Allora, quando io metto insieme i quadrantini di questa mattonella	Tornano i segni artefatto "metto insieme"	Provide a synthesis

	[indica il primo rettangolo] e di questa mattonella [indica il secondo] mi vengono fuori i quadrati [indica il rettangolo a destra dell'uguale] di tutta questa mattonella . Vero?	"quadrati" "mattonella" Anche qui "metto insieme" si riferisce ai quadrati e non alle mattonelle	
30	GaD: È vero!		
31	R: Mettere insieme a che operazione corrisponde?	Operazione segno pivot mettere insieme è una operazione concreta, ma si riferisce anche all'operazione matematica di somma	Ask for a synthesis Uso di un segno pivot
32	Coro: Sei più otto!	"Sei più otto" segno matematico	
33	MAB: Che fa quattordici.	Focus procedurale	
34	R: [scrive + fra 6 e 8 e = fra 8 e 14, Fig. 10.2.1.3c] Allora, questo che vuol dire? Che se conosco i risultati di due mattonelle piccole [indica i rettangoli a sinistra dell'uguale] le posso mettere insieme [indica 6 e 8] e scopro che cosa? [indica il 14] il risultato ...	La scrittura in giallo alla lavagna è un Segno matematico "Questo" è riferito in modo generico ai segni coinvolti. Si ha una scrittura ibrida che, nel suo insieme, mette in relazione segni artefatto (i rettangoli) e segni matematici Segno pivot La parola "quadrati" è sostituita da "risultati". Mettere insieme si riferisce alle mattonelle (le posso mettere insieme)	Ask for a synthesis Buona parte della frase è fornita dall'insegnante che quindi sta fornendo quasi tutta la sintesi. Viene però richiesto di completare la frase
35	Coro: Di una mattonella !	La parola "risultato" detta dall'insegnante viene associata alla mattonella. Completando le parole dell'insegnante con quelle degli studenti si ha una frase ibrida "il risultato di una mattonella" in cui il segno artefatto 'mattonella' può essere sostituito dal segno matematico 'moltiplicazione'. Funge da segno pivot	
36	R: Ha la stessa altezza e questa... [indica la larghezza dei due rettangoli affiancati]	Qui torna il focus sulle dimensioni. Il fatto che l'altezza sia la stessa (corrispondente a un fattore in comune nelle moltiplicazioni) è detto solo dall'insegnante	Provide a synthesis
37	Sim: È larga per tutte e due .		
38	R: È larga come tutt'e due . Siete tutti	Ripete le parole del bambino che fanno	Focalization

	d'accordo con questa cosa?	riferimento soprattutto all'artefatto. Non viene esplicitata in termini matematici la relazione additiva fra le basi dei rettangoli	Fa eco alle parole del bambino
39	Coro: Sì!		

Evoluzione dei segni In questa parte della discussione le parole “mettere insieme” sono messe in relazione, con l'addizione dei risultati delle moltiplicazioni attraverso una catena semiotica costruita sotto la guida dell'insegnante. Il riferimento esplicito è alla combinazione dei rettangoli. Come suggerito dai bambini, l'insegnante inserisce il segno matematico “+” nel discorso (linea 34). Si noti che le relazioni fra i diversi rettangoli comparsi nell'attività e il simbolismo usato per rappresentarli, sono costruite attraverso un complesso sistema di riferimenti incrociati tra parole (segni artefatto), gesti ed espressioni deittiche (segni pivot) e parole e simboli matematici (segni matematici); alla fine, quanto appare scritto sulla lavagna fa riferimento allo stesso tempo ai rettangoli di cartoncino e alla operazioni concrete con essi, ma anche alle operazioni matematiche evocate dei segni matematici che compaiono.

Attraverso le diverse rappresentazioni il significato dell'azione di “mettere insieme” viene reinterpretato mettendo in evidenza – ovvero focalizzando – su aspetti diversi per arrivare dal significato di “prodotto tra dimensioni e combinazioni di queste”, all'aspetto “quantità dei quadretti e combinazioni di questi”, all'aspetto “risultati e combinazioni di questi”.

Ciascuna rappresentazione costituisce un mezzo per focalizzare aspetti diversi; come dice Eco: “Il segno non rappresenta la totalità dell'oggetto – ma per via di astrazioni diverse – lo rappresenta *da un certo punto di vista o ai fini di un certo uso pratico*” (Eco, 1973, p. 27).

Sulla lavagna si trova una rappresentazione mista (Fig. 10.2.1.4) che rappresenta da una parte le operazioni svolte con i cartoncini, rappresentati attraverso i rettangoli disegnati; d'altra parte, il simbolismo matematico permette sia di associare a ogni rettangolo una moltiplicazione sia di esplicitare la relazione additiva fra i risultati delle moltiplicazioni coinvolte (rappresentata in giallo). Il simbolo di uguaglianza è suscettibile di una doppia interpretazione: nella prima riga (in bianco) indica il risultato dell'operazione di incollaggio e contemporaneamente la relazione fra le moltiplicazioni. Nella riga in giallo rappresenta l'equivalenza fra la somma dei risultati delle prime due moltiplicazioni e quello della seconda; quasi fosse un secondo passo nella soluzione di un'espressione che è rappresentata soltanto per mezzo dei rettangoli nella prima riga.

Una scritta in questo sistema rappresentativo è più che un segno pivot, perché la sua complessità e ambivalenza è accessibile agli allievi che hanno partecipato alla sua costruzione.

Si tratta di una sorta di *Stele di Rosetta* che esplicita la relazione fra le due righe di testo e invita a tradurre i segni artefatto in segni matematici. Perciò può divenire una risorsa particolarmente efficace per dispiegare il potenziale semiotico dell'artefatto. Come vedremo nella prossima sezione, la sua progressiva trasformazione in una stringa di simboli matematici

dà conto dell'evoluzione che porta dai segni artefatto ai segni matematici, tessendo i significati relativi al contesto delle mattonelle con i nuovi significati matematici che si intende costruire.

$$\begin{array}{c} \boxed{2 \times 3} \quad \boxed{2 \times 4} = \boxed{2 \times 7} \\ 6 \quad + \quad 8 \quad = \quad 14 \end{array}$$

Fig. 10.2.1.4: Riproduzione dei segni grafici che si trovano sulla lavagna.

Ruolo dell'insegnante Nel corso di questi ultimi interventi, l'insegnante cerca di giungere a una sintesi di quanto sta emergendo nella discussione, e lo fa cercando di coinvolgere gli allievi nella sua elaborazione. In particolare richiama segni artefatto emersi precedentemente per metterli in relazione con i segni matematici emergenti, in questo modo agiscono da segni pivot (linee 29 e 31).

Inoltre, cerca di spostare il focus dai soli risultati alle relazioni che legano i fattori delle moltiplicazioni (linee 36-38). Cerca quindi di promuovere un approccio relazionale, ma si deve notare che la relazione additiva fra i risultati delle moltiplicazioni (ovvero i quadretti nei rettangoli) viene esplicitata mentre quella fra i fattori non in comune (ovvero le basi dei rettangoli) non è espressa parole ed è rappresentata unicamente nel disegno e per questo resta implicita.

10.2.1.2 Produzione individuale di segni: verso le espressioni aritmetiche

Terminata la discussione, viene chiesto ai bambini di produrre altri esempi a piacere. In altri termini, a partire dal tipo di rappresentazione emersa nella discussione, si chiede di elaborare testi che rimandino a possibili composizioni tra mattonelle. Tutti i testi prodotti sono formati da due righe: la prima è composta di segni ibridi, mentre la seconda è costituita da simboli matematici (Fig. 10.2.1.5).

Evoluzione dei segni Quattro bambini trasformano il disegno inserendo il simbolo “+” fra i rettangoli (Fig. 10.2.1.6) creando un'ulteriore ibridazione. Nel corso della discussione precedente, è stato fatto spesso riferimento all'operazione “metto insieme” come operazione fra i rettangoli. Tale segno artefatto è stato poi messo in relazione con l'operazione di addizione. Pertanto, la rappresentazione in cui il segno + si inserisce fra i due rettangoli può essere considerata come un arricchimento della catena semiotica che ha visto l'attività di incollaggio dei rettangoli come punto di partenza, prosegue attraverso l'uso di “metto insieme” per riferirsi prima ai rettangoli e poi i quadretti per poi essere sostituita dal simbolo di addizione. Il ritorno alla giustapposizione dei rettangoli/cartoncini è messo in relazione con la somma che compare nell'espressione aritmetica e quindi la relazione interpretativa a diviene bidirezionale: giustapposizione ↔ somma.

$$3 \times 4 \quad 3 \times 5 \quad 3 \times 9$$

$$12 + 15 = 27$$

Fig. 10.2.1.5: Segni prodotti da Fra dopo la discussione.

$$\begin{array}{c} 3 \times 3 \\ 9 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \times 1 \\ 3 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \times 4 \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 3 \times 4 \\ 12 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \times 3 \\ 9 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \times 7 \\ 21 \end{array}$$

Fig. 10.2.1.6: Segni prodotti da MALb e Sar dopo la discussione.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante decide di focalizzare l'attenzione degli allievi su tali segni e ne promuove la condivisione: nei giorni successivi chiede agli studenti di dare altri esempi usando la rappresentazione col segno "+" fra i rettangoli.

Dopo un paio di giorni la maestra propone una variazione: dà un esempio scrivendolo alla lavagna e chiede ai bambini di copiarlo sul quaderno (Fig. 10.2.1.7a) per poi inventarne ulteriori a piacere. In questa nuova rappresentazione compare, in cima, una terza riga che condensa quelle riportate sotto: ogni rettangolo è messo in relazione con il prodotto delle sue dimensioni, l'operazione di unione dei rettangoli è messa in relazione alla somma di moltiplicazioni e una moltiplicazione compare come risultato di questa prima operazione. Successivamente, viene riportato il simbolo di uguaglianza e poi il risultato nella forma di un unico numero. Pertanto anche in questa rappresentazione il simbolo di uguaglianza è suscettibile sia di un'interpretazione relazionale (uguale tra rettangoli) sia procedurale (uguale tra la moltiplicazione e il suo risultato).

Fornendo questo esempio l'insegnante dà una "traduzione" alternativa sia del testo composto di segni artefatto sia dell'operazione di addizione tra i risultati. In questa fase, però, solo alcuni ragazzi producono esempi personali usando anche l'espressione simbolica che rappresenta la somma dei prodotti senza rettangoli (Fig. 10.2.1.7b).

$$\begin{array}{l} \text{esempio} \\ 3 \times 3 + 3 \times 5 = 3 \times 12 = 36 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \times 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \times 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 3 \times 12 \\ \hline \end{array} \\ 27 + 15 = 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \times 7 + 6 \times 4 = 6 \times 11 = 66 \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 6 \times 7 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 6 \times 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 6 \times 11 \\ \hline \end{array} \\ 42 + 24 = 66 \end{array}$$

Fig. 10.2.1.7: L'esempio dell'insegnante copiato da Mir sul quaderno e produzione personale di Lor.

10.2.1.3 La somma di due prodotti: tre catene semiotiche

A partire dalla consegna di "incollaggio" di rettangoli di cartoncino, si è avviato un graduale processo di appropriazione della rappresentazione simbolica scritta della proprietà distributiva attraverso l'uso di espressioni aritmetiche. I bambini lavorano inizialmente con i cartoncini che nel corso della prima discussione matematica sono rappresentati

dall'insegnante come rettangoli affiancati disegnati sulla lavagna. Gli studenti si appropriano di tale rappresentazione e la personalizzano creando ibridazioni fra i segni artefatto e quelli matematici. L'insegnante, rilevando la potenzialità di particolari rappresentazioni le sfrutta come segno pivot promuovendone l'uso in consegne individuali.

Complessivamente, a partire dall'attività con l'artefatto fino alle consegne individuali che seguono la discussione, possono essere evidenziate tre diverse catene semiotiche che convergono nelle rappresentazioni sui quaderni dei bambini (Fig. 10.2.1.7).

1. Il segno artefatto 'mattonelle' è sin dall'inizio condiviso dalla classe per riferirsi sia alle caselle della tavola di Laisant, sia ai rettangoli di cartoncino realizzati. L'insegnante si riferisce alle mattonelle identificandole con le loro dimensioni, viene detto, per esempio, "la mattonella due per tre" (linea 5 e linea 7). Nella rappresentazione grafica alla lavagna, la parola 'mattonella' viene associata ai rettangoli disegnati, nei quali vengono scritte le moltiplicazioni corrispondenti (linea 5). Nella riga di testo aggiunta dall'insegnante alla fine (Fig. 10.2.1.7a), queste stesse moltiplicazioni compaiono senza il rettangolo. La lettura di tale espressione può essere fatta coerentemente alle usuali convenzioni matematiche (cioè dando precedenza al calcolo dei prodotti) proprio perché le moltiplicazioni che la formano erano, andando a ritroso in questa catena semiotica, mattonelle solo successivamente unite col nastro adesivo.
2. Il segno artefatto 'mettere insieme' si riferisce inizialmente all'attività svolta, ovvero all'incollaggio di due rettangoli di cartoncino. Nel corso della discussione, si passa dall'attività effettiva alla giustapposizione di rettangoli disegnati (linea 7). L'operazione di mettere insieme viene rappresentata dal disegnare in modo affiancato per poi disegnare nuovamente con un nuovo rettangolo unico (linea 15). L'insegnante comincia poi a parlare di "mettere insieme i quadratini" (linea 26), pertanto l'espressione non si riferisce più solo ai rettangoli (ovvero alle moltiplicazioni) ma anche ai quadretti in essi contenuti (ovvero i risultati). In questo secondo contesto, sono proprio gli studenti a riconoscere una relazione additiva. Le parole "mettere insieme" sono sostituite dal simbolo di addizione (linee 27-29) che, nella discussione, è solo fra i risultati ma, negli elaborati individuali, compare anche fra i rettangoli (Fig. 10.2.1.6). Il passo successivo viene fatto dall'insegnante proponendo di inserire il simbolo di addizione fra moltiplicazioni, senza utilizzare più i rettangoli.
3. La parola "uguale" viene introdotta dall'insegnante durante la discussione e contemporaneamente scritta fra i rettangoli disegnati (linea 12). Nel parlato, questa parola è interpretabile come congruenza fra i rettangoli uniti e il rettangolo che rappresenta la loro somma. Nel primo disegno fatto alla lavagna (Fig. 10.2.1.3a) può essere interpretato anche proceduralmente, come segno che indica il risultato dell'operazione "rettangolo+rettangolo". Nel corso della discussione si aggiunge una seconda riga di testo (quella in giallo, Fig. 10.2.1.4) in cui il simbolo di uguaglianza viene inserito, su suggerimento dei bambini, per indicare la relazione additiva fra i risultati dei prodotti. Anche in questo caso l'interpretazione potrebbe essere solo procedurale. In entrambi questi casi viene rispettata la classica struttura $A+B=C$. La relazione che c'è fra i risultati, facilmente interpretabile dai bambini, viene rispecchiata nella relazione fra i rettangoli, tanto che i bambini inseriscono il simbolo + fra

rettangoli nelle loro produzioni individuali (Fig. 10.2.1.6). Tuttavia, ogni rettangolo rappresenta una moltiplicazione e quindi queste nuove scritture indicano una relazione fra prodotti; l'uguale acquisisce un'interpretazione relazionale, esplicitata nella riga di testo simbolico aggiunta alla fine dall'insegnante (Fig. 10.2.1.7a).

Possiamo notare che nel passaggio da segni artefatto a segni matematici risulta fondamentale il ruolo dell'insegnante che, riconoscendo le potenzialità delle rappresentazioni ibride dei bambini, ne promuove la condivisione con tutta la classe. Queste rappresentazioni agiscono quindi da legame fra i segni artefatto e i segni matematici creando così le catene semiotiche appena descritte e rappresentate schematicamente in figura 10.2.1.8.

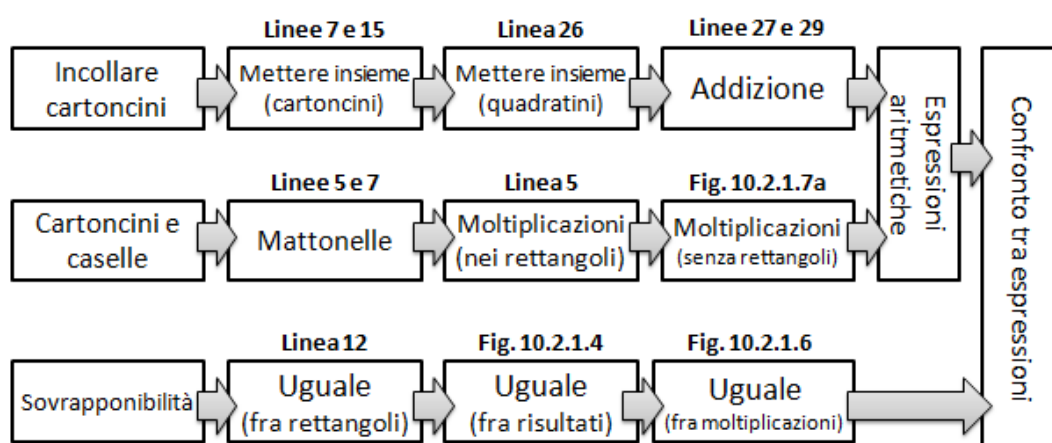


Fig. 10.2.1.8: Schematizzazione delle catene semiotiche che collegano i segni prodotti a seguito della consegna di unione di cartoncini a segni matematici costituiti da espressioni aritmetiche.

10.2.2 Distributività come scomposizione

Terminato il ciclo didattico presentato nella sezione precedente, è stato avviato un secondo ciclo a partire da una consegna che, in accordo con l'analisi del potenziale semiotico (sez. 7.3), ha il potenziale di far emergere il significato di proprietà distributiva come scomposizione di un prodotto nella somma di altri due prodotti con un fattore comune.

Dopo due settimane dalla consegna precedente, agli studenti viene chiesto di leggere la lettera di Giovanni. Nella lettera, il bambino immaginario, chiede di essere aiutato nel trovare un modo per determinare il risultato del prodotto 3×7 utilizzando soltanto prodotti con entrambi i fattori minori o uguali a 5.

Dopo aver letto individualmente la lettera, gli studenti sono invitati a confrontarsi in piccoli gruppi per concordare una prima possibile risposta da dare a Giovanni. Sin dall'attività in piccoli gruppi, emerge un legame fra questa consegna e l'artefatto nonostante questo non sia nominato esplicitamente nella lettera stessa. Nella seguente trascrizione, l'insegnante interagisce con un gruppo di studenti che sta cercando una soluzione sfogliando le pagine del quaderno di matematica.

Estratto 12			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
1	SofB: È come questo! [apre il quaderno mostrando un esempio come quelli	"Questo" Si riferisce genericamente alla	

	in Fig. 10.2.1.7]	scrittura complessiva, non ne indica nessuna parte in particolare.	
2	Zen: È vero! Un lavoro come questo può essere!	Come sopra	
3	R: Però che rettangoli fareste in un lavoro come questo ?	“Rettangoli” Fa riferimento all’artefatto è un segno artefatto che però ha la potenzialità di riferirsi alle moltiplicazioni in cui il prodotto richiesto dovrà essere scomposto	Focalization Dal riferimento generico di ‘un lavoro come questo’ filtra il riferimento ai rettangoli forse per indirizzare a considerare l’uso dell’artefatto
4	Zen: Te lo posso spiegare? Tipo: se qui [indica il rettangolo che nell’esempio sul quaderno si trova alla destra dell’uguale] c’è 3×15. Di larghezza è il dieci. Perché... l’unità [indica la cifra 1 del 15] cioè il 15 è composto da una decina e da cinque unità, prendi il quin...l’uno è la decina e si mette qui e questo si fa lungo dieci [indica un rettangolo 3×10 sul quaderno, posto a sinistra dell’uguale] e alto tre. Poi tre, lunghezza tre [indica l’altezza del rettangolo 3×5 disegnato affiancato al rettangolo 3×10 sul quaderno] e lungo cinque; e uguale poi si trova, poi si mettono insieme [muove le dita come per avvicinare i due rettangoli disegnati sul quaderno] e vien fuori il risultato.	La frase contiene vari riferimenti alla scrittura e ai rettangoli: lungo 10, alto 3, lunghezza tre, lungo cinque Zen parte dal prodotto a destra e procede a reinterpretare il lavoro fatto a partire dal prodotto che nell’attività precedente era ‘finale’ per arrivare ai prodotti iniziali. Questi segni artefatto sono messi in relazione con vari segni matematici: c’è 3×15 si potrebbe riferire sia al rettangolo si alla moltiplicazione scritta in simboli, sia al loro insieme. Il 15 viene scomposto in “decine” e “unità” facendo riferimento alla notazione posizionale (vengono indicate le cifre). La scomposizione del numero viene tradotta mediante la rappresentazione in rettangoli, Zen sembra utilizzare il modello rettangolare della moltiplicazione senza far riferimento ai cartoncini, ma le dita che si muovono a unire i rettangoli appaiono come un riferimento all’attività del ciclo didattico precedente.	
5	R: Ah ho capito! E nel caso di questo bambino quindi che cosa potrebbe fare lui che c’ha 3×7 ?		Back to the task Rilancia provando a chiedere l’applicazione di “un lavoro come questo” al caso della consegna attuale

6	NicS: Aspetta! Aspetta! [...] Ce l'hai fatto fare anche te quando bisognava ritagliare i cartoncini e usare lo scotch per metterli insieme . È come questo!	Forse partendo dalle parole di Zen o dall'osservazione dei disegni sul quaderno, NicS riconosce l'attività svolta nel ciclo didattico precedente, i segni che usa (compreso "metterli insieme") sono segni artefatto	

L'analisi di questo primo protocollo mette in evidenza l'associazione che gli studenti fanno fra la consegna attuale e quanto svolto precedentemente. Tuttavia, il discorso dei diversi studenti è su piani diversi: Zen integra segni matematici e segni artefatto (espressi anche attraverso i gesti) in un intervento ibrido in cui ritornano alcuni dei segni emersi nella discussione precedente come "mettere insieme". Il bambino mostra anche di essere in grado di associare a un rettangolo la moltiplicazione a esso corrispondente, di fatto esplicita la relazione fra i fattori della moltiplicazione e le dimensioni dei rettangoli. Si noti anche la presenza di segni matematici noti allo studente da prima dell'inizio dell'intervento sperimentale, come "unità" e "decine". Pertanto Zen sembra star integrando le nuove conoscenze con quelle pregresse.

Non sembra valere lo stesso nel caso di NicS che fa riferimento solo all'attività con l'artefatto senza esplicitare connessioni con segni matematici. Proseguendo nel loro lavoro, gli studenti di questo gruppo faticano a determinare una possibile scomposizione del prodotto 3×7 , probabilmente perché, a differenza dell'esempio presentato da Zen, non c'è un numero maggiore di 10 e quindi non è disponibile una scomposizione già pronta nelle sue decine e unità.

Nel corso della discussione collettiva, gli altri gruppi presentano le soluzioni da loro individuate.

10.2.2.1 La scomparsa dei rettangoli: concatenazioni di uguaglianze

Fra interviene per primo. Il bambino rappresenta la soluzione del suo gruppo alla lavagna (Fig. 10.2.2.1): rimanendo in silenzio scrive prima l'espressione $3 \times 5 + 3 \times 2$ (usando solo simboli matematici) e successivamente completa la rappresentazione disegnando dei rettangoli intorno alle due moltiplicazioni. Da notare che i rettangoli disegnati da Fra non rispettano le proporzioni dettate dai fattori dei prodotti, fungono piuttosto da semplici contenitori per le moltiplicazioni. Solo alla fine Fra disegna il rettangolo "risultato" e poi lo completa inserendo al suo interno il prodotto 3×7 . Pertanto, una possibile interpretazione è che i rettangoli aggiunti da Fra dopo aver scritto l'espressione $3 \times 5 + 3 \times 2$ servano a determinarne il risultato come unione di due rettangoli. Infatti, dopo il simbolo di uguaglianza, viene disegnato prima il rettangolo "somma" e solo successivamente viene scritta la moltiplicazione a cui corrisponde.



Fig. 10.2.2.1: Rappresentazione grafica della soluzione di Fra.

Subito dopo interviene NicG per presentare la soluzione del suo gruppo. In questo caso, il bambino disegna prima tre rettangoli vuoti alla lavagna inserendo fra questi i simboli + e =. Solo successivamente inserisce i prodotti in tutti e tre i rettangoli ottenendo la scrittura in figura 10.2.2.2.

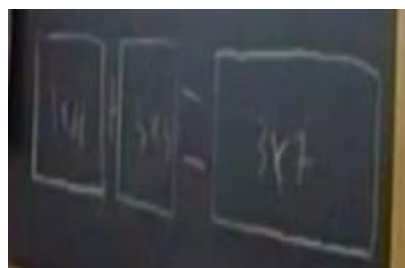


Fig. 10.2.2.2: Rappresentazione grafica della soluzione di NicG.

I primi due rettangoli contengono rispettivamente i prodotti 3×3 e 3×4 , nell'ultimo è riportato 3×7 . Pertanto la soluzione presenta valori numerici diversi rispetto alla precedente. mentre NicG disegna in silenzio interviene Sim che osserva: "NicG ha fatto un'operazione diversa però è la stessa cosa".

Interviene successivamente Mir, dicendo che intende proporre una soluzione differente. Mir scrive l'espressione in figura 10.2.2.3a, schematizzabile come

$$= 3 \times 5 + 3 \times 2 =$$

$$= 15 + 6$$

Dal punto di vista numerico, l'espressione scritta è uguale a quella di Fra, ma è rappresentata in modo diverso: non c'è nessun riferimento all'artefatto ma viene usato un registro esclusivamente simbolico.

Estratto 13

	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
7	R: Cosa vogliono dire quegli uguali ?		Focalization
8	Mir: Tre per cinque [nel dirlo traccia una linea col dito sotto 3×5] è uguale a quindici [indica il 15] e tre per cinque più tre per due [indica	Si tratta di segni matematici la cui interpretazione può non corrispondere a quella "standard"	

	la prima riga] è uguale a quindici più sei [indica la seconda riga].	Di fatto sembra che l'uguale posto a sinistra del prodotto 3×5 indichi che il risultato di tale prodotto è il 15 scritto sotto. L'uguale posto a destra sembra avere invece un significato relazionale esprimendo l'equivalenza fra la somma delle moltiplicazioni e la somma dei loro risultati.	
9	R: Ho capito.		

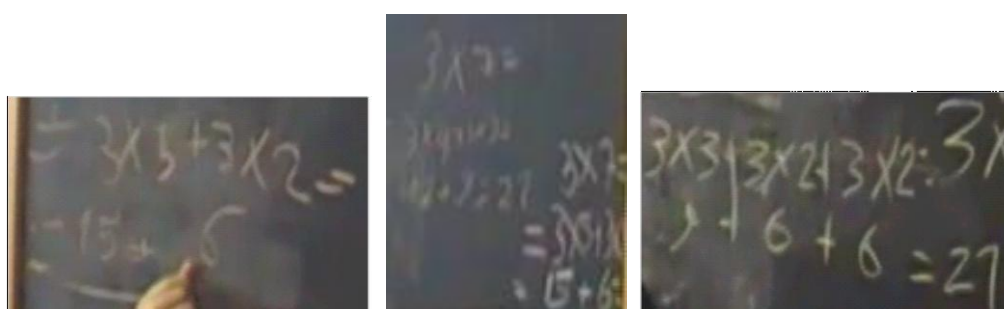


Fig. 10.2.2.3: Rappresentazione simbolica della soluzioni: a sinistra la soluzione proposta da Mir, al centro quelle di Mab e Lor. Nell'ultima immagine Lor propone una suddivisione del prodotto nella somma di tre prodotti.

Si noti che la frase di Mir è composta di due parti. Inizialmente il bambino asserisce che “tre per cinque è uguale a quindici” e successivamente completa affermando che “tre per cinque più tre per due è uguale a quindici più sei”. Di fatto, nella scrittura di Mir compare più volte il segno uguale, probabilmente con significati diversi. L'uguale scritto a sinistra dell'espressione sembra essere un'uguale procedurale, dice qual è il risultato di 3×5 . L'uguale di destra ha una valenza relazionale indicando l'equivalenza fra le due espressioni aritmetiche scritte nelle due righe.

Il contributo di Mir alla discussione è quello di aver introdotto nuovi segni che sono strettamente legati ai segni utilizzati precedentemente (come mostrato dal comportamento di Fra) ma hanno perso le qualità grafiche condivise con l'artefatto. Il testo è ora composto di soli segni matematici il cui significato non è però stato esplicitato: il collegamento con i segni precedenti, condensati in quella che abbiamo chiamato Stele di Rosetta, permette a tutti di darne un'interpretazione ma le diverse interpretazioni non sono coincidenti. Infatti, dopo Mir, altri studenti intervengono nella discussione per proporre nuove soluzioni con rappresentazioni simboliche leggermente differenti: in particolare Lor e MAb producono le scritture mostrate in figura 10.2.2.3b che possono essere ricostruite nel seguente modo:

Scrittura di MAb	Scrittura di Lor
$3 \times 7 =$ $3 \times 4 + 3 \times 3 =$ $12 + 9 = 21$	$3 \times 7 =$ $= 3 \times 5 + 3 \times 2 =$ $= 15 + 6 = 21$

In queste scritture il significato del simbolo di uguaglianza cambia rispetto alle situazioni precedenti. Di fatto, nel caso della scrittura di Mir (Fig. 10.2.2.3a) il simbolo di uguaglianza indica il proseguire nella procedura di calcolo (come esplicitato dal bambino nell'estratto 13); il simbolo "=" che compare nella prima riga delle scritture di MAb e Lor invece è puramente relazionale e indica l'uguaglianza fra il prodotto che si torva nella prima riga e l'espressione scritta nella seconda. Si noti in particolare che la classica struttura "termine-operatore-termine=risultati" viene qui ribaltata scrivendo 3×7 , usato prima come "rettangolo-risultato" (Figg. 10.2.2.1 e 10.2.2.2), al lato sinistro del simbolo di uguaglianza; seguono poi sul lato destro altre operazioni, e non un risultato. In questo caso il simbolo di rappresenta il risultato di un'operazione di scomposizione.

Nell'ultima parte della discussione, Lor interviene per suggerire una scomposizione in tre moltiplicazioni (Fig. 10.2.2.3c). Questo avvalora l'interpretazione del simbolo di uguaglianza come indicazione di una scomposizione che viene generalizzata da Lor ad un numero di addendi maggiore di due. L'insegnante commenta la scrittura del bambino affermando:

Estratto 14			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
10	R: Lor ci sta dicendo che volendo si può anche dividere in tre pezzi . Lui l'ha diviso in tre pezzi invece che in due.	"pezzi" Sembra richiamare le parti di cui è composto un cartoncino quando viene ottenuto dall'unione degli altri. Fa riferimento all'artefatto anche se la scrittura di Lor non presenta i rettangoli.	Provide a synthesis

Si noti che, nell'attività fin qui descritta, la totalità degli studenti non commenta le proprie scritture alla lavagna, come se queste fossero auto-esplicative. La discussione consiste in un susseguirsi di iscrizioni a cui si alternano pochi commenti in risposta a sollecitazioni dell'insegnante (come nel caso di Mir visto prima).

Gli interventi verbali da parte degli studenti sono rari e consistono quasi esclusivamente in correzioni di errori nel calcolo dei risultati di alcune moltiplicazioni. Questo sembra suggerire un generale accordo della classe sulla validità di tutte le scritture proposte. In particolare si noti che nessuno esprime disagio nei confronti delle concatenazioni di uguaglianze che vengono scritte alla lavagna. Pertanto, tali rappresentazioni sembrano segni condivisi dalla collettività, comprese le differenti interpretazioni del simbolo di uguaglianza.

Ruolo dell'insegnante Il ruolo dell'insegnante durante l'attività semiotica collettiva è minimo, l'unica sintesi che viene fatta è quella presentata alla linea 10 che, piuttosto che essere una vera e propria sintesi di quanto emerso nell'attività collettiva, appare come un'esplicitazione del legame con l'artefatto attraverso l'uso della parola "pezzi" che richiama i rettangoli di cartoncino e le azioni fatte con essi.

10.2.2.2 Concatenazioni di uguaglianze: un passo avanti nella catena semiotica

Dopo la discussione, agli studenti viene chiesto di scrivere individualmente una risposta per Giovanni nella forma di una lettera.

Evoluzione dei segni Nella maggior parte dei testi prodotti sono presenti espressioni aritmetiche; soltanto tre bambini forniscono solo la rappresentazione con i rettangoli (Fig. 10.2.2.4a). In molte produzioni ci sono entrambe le rappresentazioni (Fig. 10.2.2.4b) indicando quindi un parallelismo fra le due modalità rappresentative. Tuttavia, scritture come quella mostrata nella figura 10.2.2.4b rivelano che il simbolo di uguaglianza viene interpretato da alcuni come stimolo per una risposta (nel senso di Molina & Ambrose, 2008): nella linea in cui compaiono solo scritture simboliche, il risultato è dato dalla somma dei risultati dei prodotti; nella linea in cui compaiono i rettangoli, il risultato coincide col rettangolo ottenuto unendo i due rettangoli che si trovano a sinistra dell'uguale.

In alcuni elaborati appaiono evidenze dell'appropriazione della struttura relazionale delle espressioni aritmetiche e la loro relazione con l'artefatto. Delle frecce sono utilizzate per collegare i rettangoli (e quindi le moltiplicazioni in essi contenute) con i risultati corrispondenti; altre frecce esprimono la relazione fra i risultati (Fig. 10.2.2.4c).

Secondo Stephens “il pensiero relazionale [è] evidente quando, per esempio, descrizioni scritte, frecce o diagrammi [sono] usati per confrontare le grandezze a entrambi i lati del simbolo di uguaglianza” (Stephens, 2008, p. 494). In questo senso, tali protocolli rivelano l'emergere del pensiero relazionale nel contesto delle attività semiotiche legate all'uso dell'artefatto.

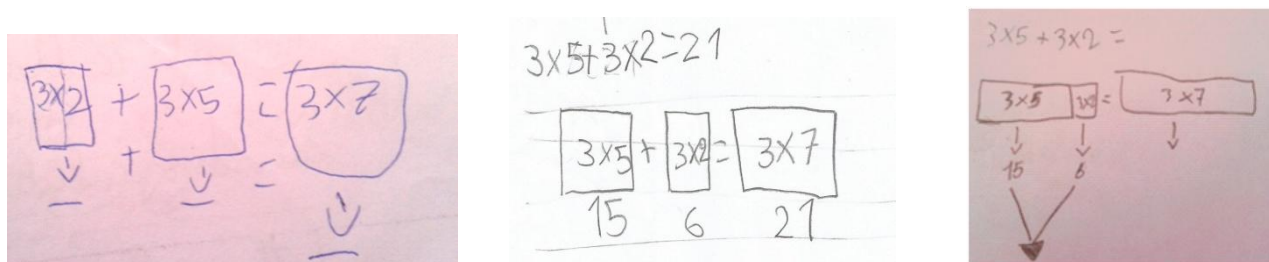


Fig. 10.2.2.4: Rappresentazioni delle soluzioni nella lettera di risposta a Giovanni.

In alcune rappresentazioni, tutti i rettangoli disegnati hanno le stesse dimensioni (Fig. 10.2.2.4a); non rappresentano più i rettangoli della tabella ma sono dei “contenitori” per le moltiplicazioni; svolgono il ruolo usualmente dato alle parentesi, ovvero evidenziano la struttura dell'espressione aritmetica. Questi segni hanno quindi la potenzialità di evolvere nel più usuale simbolismo aritmetico.

Altre rappresentazioni sono interamente simboliche, senza mostrare più nessun tipo di legame con le attività svolte precedentemente con l'artefatto (Fig. 10.2.2.5). Nella rappresentazione proposta in figura, si noti la presenza di una linea orizzontale fra le due linee di testo. Tale linea può essere interpretata in analogia con la linea orizzontale generalmente utilizzata per indicare la posizione del risultato negli algoritmi di calcolo scritti. Pertanto potrebbe indicare la relazione fra le due righe di testo: nella seconda riga sono presenti i risultati della prima.

$$3 \times 4 + 3 \times 3 = 21$$

$$12 + 9 = 21$$

Fig. 10.2.2.5: Rappresentazione delle soluzioni nella lettera di risposta a Giovanni realizzata da MALb.

In sintesi, affrontando la consegna della lettera a Giovanni, gli studenti richiamano i segni prodotti nelle consegne precedenti per rappresentare le loro soluzioni (Figg. 10.2.2.1 e 10.2.2.2). Nella discussione di classe compaiono nuovi segni (Fig. 10.2.2.3) che richiamano quelli precedenti nella struttura ma hanno perso ogni riferimento grafico all'artefatto. Inoltre, il simbolo di uguaglianza viene utilizzato violando la classica configurazione <termine, operatore, termine, uguale, risultato> ribaltandola (Fig. 10.2.2.3b). Si ha quindi una conferma di una visione bidirezionale dell'uguale.

I segni prodotti a partire da questa consegna continuano la catena semiotica emersa dalla discussione sulla consegna dell'unione di cartoncini e le attività ad essa seguite (Fig. 10.2.1.8). In particolare prosegue il graduale abbandono della rappresentazione ibrida: se alla fine del ciclo didattico precedente le espressioni erano formate da rettangoli che rispettano ancora le proporzioni che hanno nella tavola di Laisant, nelle produzioni relative a quest'ultima consegna compaiono rettangoli di dimensioni qualsiasi (Fig. 10.2.2.4a) o addirittura non compaiono rettangoli. Alcuni studenti, negli elaborati individuali, fanno esclusivamente uso dell'usuale simbolismo aritmetico-algebrico senza necessità di far riferimento al modello rettangolare (Fig. 10.2.2.5)..

Inoltre, si hanno evidenze di un'appropriazione del significato relazionale della scrittura simbolica: infatti, compaiono sia scritture del tipo $3 \times 5 + 3 \times 2 = 3 \times 7$ (rappresentate usando i rettangoli, Fig. 10.2.2.1) sia del tipo $3 \times 7 = 3 \times 5 + 3 \times 2$ (Fig. 10.2.2.3); questo mostra che il simbolo "=" ha acquistato un'interpretazione bidirezionale.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante ha, in questa discussione, un ruolo solo apparentemente meno importante. Di fatto i suoi interventi sono pochi ma cruciali. In particolare, affermando di comprenderla (linea 9), l'insegnante accetta la spiegazione di Mir per la scrittura da lui proposta, almeno in modo implicito. Questo fatto sembra importante come stimolo per gli altri studenti a utilizzare rappresentazioni di tipo analogo, cercando di integrare la rappresentazione analogica basata sull'uso dei rettangoli.

10.2.3 Distributività nella classe seconda in sintesi

In conclusione, la catena semiotica evidenziata nelle sezioni precedenti (Fig. 10.2.1.8) aveva portato a utilizzare le espressioni aritmetiche per confrontare la somma di due prodotti con la moltiplicazione corrispondente al suo risultato. Nell'attività analizzata nell'ultima sezione, si giunge all'abbandono dei rettangoli e, attraverso il compito di scomposizione a un'interpretazione bidirezionale dell'uguale. Pertanto è ora possibile rappresentare, attraverso concatenazioni di uguaglianze, relazioni fra espressioni aritmetiche, in particolare la relazione data dalla proprietà distributiva (Fig. 10.2.3.1).

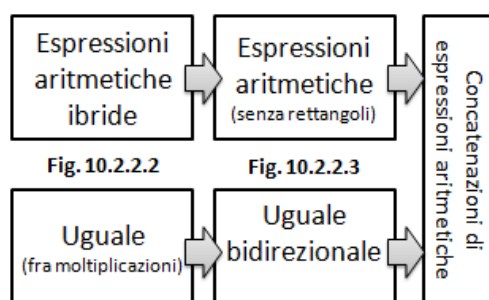


Fig. 10.2.3.1: Schematizzazione delle catene semiotiche che collegano i segni emersi nel ciclo didattico precedente a segni matematici costituiti da concatenazioni di uguaglianze tra espressioni aritmetiche.

L'insieme dei passaggi qui sintetizzati e di quelli messi in evidenza nella sezione 10.2.1.1 costituisce un intreccio di significati in evoluzione durante i cicli didattici presentati. Complessivamente emerge una rete di segni collegati fra loro, la **rete semiotica** (Mariotti, *Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS*, 2013) che è schematizzata in figura 10.2.3.2. Attraverso molteplici catene semiotiche, in collegamento tra loro, si evidenzia lo spostamento dall'uso di segni artefatto (come cartoncini, caselle e mattonelle) verso segni matematici quali concatenazioni di uguaglianze tra espressioni aritmetiche per rappresentare la relazione data dalla proprietà distributiva.

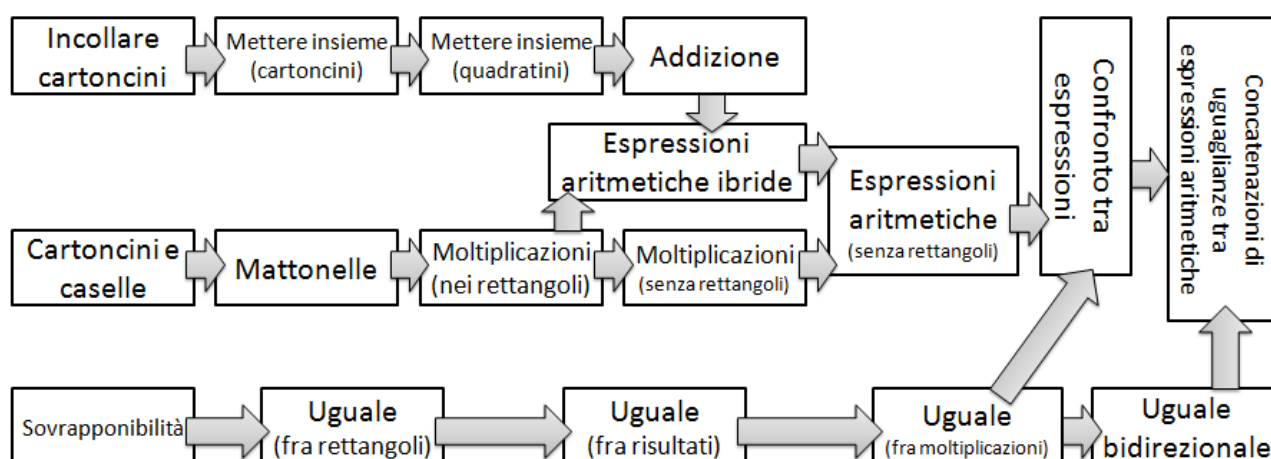


Fig. 10.2.3.2: Schematizzazione della rete semiotica relativa ai segni utilizzati per rappresentare la proprietà distributiva.

Tuttavia, sebbene i diversi segni siano interpretabili come passi successivi in catene semiotiche, le produzioni individuali che li contengono non sempre si susseguono in un ordine cronologico, questo lascia intendere che bambini diversi possono trovarsi a stadi diversi nell'evoluzione del significato di proprietà distributiva, ovvero rispetto all'interpretazione relazionale delle espressioni aritmetiche che la rappresentano.

11 Espressione del potenziale semiotico dell'artefatto: classe quinta

In questo capitolo, ripercorrendo le attività semiotiche individuali e collettive si cercherà di mettere in delineare l'emergere e lo svilupparsi del potenziale semiotico dell'artefatto nelle attività svolte dagli studenti della classe quinta. Anche in questo caso i bambini interagiscono sia con l'insegnante sia con il ricercatore che svolge quindi il ruolo di osservatore partecipante. Le trascrizioni delle discussioni di classe sono riportate attraverso estratti (la numerazione prosegue quella del capitolo precedente); si indica con R il ricercatore e con M la maestra della classe ma nell'analisi ci si riferisce ad entrambi come "insegnante", in quanto entrambi conoscono le finalità dell'attività didattica e intervengono con l'intenzione di promuovere il processo di mediazione semiotica.

Le stesse consegne implementate nella classe seconda sono state proposte anche nella classe quinta. Un'importante differenza consiste nel fatto di aver utilizzato, per gli studenti più grandi, la tavola di Laisant di 10 righe e 10 colonne (Fig. 11.1.1) sin dalle primissime fasi dell'intervento.

11.1 Commutatività nella classe quinta

Pertanto, per quanto riguarda la proprietà commutativa, è stato chiesto agli studenti di colorare una fra le 100 caselle per scrivere dentro di essa la moltiplicazione corrispondente. Successivamente i bambini hanno ritagliato un rettangolo di cartoncino con le stesse dimensioni delle caselle e su di esso hanno scritto il numero di quadretti corrispondente (ovvero il risultato del prodotto corrispondente alla casella inizialmente colorata). Infine, il cartoncino è utilizzato per trovare nella tavola di Laisant una seconda casella a esso congruente. Gli studenti che riescono a trovare questa casella, la colorano e vi scrivono dentro il prodotto corrispondente (Fig. 11.1.1). Questa consegna è stata ripetuta due o tre volte da ciascuno studente utilizzando, di volta in volta, un colore diverso (sia per riempire la casella, sia del cartoncino).

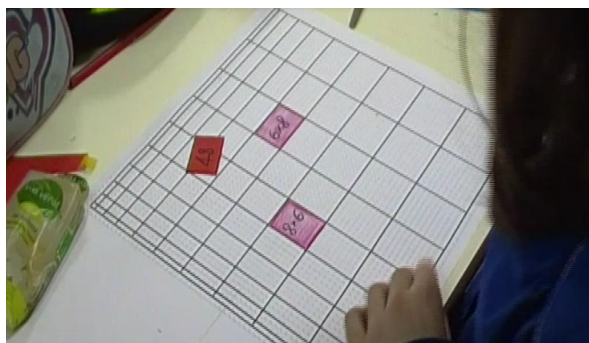


Fig. 11.1.1: Consegna svolta da una studentessa.

Come previsto nell'analisi del potenziale semiotico dell'artefatto (sez. 7.2), gli studenti svolgono la consegna traslando e ruotando il cartoncino per individuare la casella da colorare.

Estratto 15			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
1	Fed: Va bene?		
2	R: Si sovrappone perfettamente ?	"sovrappone perfettamente" Segno artefatto È riconducibile al significato matematico di congruenza e implica contenere la stessa quantità di quadretti.	Back to the task Non fornisce una risposta ma rimanda alla consegna in cui veniva chiesto di trovare una casella a cui il cartoncino si sovrapponesse
3	Fed: Fed: Sì.		
4	R: E allora certo che va bene.		
5	Fed: Basta che la rigiro così [con la mano ruota il cartoncino che è appoggiato sopra la sua tavola]	"rigiro" Segno artefatto Fa riferimento al cambiamento di posizione del cartoncino. Può essere messo in corrispondenza col cambiamento di ordine dei fattori	
6	R: Ah! Ho capito. È vero, è vero.		
7	Fed: Vedi. Se la metto così [sovrappone il cartoncino a una delle due caselle colorate, Fig. 11.1.2a, poi lo ruota, Fig. 11.1.2b, e lo porta a sovrapporsi sull'altra casella, Fig. 11.1.2c], se lo metto così . Visto?	"così" deittico, fa riferimento alla particolare posizione assunta dal cartoncino Viene ripetuto due volte per indicare la differenza nella posizione ma tale posizione non viene ancora descritta. Questo dipende anche dalla possibilità di mostrare direttamente il modo in cui il cartoncino viene posizionato.	

Durante l'attività emergono quindi dei termini per riferirsi alle azioni fatte col cartoncino (p.e. 'rigirare', linea 5) ma i segni utilizzati per riferirsi alle posizioni reciproche dei cartoncini sono contingenti all'attività (linea 7). Il cartoncino permette di mettere in relazione le due caselle attraverso il movimento che, in tutti i casi osservati, è sempre la rotazione e mai il ribaltamento.



Fig. 11.1.2: Fed mostra come ha svolto la prima consegna individuale.

11.1.1 Intreccio tra significati aritmetici e geometrici

Una delle ipotesi che ha portato a proporre l'intervento sperimentale in due classi diverse, è che gli studenti della classe quinta avrebbero potuto trarre vantaggio dalle conoscenze già acquisite relativamente in contesto geometrico; in particolare dalle conoscenze sul calcolo delle aree (cfr sez. 4.5).

Tale ipotesi trova conferma già dal momento in cui gli studenti, dopo aver svolto la consegna individuale, si confrontano in piccoli gruppi. In tale momento, viene loro richiesto di rispondere alle domande relative a differenze e somiglianze fra le coppie di caselle colorate con lo stesso colore riportate nella sezione 7.2. Le domande sono scritte alla lavagna e gli studenti hanno a disposizione carta e penna per scrivere una risposta unica per tutto il gruppo.

Nella seguente trascrizione è riportato uno stralcio del confronto avvenuto all'interno di un piccolo gruppo di studenti che sta discutendo sulla possibilità di dare più di una risposta alla domanda "cosa hanno in comune le caselle colorate?".

Estratto 16			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
8	Pet: Oppure c'hanno due cose in comune: i fattori e l' area .	"fattori" Segno matematico che si riferisce al contesto aritmetico "area" Segno matematico che si riferisce al contesto geometrico	
9	Sar: I numeri della moltiplicazione .	"numeri" È più generico rispetto a fattori, potrebbe riferirsi anche al risultato. "moltiplicazione" Sono entrambi segni matematici	
10	Pet: Scriviamole! Se siamo tutti d'accordo.	Qui Pet propone di inserire queste parole nella	

		risposta comune di gruppo.	
11	Nic: Visto! L' area l'ho detta io!	Qui Nic afferma di aver proposto di usare area, si tratta quindi di un segno matematico condiviso almeno da due studenti (Nic e Pet)	
12	Pet: Almeno l' area sono d'accordo, poi...		
13	Nic: Hanno tutti i fattori .		
14	Pet: Questi sono uguali !	Sembra che la studentessa stia confrontando due caselle colorate dello stesso colore per vedere se effettivamente i fattori siano "uguali". Tuttavia il riferimento deittico "questi" è di difficile interpretazione perché la studentessa sta guardando la tavola di fronte a sé senza però indicare nessuna casella.	
15	Sar: Il risultato .	"risultato" Si aggiunge un ulteriore segno matematico di ambito aritmetico Non viene però poi condiviso dagli altri studenti	
16	Pet: Va be', anche questi!	Prosegue il confronto iniziato nella linea 14 ma rivolto ad un'altra coppia di caselle dello stesso colore.	
17	Nic: Ah! Che alcune figure sono uguali . Congruenti ! Alcune figure sono congruenti !	"uguali" Viene utilizzata la stessa parola utilizzata precedentemente da Pet ma stavolta per riferirsi al contesto geometrico. "congruenti" Traduce il termine 'uguali' nel contesto geometrico	

La discussione tra i tre studenti è già ricca di segni matematici. In particolare è possibile notare un susseguirsi di segni generalmente utilizzato nel discorso dell'aritmetica (evidenziati in arancio) ad altri segni inquadrabili nel discorso della geometria (evidenziati in verde).

Inoltre, il termine ‘uguale’ viene utilizzato facendo riferimento sia a uno che all’altro ambito (linee 14 e 17).

L’intersarsi di significati geometrici e aritmetici a partire dalle conoscenze pregresse è un fenomeno osservabile anche negli altri gruppi di studenti. Addirittura, il gruppo composto da Sar, Joh, Mat e Dan arriva alla conclusione condivisa “che c’è la proprietà commutativa per alcune coppie”. Di fatto, la relazione fra l’artefatto e il significato matematico culturalmente condiviso che si vuole mediare è già evidente per alcuni degli studenti.

11.1.2 Moltiplicazioni che si invertono: richiamo alla proprietà commutativa

La discussione collettiva inizia con la richiesta da parte dell’insegnante di condividere quanto emerso nel lavoro in piccoli gruppi. L’insegnante si trova di fronte alla lavagna, di fianco alla quale è appeso un cartellone su cui è rappresentata la tavola di Laisant. Gli alunni, intervengono dai propri posti alzandosi, quando necessario, per scrivere o indicare qualcosa sulla tavola appesa al muro.

Estratto 17			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
18	M: Prima domanda: come sono posizionate le caselle colorate da ciascuno di voi?	La domanda fa riferimento all’artefatto; si parla di “caselle” Si fa esplicito riferimento alla “posizione”	Back to the task La maestra ripete esattamente la domanda data precedentemente agli studenti come consegna per il lavoro in piccoli gruppi
19	Pet: In orizzontale e in verticale , tranne i quadrati con i fattori uguali .	Frase ibrida fra contesto aritmetico (fattori) e geometrico (quadrati) orizzontale, verticale fanno riferimento alle posizioni sulla tabella appesa, sono segni artefatto Si parla di quadrati con fattori uguali. I bambini (a detta dell’insegnante) non conoscevano l’espressione “quadrato” per riferirsi a un numero moltiplicato per se stesso. Quindi “quadrati” è da ritenersi come riferimento alla forma delle caselle sulla diagonale della tavola.	
20	Fed: Come s’è scritto noi!		
21	M: [Mentre scrive alla lavagna] In orizzontale e in verticale , tranne i quadrati . Con i fattori uguali ... Lo scrivo vicino a “quadrati” [...] Ale?	Riporta le parole di Pet elaborando però la struttura della frase: inserisce “con i fattori uguali” scritto più piccolo,	Focalization Scrivendo alla lavagna quello che è stato detto da Pet lo pone all’attenzione

		sotto alla parola “quadrati”	dei compagni
21	Ale: Volevo dire che la nostra... il nostro gruppo ha fatto così [si alza e si avvicina alla tavola appesa al muro] per riconoscere come sono fatte. Che queste qua [passa col dito indice lungo le caselle che formano la diagonale principale della tavola] non si possono sovrapporre con altre. Invece queste qua [beat su 3×5 e poi su 5×3] sì. Tipo anche... [poggia un dito su 3×6] queste due [sposta l'indice su 6×3] oppure questa [tocca 3×7] e questa [tocca 7×3]. Invece, quelle là in diagonale no. Tipo 1×1 è uguale a 1, però nessuno fa 1. Oppure 10×10 fa 100, ma nessuno può entrare in 100.	Viene fatto un largo uso di deissi, parole come “queste” e “quelle” sono sempre accompagnate da gesti deittici di pointing verso caselle o di beat su caselle. Nella seconda parte viene specificato che le caselle che “non si possono sovrapporre” sono “quelle là in diagonale” Il riferimento è all'attività con l'artefatto e al modo in cui le caselle sono disposte nella tavola. Sono tutti segni artefatto. Sono usati segni matematici: nell'elencare moltiplicazioni e risultati viene prima usato “uguale”. Successivamente viene detto “fa” il che lascia intendere che qui l'uguale sia interpretato come stimolo per una risposta. Il fatto che però poi si parli di “entrare in 100” fa capire che c'è un riferimento all'attività svolta (far entrare un cartoncino in una casella). “può entrare” segno artefatto	

Evoluzione dei segni In questa prima parte di discussione emerge subito la commistione fra il discorso della geometria e quello dell'aritmetica. Addirittura, Pet attribuisce i fattori ai quadrati (linea 19). Questo tipo di osservazione sembra essere condiviso da altri studenti (linea 20). L'abbinamento fra le caselle, la loro posizione e le operazioni a esse corrispondenti è reso esplicito in particolare da Ale. Lo studente fa riferimento alle caselle indicandole sulla tabella ma contemporaneamente enuncia le operazioni a cui sono associate e i loro risultati. Tuttavia, vi è una con-fusione (o mescolanza) fra l'essere congruenti e avere lo stesso risultato, tant'è che per asserire che non esiste una casella congruente a 1×1 viene detto (linea 21) che nessun'altra casella fa 1. Si tratta di una condizione sufficiente ma non necessaria.

Ruolo dell'insegnante La maestra focalizza su alcuni interventi riportandoli alla lavagna. Tuttavia, rielabora le frasi separando i termini geometrici da quelli aritmetici (linea 21). Di fatto riporta una prima frase in cui compaiono solo riferimenti alla posizione e alla forma. Il

riferimento ai fattori viene invece inserito in caratteri più piccoli, probabilmente a indicare che si tratta di una particolare proprietà dei quadrati.

Estratto 18			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
22	M: Passerei alla domanda numero 2 che è “a quali operazioni corrispondono le caselle colorate ?” [Pet alza la mano] Pet?	Nella domanda che viene posta dall'insegnante (ovvero nella consegna data precedentemente agli studenti) si chiede esplicitamente un riferimento a segni matematici parlando di “operazioni” ma facendo riferimento esplicito al fatto che c'è una relazione con l'artefatto e il suo uso (caselle colorate)	Back to the task
23	Pet: Sono moltiplicazioni .	“moltiplicazioni” Segno matematico La frase sembra essere il completamento della domanda, dunque suonerebbe: “le operazioni che corrispondono alle caselle colorate sono moltiplicazioni.”	
24	M: Bene [scrive “sono moltiplicazioni” sulla lavagna]. Poi? Ric?		Focalization Sull'intervento di Pet, attraverso la scrittura alla lavagna
25	Ric: Che le moltiplicazioni si possono... sulle caselle uguali , si invertono .	“caselle uguali” Fa riferimento all'artefatto, viene associato a “moltiplicazioni” coerentemente con quanto detto da Pet. Si parla di inversione ma non si comprende se il soggetto della frase sono le moltiplicazioni o le caselle	
26	M: Che intendi con “le caselle uguali ”?	Eco di alcune delle parole del bambino	Focalization + Richiesta di significato È un'azione che ha la stessa finalità di quella osservata nell'estratto 7 linea 91 del capitolo precedente
27	Ric: [si alza e si avvicina alla tavola di Laisant appesa al muro] Che tipo	Deissi per riferirsi a un particolare esempio.	

		uno colora questo [tocca 3×5], se vai su questo [tocca 5×3], ... eh... cambiano... tipo questo è 1, 2, 3, 4, 5 [mentre conta scorre col dito lungo la prima colonna fino ad arrivare alla quinta riga] Questo [tocca 5×3] è cinque per... [scorre col dito lungo la prima riga fermandosi alla quinta colonna] cinque per cinque [mette il dito indice su 5×3] eh... se fosse 5×6 [tocca 5×4], qui sarebbe 5×6.	“che tipo ...” introduce esempio generico che però non riesce completamente, infatti, Ric ha qualche difficoltà a identificare le caselle che sta indicando, sembra che stia cercando di guardare contemporaneamente a due caselle simmetriche e quindi mette insieme il primo fattore di una col secondo dell'altra arrivando così a dire “cinque per cinque”. Il prodotto che ottiene non si presta all’“inversione” di cui voleva dare un esempio e quindi prova a passare a 5×6 che dovrebbe essere la casella accanto a 5×5 (per questo, forse, indica 5×4 che è la casella di fianco a quella indicata precedentemente).	
28	M:	Mh... Di quale stavi parlando? [si avvicina allo studente]		Richiesta di esplicitazione del significato del segno deittico “questo”
29	Ric:	Di questo [tocca 5×3]		
30	M:	Sei sicuro che sia 5×5 ?		Cerca di collegare segni diversi : segno deittico e segno verbale
31	Ric:	No... 5×3 .	Nel momento in cui il bambino focalizza l'attenzione su una singola casella, riesce a determinare la moltiplicazione a cui corrisponde: 5×3	Apparentemente la mediazione dell'insegnante funziona dato che sortisce l'effetto desiderato.
32	Fed:	5×3 !		
33	M:	Questo è 5×3 , dice Ric. E allora quest'altro [tocca 3×5]?		
34	Coro:	È 3×5 !	Sicuramente, gli studenti che non si trovano vicino alla tavola non possono contare i quadretti ma tutti affermano con sicurezza che se la casella inizialmente indicata è 5×3, allora la simmetrica sarà 3×5	
35	M:	Mh... Le moltiplicazioni che si invertono ... [scrive quest'ultima frase alla lavagna] Quindi...	Fa eco a quanto detto prima da Ric (linea 25)	Focalization Tornando su quanto detto precedentemente da uno

			studente
36	Pet: La proprietà commutativa !	Quanto emerso finora nella discussione richiama per questa studentessa la proprietà commutativa Si tratta di un segno matematico ma non è esplicitato ancora il significato	
37	M: Pet ha nominato la proprietà commutativa . Ce la ricordiamo?		Focalization Sull'intervento di Pet
38	Mar: Sì!		
39	Mat: Sì! Che si scambiano .	scambiano" viene usato il verbo senza il soggetto, "si scambiano" come espressione della proprietà commutativa.	
40	M: Mar?		
41	Mar: Cambiando l'ordine degli addendi... dei fattori , il risultato non cambia .	Enuncia la proprietà richiamandola dalla memoria. Questa interpretazione è confermata dall'errore di interferenza dato dall'enunciato della proprietà commutativa nel caso della somma Compare il riferimento sia al cambiamento dell'ordine dei fattori sia all'invarianza del risultato. Viene fatto esplicito riferimento all'"ordine"	
42	M: In questo caso dei fattori . Cambiando l'ordine dei fattori ...	Fa eco alle parole della bambina. Il discorso è qui tutto sul piano matematico	Focalization
43	Dan: Il risultato non cambia .		
44	M: Il risultato non cambia . Come si chiama questo risultato ? I matematici lo chiamano...	Ripete le parole dei bambini, prima di Mar (linea 41) poi di Dan (linea 43). La richiesta fatta successivamente è ancora una richiesta sui segni matematici	Focalization
45	Coro: Prodotto .	Gli studenti rispondono coerentemente con un segno matematico	
46	M: Allora. Appuntiamo proprietà commutativa [scrive in un angolo della lavagna "p.comm"].	Qui fa di nuovo eco alla frase di Ric (linea 25)	Focalization Ask for a synthesis

	Moltiplicazioni che si invertono... Ric non ha detto una cosa importante. Tutte quelle che hai colorato te, quelle che hai colorato sulla tua tabella hanno tutte questa caratteristica? Tutte quante? Cioè... tutte quante, quante sono? [indica il banco di Ric] Tutte e sei fra di loro si possono invertire?	Usa il termine “tutte quante” che sembra definirsi indistintamente alle caselle e alle moltiplicazioni. Di fatto la frase inizia con “moltiplicazioni” (segno matematico) ma c’è un riferimento a “quelle che hai colorato” (segno artefatto) ovvero le caselle. Questo “tutte quante” funge da segno pivot. Da notare che, fino a qui, il termine “invertire” viene usato nel contesto dell’artefatto, nel contesto delle moltiplicazioni si parla di cambiare (ordine dei fattori o non cambiare del risultato)	focalization su “tutte quante”. La generalizzazione deve essere fatta sulla proprietà di ciascuna coppia, ma è stata espressa come proprietà di tutte le caselle, non avendo specificato a cosa si riferisca il quantificatore “tutte quante”.
47	Ric: Sì...		
48	M: Cioè te hai 6×7 e 3×8 , vale anche per queste due?		Propone un contro esempio probabilmente con la finalità di esplicitare la finalità della richiesta fatta alla linea 46
49	Ric: Ma no! Solo su quelle che sono uguali di dimensioni .	“uguali di dimensioni” si riferisce alle caselle, è un segno artefatto Ha la potenzialità di essere messo in relazione a moltiplicazioni composte dagli stessi fattori.	
50	M: Uguali di dimensioni . Noi come le abbiamo segnalate? Con lo stesso...	Qui l’insegnante fa eco alle parole del bambino (che poi validerà anche scrivendo alla lavagna, linea 52) ma fa anche un passo indietro ricollegandosi all’attività fatta con l’artefatto, spingendo quindi verso osservazioni sulla consegna piuttosto che sulla produzione di segni matematici.	Focalization + Back to the task La fine della frase “con lo stesso...” può essere interpretata come esempio di effetto <i>Topaze</i> (Brousseau, 2006)
51	Coro: Colore!	Segno artefatto	
52	M: Bene. [va alla lavagna e completa la frase già scritta con “nelle caselle con le stesse dimensioni” e poi nella riga sotto “stesso colore”]	Nella scrittura usa “stesse dimensioni” così come detto da Ric e aggiunge il riferimento, appena sollecitato, al colore.	Provide a synthesis

Evoluzione dei segni La domanda proposta nella consegna fa riferimento esplicito alle operazioni e questo stimola la produzione di segni matematici e di espressioni ibride composte da segni matematici e segni artefatto. In particolare, viene utilizzata l'espressione 'moltiplicazioni che si invertono', prima da uno studente (linea 25) e poi dall'insegnante (linee 35 e 46), per riferirsi alle 'caselle uguali' (linea 25) che poi sono dette 'uguali di dimensioni' (linea 49) e infine 'con lo stesso colore' (linee 51 e 52).

Inoltre, una studentessa richiama la proprietà commutativa e l'insegnante sollecita gli studenti a fornirne un enunciato. Questo viene fatto riproponendo una definizione richiamata direttamente dalla memoria (linea 41) e che è condivisa da diversi studenti. Tuttavia, a questo punto, non vi è ancora un'esplicitazione del legame fra i termini utilizzati per parlare della proprietà commutativa (fattori, cambiare ordine, risultato, prodotto) e quelli utilizzati per parlare dell'attività svolta (moltiplicazioni che si invertono, caselle uguali di dimensioni, dello stesso colore).

Ruolo dell'insegnante L'insegnante funge continuamente da stimolatrice per la produzione di nuovi segni, attraverso azioni di focalizzazione che si espletano in richieste di esplicitare il significato di certi termini o di certe espressioni che non sono complete o contengono deissi. Ad esempio, formula domande come "cosa intendi per ...?". In particolare, quando emerge il riferimento alla proprietà commutativa, stimola la produzione di segni matematici con frasi del tipo "i matematici lo chiamano..." (linea 46). Nella parte finale di quest'ultima trascrizione, invece, viene richiesto di produrre segni relativi all'artefatto con frasi del tipo "noi come le abbiamo segnalate?" (linea 50). Viene quindi a crearsi un parallelismo fra il discorso dei matematici e il discorso attuale della classe, corrisponde alla differenza fra segni matematici e segni artefatto o ibridi.

Si noti, che l'insegnante ripete più volte l'espressione 'moltiplicazioni che si invertono'; probabilmente ne considera il potenziale ai fini di mettere in relazione l'attività svolta in classe con i significati che si vogliono costruire.

11.1.3 Cambia soltanto la posizione: verso l'inversione dell'ordine dei fattori

Al termine della discussione riportata nella trascrizione dell'estratto 18, diversi studenti alzano la mano. La discussione continua quindi con l'insegnante che dà loro la parola.

Estratto 19			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
53	M: Fed. Poi And e poi Sam.		
54	Fed: Le caselle ... quella... cento , poi andando in diagonale fino alla uno . Tutte queste caselle non hanno una coppia .	Caselle e coppia sono segni artefatto, fanno riferimento alla tavola e alla consegna, così come diagonale per indicare la posizione Cento e Uno sono segni matematici utilizzati però per far riferimento a	

		specifiche caselle Finora le caselle sono sempre state identificate con la moltiplicazione corrispondente. Fed qui le identifica con i risultati.	
55	M: Ok [si volta verso la lavagna e legge quanto era già scritto] Non si possono sovrapporre, [poi inizia a scrivere] non hanno una coppia. Metto tra virgolette “una coppia”. Ok? Poi Fed, altro?	“sovrapporre” viene dalla consegna dell’attività da svolgere con la tavola individualmente Viene utilizzato da R durante l’attività in gruppi (linea 2) ma dagli studenti è stato detto in modo differente, per esempio “può entrare” (linea 21) “non hanno una coppia” è eco a Fed. Mettendo le due frasi insieme, l’insegnante suggerisce che siano associate, che dicano la stessa cosa o almeno cose collegate.	Focalization Fa eco a quanto detto da Fed
56	Fed: Sì. Se te colori... tipo... una casella. Facciamo quella lì del... dell’80. Quella lì accanto al 90 dell’ultima fila.	Il riferimento al colorare e alla casella richiamano ancora l’attività con l’artefatto Le caselle sono identificate da Fed con i loro risultati. Quando fa riferimento al “90” sta parlando di una casella all’interno della quale, in un momento precedente della discussione, un altro allievo, Dan, aveva scritto il risultato per far vedere la posizione di due caselle colorate. Si tratta sia di 9×10 sia di 10×9.	
57	M: A sinistra del 90.		
58	Fed: Eh. E colori quella del 70, sopra il 90. Se te le colori... no.	Qui lo studente dimostra di far fatica a determinare la corrispondenza fra caselle e risultato non potendo vedere i quadretti nelle caselle (è seduto lontano dal cartellone)	
59	M: [indicando la tavola appesa al muro] Ti vuoi avvicinare Fed?		Suggerisce di tornare alla tavola e di svolgere la consegna di determinare la moltiplicazione corrispondente a una

			casella
60	Fed: [si alza in piedi e va di fronte al cartellone] Se tipo te fai 8×7 e colori la 8×7 che sarebbe... qui [la indica e mantiene il dito sulla casella]. E ne cerchiamo... no. No. Non è qui.	“fai 8×7” è un segno matematico, sembra riferirsi a fare il calcolo “colori la 8×7” fa invece riferimento alla colorazione di una casella (si noti l’articolo “la”) Le due espressioni sono collegate dalla congiunzione “e”, pertanto sono due attività distinte ma che si fanno insieme. In questa frase viene collegata l’attività con l’artefatto con un significato matematico corrispondente	
61	Mat: Sì, è lì.		
62	M: Facciamone una più facile.		Back to the task Suggerisce di ripetere con un prodotto più facile ma non specifica in che senso. Potrebbe riferirsi a un prodotto semplice da ricordare, con numeri più piccoli oppure con una posizione nella tabella facile da determinare
63	Fed: Facciamo la 7×6 [la indica]. Eh... te colori 7×6 [la indica nuovamente] La... [fa un gesto rotatorio con la mano, Fig. 11.1.3.1] 6×7, cambia solamente la posizione perché la 7×6 è per così [muove il dito in verticale, dal basso verso l’alto, all’interno della casella], la 7×6 è per... [poggia il dito sulla 6×7 e lo fa scorrere in orizzontale, da sinistra verso destra].	Qui il riferimento è sempre all’artefatto. Qui, come sopra, 7×6 è usato come nome di una casella. Quindi Fed, prima identificava le caselle col risultato, ora con il prodotto delle due dimensioni “cambia solamente la posizione” può essere considerato un primo enunciato della proprietà commutativa, se fosse riferito esplicitamente ai fattori. Si riferisce però alle caselle, è quindi un segno artefatto che ha la potenzialità di far emergere il significato di propr. comm. relativo alla moltiplicazione. Si noti che per descrivere la posizione, i gesti suppliscono laddove i	

		termini mancano. Questi gesti sono veri e propri segni artefatto e stanno per verticale e orizzontale	
64	Sam: È orizzontale .	“orizzontale” è un segno che può essere messo in relazione con il gesto di Fed, ovvero lo traduce in modalità verbale; il segno ‘orizzontale’ già era stato usato precedentemente e condiviso (linee 19 e 21) per descrivere le posizioni delle caselle; anche questo è un segno artefatto	
65	Fed: La 6×7 è in orizzontale e la 7×6 è in verticale .	Prende in prestito il termine di Sam e riformula e completa la frase che aveva iniziato prima (linea 63) e descrive anche la posizione della casella simmetrica.	
66	M: Cambia soltanto la posizione [lo scrive alla lavagna integrando la scritta disegnando le due caselle, lo si può osservare considerando la prima parte della frase e i disegni in Fig. 11.1.3.2].	Fa eco alle parole del bambino Aggiunge queste parole a quanto scritto prima creando quindi un unico testo di segni misti per tipologia	Focalization+Provide a synthesis Fa eco alle parole del bambino, scrivendole alla lavagna insieme alle altre fa una sintesi della discussione avvenuta finora: suggerisce che questa frase completi il testo già scritto/disegnato prima

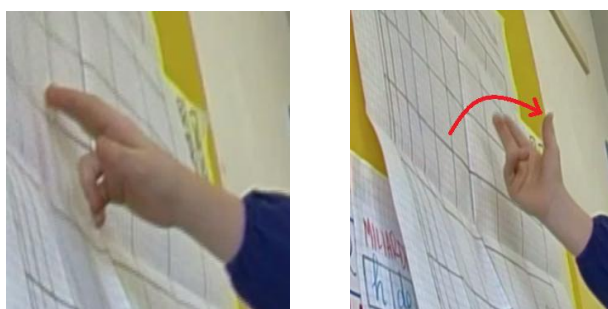


Fig. 11.1.3.1: Gesti di Fed di fronte alla tavola appesa alla parete.

Evoluzione dei segni Come riportato nell’estratto 19, la discussione di classe viene portata avanti da Fed che, con un’argomentazione, arriva a concludere che nella coppia di caselle “cambia solamente la posizione” (linea 63). Lo studente mostra difficoltà a portare avanti il proprio argomento finché non si trova di fronte all’artefatto (linee 54-58). Quando è di fronte alla tavola, riesce a determinare un esempio (linea 63), ma non sembra che il bambino ritenga che questa proprietà valga soltanto per quella specifica coppia (dice “se tipo te fai...”, linea 60, oppure “facciamo la...”, linea 63), sembra piuttosto che si tratti di un *esempio generico* (nel

senso di Balacheff, 1988). Si noti, però, che la maestra utilizza proprio lo stesso esempio di Fed nei segni grafici che propone alla lavagna (Fig. 11.1.3.2): le parole del bambino e la sua attività di fronte alla tabella, si trasformano nel disegno dell'insegnante, si ha quindi la trasformazione di una rappresentazione afferente a un insieme semiotico a una appartenente a un altro, la cosiddetta *conversione genetica* (Arzarello, Semiosis as a multimodal process, 2006).



Fig. 11.1.3.2: Scritture alla lavagna prodotte dall'insegnante durante la discussione.

Ancora, tornando all'argomentazione di Fed, è possibile notare che il gesto di rotazione fatto con la mano (Fig. 11.1.3.1) sembra supportare il suo discorso (linea 63): il riferimento al cambiamento di posizione delle caselle viene subito dopo il movimento che, apparentemente, evoca l'azione effettuata con il cartoncino (Fig. 11.1.2). Tale gesto può essere interpretato anche come gesto metaforico che fa riferimento al cambiamento in modo generico. Altri gesti che intervengono a supporto dell'argomentazione del bambino sono i continui pointing a caselle che permettono di esplicitare in modo deittico riferimenti che sarebbero più complessi da realizzare nel parlato.

Infine, è evidente in questo stralcio di discussione che le diverse voci della discussione si "mescolano". In particolare, Sam (linea 64) riporta le parole utilizzate prima da Pet (linea 19) e sulle quali ha focalizzato l'insegnante (linea 21). Fed integra tali parole nella propria descrizione delle posizioni delle caselle (linea 65).

Ruolo dell'insegnante L'insegnante focalizza sull'intervento di Fed integrando la sua conclusione nel testo iniziato precedentemente. Questo continuo ruolo di focalizzazione e sintesi (attraverso la scrittura alla lavagna) sembra mostrare il suo effetto quando Sam decide di riutilizzare un termine introdotto all'inizio della discussione (e trascritto alla lavagna). Pertanto, sebbene gli interventi verbali della maestra siano pochi, la conversione del parlato in scritto e grafico portata avanti sembra avere un peso importante all'interno di questa discussione. Di fatto, ciò che viene scritto viene istituzionalizzato e, a differenza dei gesti e del parlato, rimane visibile nella parte successiva della discussione.

In questa parte di discussione appare anche evidente l'importanza della scelta fatta dall'insegnante di porre un cartellone con la tavola vicino alla lavagna. Di fatto, la presenza fisica dell'artefatto consente ai bambini l'utilizzo di gesti di pointing e simulazioni di azioni per riferirsi alle parti dell'artefatto.

Estratto 20			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
67	M: C'era And vero? Vai And!		
68	And: Volevo dire che... come si dice... che tipo sei hai 3×9 e trovi il 3×9, il risultato è sempre lo stesso.	Segno apparentemente matematico L'espressione "che tipo" segnala l'esempio generico e esprime la generalità della proprietà, il sempre invece mi sembra riferito al fatto che il primo risultato (3×9) è uguale a quello nell'altra casella	
69	Sam: Vale la proprietà commutativa.	Segno matematico	
70	And: Tipo se fai il 3×9 in una casella...	Segno artefatto: sembra riferirsi proprio all'operazione scritta dentro alla casella mentre svolgevano la consegna	
71	Sam: Eh appunto: le caselle colorate hanno sempre lo stesso risultato	Frase ibrida: parla di caselle colorate, quindi fa riferimento all'attività svolta. D'altra parte però, dopo aver fatto riferimento alla proprietà commutativa (linea 69), dice "hanno sempre lo stesso risultato" ma in riferimento alla caselle. Si noti la presenza del "sempre" che suggerisce generalità dell'affermazione	
72	M: [scrivendolo alla lavagna, si veda Fig. 11.1.3.2] Il risultato non cambia. Bene. Non ricordo chi era il terzo che ho detto prima. C'era una mano alzata. Sam, però ha parlato adesso perché era molto d'accordo.	Fa eco alle parole di And e Sam ma inserendo "cambia", cioè ripetendo la frase come era stata detta prima enunciando la propr. comm. (linee 41, 43, 44)	Focalization+Provide a synthesis Fa eco alle parole del bambino, scrivendole alla lavagna insieme alle altre fa una sintesi della discussione avvenuta finora: suggerisce che questa frase completi il testo già scritto/disegnato prima

Evoluzione dei segni Se la parte precedente della discussione aveva il focus su cosa cambia, l'intervento di And (linea 68) sposta l'attenzione su cosa viene conservato: il risultato. Si noti che anche in questo caso, lo studente porta un esempio generico, introdotto dall'espressione "che tipo ..." a supporto della sua argomentazione. La conservazione del risultato citata suggerisce a Sam il riferimento alla proprietà commutativa (linea 69).

Sam fa quindi una sintesi di quanto detto da And mettendo insieme il riferimento all'attività svolta con l'artefatto, 'le caselle colorate', con segni matematici (il risultato). Si noti che

l'insegnante aveva posto in precedenza molta attenzione sulla colorazione delle caselle (linea 50), tale focalizzazione potrebbe essere la causa del riferimento al colore fatto successivamente dagli studenti (sia Sam, sia Fed).

Si noti inoltre che precedentemente si era concluso che i fattori si invertono nelle caselle con lo stesso colore (linee 46-52). In questa parte di discussione invece si arriva a concludere che le caselle dello stesso colore hanno lo stesso risultato. Si hanno quindi gli ingredienti per arrivare a concludere che le caselle in cui si invertono i fattori (ovvero quelle dello stesso colore) hanno lo stesso risultato.

Ruolo dell'insegnante Ancora una volta il ruolo dell'insegnante consiste principalmente nel far eco alle parole dei bambini e riscriverle sulla lavagna (istituzionalizzandole). Si può inoltre supporre che il riferimento alle caselle dello stesso colore fatto da Sam dipenda dall'importanza data precedentemente (linee 46-52) dall'insegnante a questa relazione fra caselle stabilita attraverso l'attività con i cartoncini. Pertanto l'intervento precedente sembra spingere gli studenti a esplicitare il legame fra i segni matematici proposti (la proprietà commutativa e quindi la conservazione del risultato) e i segni artefatto emersi dall'attività e nel corso della discussione.

Estratto 21			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
73	M: Vio?		
74	Vio: Io non ho capito quella cosa che... cambia soltanto la posizione	"cambia soltanto la posizione" è scritto sulla lavagna. Probabilmente la bambina sta leggendo quanto scritto	
75	M: Mh! Chi l'aiuta Vio a capire? Cambia soltanto la posizione...	Fa eco alla domanda e la rilancia ripetendo le stesse parole	Richiesta di significato In questo caso, a differenza di quelli incontrati precedentemente, l'insegnante non sta chiedendo di esplicitare il significato di una parola perché ambiguo ma al fine di farlo condividere a tutta la classe
76	Dan: Geografica!		
77	Mat: No! Verticale e orizzontale .	"verticale" e "orizzontale" sono state usate prima (linee 19, 21, 64, 65) per riferirsi al diverso orientamento delle caselle. Si tratta di un segno artefatto	
78	M: Fab l'aiuti te per favore? Fab aiuti te Vio a capire questo discorso	La maestra ripete qui le stesse parole aggiungendo	Richiesta di significato

	qui? Cambia soltanto la posizione 6×7 o 7×6 [con le mani fa un gesto che rappresenta il rettangolo che viene ruotato, Fig. 11.1.3.3].	il riferimento sia ai segni matematici (in particolare citando l'esempio fatto prima da Fed e poi riportato alla lavagna) sia all'attività svolta con l'artefatto. Tale riferimento è realizzato attraverso il gesto che mima proprio la rotazione del cartoncino.	Come linea 75
79	Fab: Maestra ma è come prima		
80	M: Dai! Vediamo se Vio capisce meglio		
81	Dan: No maestra! Delle volte non cambia!	Dan sembra riferirsi ancora alla posizione; probabilmente si riferisce al caso, messo in evidenza precedentemente, dei quadrati. Prima, Ale aveva notato che i quadrati non hanno una coppia, adesso Dan mette in evidenza che la loro posizione nella tabella rimane sempre invariata.	
82	Fab: Perché 9×9 non cambia, ma il 6×7 sì! Perché il 6×7 fa...	Fab integra l'osservazione di Dan all'interno della sua risposta alla domanda della maestra. Si noti che il prodotto scelto per spiegare il cambiamento dell'operazione è lo stesso appena suggerito dall'insegnante, ovvero l'esempio usato prima da Fed.	
83	Car: Vai lì alla tabella	Prima la maestra ha suggerito a Fed di avvicinarsi alla tavola e questo ha reso più semplice la comunicazione, adesso è una studentessa a suggerirlo.	
84	Fab: 42! E 7×6 fa sempre 42	Questa frase completa la linea 82. “sempre” non sembra indicare generalità ma piuttosto il fatto che la proprietà “Fare 42” valga anche per 7×6	
85	M: Che dici Viola?		

86	Fab: Lì sono uguali...	"Lì" potrebbe significare "lì sulla tabella", ovvero potrebbe essere un riferimento alla congruenza delle caselle simmetriche.	
87	Fed: Eh ma cambia la posizione: orizzontale e verticale !	Tutti i termini utilizzati si riferiscono all'artefatto. Questa frase è una sintesi di quanto emerso nella parte precedente della discussione.	
88	Nic: È come...		
89	M: Fab e Vio venite al cartellone dai	Qui è la maestra a invitare entrambi i bambini a spostarsi verso la tavola	
90	Fab: Ma io l'ho già capito!		
91	M: Ti sto chiedendo di aiutare Vio. Puoi farlo?		
92	Fab: [va di fronte alla tabella] Allora il 7 dov'è?		
93	M: Aspetta		
94	Fab: Dov'è il 7? [scorre col dito sulla prima colonna della tabella, arriva in fondo e poi risale contando] 10, 9, 8, 7. Visto?! Qui c'è il 7 e qua...c'è il...6. Se li unisci fa 7×6 che fa... fa 42 . E se fai ugualmente 6×7 fa sempre 42 .	"unisci" potrebbe riferirsi all'incrocio della 7a riga e 6a colonna oppure alla giustapposizione dei due numeri nella scrittura simbolica del prodotto. L'uso di "ugualmente" specifica il significato dell'"sempre" utilizzato prima (linea 84) Anche se deve spiegare il cambiamento della posizione del cartoncino, Fab fa riferimento solo al contesto matematico	
95	M: La posizione , eh. Pensa a quando si mettono sul cartoncino , Vio.	La maestra richiama il contesto dell'artefatto, forse proprio nel tentativo di mettere in relazione quello che Fab ha richiamato nel contesto matematico con l'attività svolta.	Back to the task
96	Vio: Ah!		
97	M: Per trovare se c'è la casella	Questo è un riferimento esplicito alla consegna svolta individualmente con l'artefatto.	Back to the task
98	ND: Ah sì, ho capito!		

99	Vio:	Ah, ho capito!		
100	M:	Ok adesso?		
101	Vio:	Sì M: Bene. Grazie Fab		
102	M:	Bene. Grazie Fab		



Fig. 11.1.3.3: Gesti dell'insegnante durante la discussione.

Evoluzione dei segni In questa parte di discussione Fab è chiamato a chiarire il dubbio espresso da Vio circa l'espressione "cambia soltanto la posizione". A prescindere dal fatto che l'intervento dello studente sia stato più o meno efficace in tal senso, si può notare che l'espressione "cambia soltanto la posizione" (linee 74-75) viene interpretata da Fab in relazione al contesto matematico. Fab risponde seguendo l'esempio suggerito dall'insegnante, dichiarando che "9×9 non cambia, ma il 6×7 sì! Perché il 6×7 fa... 42! E 7×6 fa sempre 42" (linee 82-84). Nessuno dissente dalla spiegazione di Fab, ma altri studenti interpretano invece l'espressione "cambia soltanto la posizione" in relazione al contesto dell'artefatto. Infatti viene suggerito che il cambiamento consista nel passaggio da orizzontale in verticale (linee 77 e 87). Pertanto questa espressione, interpretabile nell'uno e nell'altro contesto, funge da pivot, permettendo di creare un collegamento fra i segni artefatto e quelli matematici.

Si noti inoltre che in tutta questa parte di discussione viene sempre utilizzata la parola "cambia" (evidenziata in verde), quando invece prima, per riferirsi al cartoncino veniva utilizzato "si inverte" (linea 25) mentre la parola cambia era utilizzata solo nell'enunciato della proprietà commutativa recitato grazie al richiamo diretto dalla memoria (linea 41).

Ruolo dell'insegnante Durante questa parte di discussione, l'insegnante spinge sempre a mantenere il collegamento fra quanto viene affermato attraverso il ricorso a segni matematici e l'attività svolta con l'artefatto. Inizialmente viene fatto con i gesti: mentre a parole si parla delle operazioni (linea 77), i gesti (Fig. 11.1.3.3) mimano l'attività col cartoncino. L'insieme di gesti e parole crea un collegamento fra segni matematici e segni artefatto, una sorta di segno pivot multimodale. Viene poi promosso il richiamo dell'artefatto chiedendo ai bambini di andare di fronte alla tabella (linea 89) e, infine, facendo un esplicito riferimento verbale al cartoncino e alla consegna svolta (linee 95 e 97).

11.1.4 Significati geometrici emergenti

La discussione prosegue riportando quanto emerso nel lavoro in piccoli gruppi. La maestra chiede esplicitamente altri interventi di questo tipo. La prima a rispondere è Pet.

Estratto 22			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
103	Pet: Noi abbiamo scritto che hanno in comune i fattori , l' area e son tutti rettangoli .	In questo intervento Pet riporta quanto emerso nella discussione del suo gruppo (linee 8-17). Manca il soggetto della frase ma il riferimento sembra essere alle caselle colorate. Le parole usate provengono sia dal discorso dell'aritmetica (fattori) sia da quello della geometria. Si tratta di segni matematici ma solo "fattori" si riferisce direttamente al significato di proprietà commutativa che si vuole costruire. Gli altri potrebbero essere messi in relazione con i corrispondenti significati aritmetici Area -> risultato Rettangolo -> moltiplicazione	
104	M: Allora: si parla di fattori [scrive la parola fattori accanto ai rettangoli disegnati, completando così l'iscrizione mostrata in Fig. 11.1.3.2]. In che senso ce li hanno in comune i fattori?	La parola fattori viene messa insieme al testo prodotto precedentemente. In questo modo la maestra associa la frase "cambia la posizione" (scritta prima) con la parola fattori. Questo collegamento viene fatto solo nelle iscrizioni, non è esplicitato a parole	Provide a synthesis Unisce il nuovo intervento a quelli precedenti inserendo "fattori" nel testo già scritto precedentemente Richiesta di significato "In che senso..."
105	Pet: I fattori ? I numeri [fa un gesto rotatorio con la mano] Si scambiano [ripete il gesto]	Il gesto è metaforico, viene usato il movimento di rotazione per esprimere l'idea di "scambio". Nello stesso tempo può richiamare l'attività svolta col cartoncino	
106	M: Si scambiano ma sono gli stessi . Poi, oltre ai fattori , hanno in comune... hai detto?	Si noti che la maestra divide l'intervento di Pet in modo da parlare prima del contesto aritmetico, solo dopo passa ai	Provide a synthesis Completa la frase della bambina aggiungendo "ma sono gli stessi", osservazione che era

		significati geometrici che stanno emergendo	emersa sempre da Pet
107	Pet: L'area.		
108	M: L'area [lo scrive alla lavagna]		Focalization Riscrive alla lavagna quanto detto da Pet
109	Pet: E sono tutti rettangoli.		
110	M: Sono tutti rettangoli [lo scrive]. Avete da commentare? [...] Altre osservazioni?		Focalization Chiede di commentare

Evoluzione dei segni Le frasi utilizzate da Pet contengono riferimenti sia al contesto aritmetico sia a quello geometrico. Finora si è parlato del fatto che le caselle colorate hanno le stesse dimensioni e hanno lo stesso risultato. Qui Pet afferma che le moltiplicazioni hanno gli stessi fattori e la stessa area (linea 103). In questo tipo di frasi, i significati dell'uno e dell'altro contesto si mescolano, a testimoniare che il segno "casella" per gli studenti rappresenta la moltiplicazione comprensiva dei suoi fattori e del risultato così come un rettangolo con le sue dimensioni e la sua estensione superficiale. Queste osservazioni erano già state fatte nel piccolo gruppo (linee 8-17), Pet però le integra aggiungendo quanto è emerso finora nella discussione: i fattori si scambiano (linea 105). La maestra ne approfitta per fornire una sintesi: si giunge a dire che i fattori si scambiano ma sono sempre gli stessi (linea 106).

Si noti che quando parla di "scambiare", Pet utilizza gesti di rotazione delle dita (linea 105). Tali gesti sono emersi in più punti della discussione e negli interventi di diversi bambini, così come in quelli della maestra. Se in casi precedenti (Fig. 11.1.3.3) è evidente il riferimento di questo tipo di gesto all'artefatto, qui non è chiaro se Pet stia mimando la rotazione del cartoncino oppure usi un generico gesto metaforico che si riferisce al cambiamento (di cui il movimento circolare è, appunto, metafora).

Ruolo dell'insegnante L'insegnante approfitta dell'intervento di Pet per integrare i nuovi termini nel discorso che si sta formando attraverso la discussione. Si noti che, attraverso il completamento del testo mostrato in figura 11.1.3.2, l'insegnante mette insieme i diversi segni che hanno il potenziale di portare verso il significato di proprietà commutativa, obiettivo di questa discussione. In particolare, prima dell'intervento di Pet, si era arrivati a dire che, fra le due caselle colorate, cambia la posizione. L'insegnante aveva già collegato questo cambiamento di posizione al cambiamento dell'ordine dei fattori disegnando i due rettangoli contenenti le operazioni con i fattori scambiati. Aggiungendo la parola "fattori" (linea 104) sembra suggerire un'interpretazione matematica del testo precedente. Questa aggiunta fatta nello scritto, non viene però commentata a parole. L'interpretazione del testo alla lavagna viene lasciata ai singoli studenti.

Alla fine l'insegnante sollecita altri commenti. Interviene Ale che però non fa riferimento a quanto detto da Pet ma aggiunge un intervento personale alla discussione.

Estratto 23

	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
111	Ale: Posso prendere un pennarello? [prende il pennarello e va verso il cartellone] Aspetta eh... Sto cercando eh... [scrive 81 in 9×9]. Vedi questo 81? Se si scrivono tutti i numeri 1 [lo scrive in 1×1], 4 [lo scrive in 2×2], 9 [lo scrive in 3×3], tutti qua [scorre col dito lungo la diagonale principale della tabella] sembra un asse di simmetria e questi qua [fa un ampio gesto rivolto verso le caselle che si trovano al di sotto della diagonale, poi lo stesso di fronte a quelle sopra la diagonale] sembrano dei rettangoli pieni di numeri. Eh sì, rettangoli... triangoli! Scusate.	“asse di simmetria” È un segno matematico. Il riferimento a questo aspetto della tavola emerge subito in termini geometrici, dato che questi fanno parte delle conoscenze degli studenti. In particolare lo studente nota che la tabella è divisa in due parti (triangoli) Il discorso geometrico introdotto da Pet continua con l'intervento di Ale	
112	M: Va bene Ale.		
113	Rau: Abbiamo capito!		
114	M: Perfetto.		
115	Ale: Sembrano due triangoli, con un asse di simmetria. Che soltanto questi qua [indica i rettangoli al di sopra della diagonale] sono in orizzontale e questi [indicando le caselle sotto la diagonale] in verticale.	L'intervento di Ale prosegue mettendo in relazione i triangoli da lui osservati con la descrizione fatta prima per le posizioni delle caselle: “verticale” e “orizzontale” le osservazioni sono sempre sul piano dell'artefatto ma si tratta di un'osservazione generale che divide le moltiplicazioni in due categorie: quelle in cui il primo fattore è maggiore del secondo e quelle per cui vale il viceversa.	
116	M: Quest'asse di simmetria, divide la nostra tabella in due parti uguali.	A differenza di quanto fatto in precedenza, non vengono richiesti commenti. Evidentemente viene valutato molto positivo il potenziale di questo tipo di affermazione che viene ripetuta, ma sintetizzata inserendo anche il riferimento all'uguaglianza ma non più alle posizioni delle caselle.	Focalization+Provide a synthesis

Evoluzione dei segni L'intervento di Ale fa emergere una delle caratteristiche dell'artefatto che, nell'analisi a priori del potenziale semiotico (sez. 7.2), si era collegata al significato di proprietà commutativa come relazione di equivalenza fra moltiplicazioni "simmetriche", ovvero con gli stessi fattori disposti in ordine inverso. A differenza di quanto succede nella classe seconda, Ale utilizza da subito il segno matematico del discorso geometrico "asse di simmetria" (linea 111). Lo fa per mettere in relazione due parti della tabella: la matrice triangolare superiore che contiene tutti i rettangoli in "orizzontale" e quella inferiore che contiene quelli in "verticale" (linea 115). Lo studente si riferisce quindi agli aspetti geometrici /figurali dell'artefatto senza mai fare un esplicito riferimento al contesto aritmetico.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante, forse notando la potenzialità di collegare il significato geometrico di simmetria all'operazione sintattica di inversione dei fattori, focalizza immediatamente su questo intervento. Ne fa una sintesi (linea 116) sottolineando che l'asse di simmetria, in quanto tale, divide la tabella in due parti "uguali". Viene invece perso il riferimento alle posizioni delle caselle.

In definitiva, emergono chiaramente termini inclusi nelle conoscenze geometriche degli studenti ma, mentre nel caso dell'intervento di Pet, questi sono messi in relazione con alcuni dei significati aritmetici emersi nel corso della discussione, nel caso di Ale invece il discorso rimane tutto sul piano figurale.

11.1.5 Ancora sui quadrati: se lo scambi, rimane sempre uguale

La discussione viene portata avanti da un intervento di Fab lo studente precedentemente intervenuto per chiarire il dubbio di Vio. Il bambino si sta ancora interrogando sul modo in cui lo scambio dell'ordine dei fattori agisca sui quadrati.

Estratto 24			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
117	Fab: Io avrei una domanda. Ma perché quelli per esempio 9×9 , 8×8 , 7×7 ...ehm...non hanno niente in comune ?	"in comune" Sembra riferirsi alla mancata presenza di una casella con cui fare "coppia"	
118	M: Non hanno...		
119	R: Be', non è difficile rispondere. Se ci pensi cosa abbiamo detto che hanno in comune , invece, gli altri ?	"in comune" Riutilizza l'espressione del bambino ma in riferimento a "gli altri". Fab non ha esplicitato il riferimento ai quadrati ma gli esempi portati sembrano suggerire il riferimento a questi prodotti. Quindi "gli altri" va a riferirsi ai prodotti con due fattori differenti	Ask for a synthesis

120	Fed: I lati	Si tratta di un segno artefatto: è una delle cose scritte alla lavagna, chiaramente si riferisce alle lunghezze dei lati dei rettangoli Nel discorso geometrico è interpretabile come un segno matematico, ma non è uno dei segni obiettivo di questa discussione.	
121	Fab: Ehm...Se cambi il numero...se cambi il numero il risultato è sempre uguale , sono...	Qui Fab sta fornendo un enunciato della proprietà commutativa così come è maturata nel corso di questa discussione. Tuttavia, parla di “cambiare il numero” piuttosto che la posizione (così come veniva detto nell’enunciate mnemonicamente ripetuto)	
122	R: Se cambi che cosa dei numeri?	Qui sembra che R si attenda come risposta “l’ordine”	Ask for a synthesis La richiesta di sintesi viene fatta dando un supporto alla formulazione, ovvero specificando che c’è una caratteristica del numero da variare e non il numero stesso
123	Fab: I fattori.	Fab interpreta la domanda di R come una richiesta di uso di termini matematici	
124	R: Che cosa devi cambiare dei fattori ? Cambi proprio numero ?	La prima domanda è praticamente la stessa della linea 122 in cui alla parola “numeri” è stata sostituita “fattori” dopo che il bambino l’ha usata. La seconda domanda invece esplicita la richiesta	Ask for a synthesis Come riga 122, ma più esplicito
125	Fab: No, li...per esempio 7×6 . Eh. Se metti 6×7 i risultati sono uguali .	Il bambino non riesce ad affermare la proprietà generale “cambia l’ordine” ma lo fa con un esempio (lo stesso usato in precedenza) fornendo quindi un enunciato della proprietà commutativa dipendente da un esempio che funge da esempio generico.	

		Qui c'è un riferimento all'uguaglianza fra i risultati. La parola "uguali" è qui utilizzata per dire che hanno lo stesso numero come risultato.	
126	R: Ok. Se invece prendi due numeri uguali . Fammi un esempio con due numeri uguali.	Qui viene usato di nuovo "numeri" per indicare i fattori. Stavolta però, R si vuole assicurare di interpretare la parola allo stesso modo del bambino, chiede quindi a lui di fornire l'esempio.	
127	Fab: 5×5 .		
128	R: Ok! Ora che cosa..come fai a scambiarli? Che cosa ti viene se li scambi?	Qui si parla dell'operazione di scambiare i fattori nel contesto della scrittura. Non c'è più riferimento all'artefatto ma si lavora sul piano sintattico, quindi sul senso della struttura	Ask for a synthesis
129	Nic: 5×5 .		
130	Fab: 5×5 .		
131	R: Rimane sempre se stesso!		
132	Fab: Eh ma...solo se li scambi perché però vien sempre 5×5 .		
133	R: Eh! È rimasto sempre uguale . Se lo scambi rimane sempre uguale	Qui viene data una sintesi riferendosi all'esempio, ma dando una frase che potrebbe fungere come risposta generale alla domanda iniziale di Fab (linea 117) Quando si dice "uguale" ci si riferisce all'uguaglianza fra le operazioni e non fra i risultati.	Provide a synthesis
134	Nic: Perché è lo stesso numero .	Questa sembra essere la conclusione di Fab, la risposta che dà alla propria domanda: non cambia perché è sempre lo stesso numero.	
135	R: È sempre lo stesso numero sì.	Fa eco alle parole del bambino.	Provide a synthesis

Evoluzione dei segni In questa parte di discussione, il discorso si sposta sul piano sintattico e, tranne per l'intervento di Fed (linea 120), è tutto composto di segni matematici. Si noti che, così come avvenuto in precedenza, Fab ha difficoltà ad esprimere la trasformazione sintattica (cambiamento dell'ordine dei fattori) in termini generali; necessita di un esempio generico per rispondere alle domande dell'insegnante rispetto a cosa cambia effettivamente (linea 125). In questa parte di discussione, viene utilizzata la parola "uguale" con due interpretazioni differenti: Fab usa questo termine per riferirsi all'uguaglianza fra i risultati (linea 125), l'insegnante invece lo impiega per riferire la mancata variazione della struttura sintattica dell'operazione 5×5 dopo lo scambio dei fattori (linea 133).

Si noti inoltre che, dopo che il bambino ha usato l'esempio di 7×6 e 6×7 per spiegare la trasformazione a cui si riferisce, l'insegnante inizia a usare la parola "scambi" (linea 128 e segg.). Questo termine viene integrato rapidamente anche nelle parole del bambino (linea 132).

Ruolo dell'insegnante L'insegnante, probabilmente perché nota che il bambino fa sempre ricorso ad esempi per portare avanti le sue argomentazioni, non dà una risposta generale alla domanda del bambino. La risposta viene costruita attraverso un continuo alternarsi di domande e risposte in cui viene anche chiesto a Fab di fornire un esempio opportuno per portare avanti l'argomento (linea 126). Solo dopo questo passaggio (linea 127), l'insegnante fornisce una risposta data dalla sintesi degli interventi precedenti propri e del bambino (linea 133).

L'intervento di Fab prosegue dopo la parte di trascrizione riportata nell'estratto 24. In particolare il bambino chiede di poter fare un'ulteriore domanda: chiede se è possibile utilizzare la tabella per verificare che le proprietà osservate valgono anche per moltiplicazioni con numeri superiori al 10. La maestra fa quindi terminare la discussione in questo momento perché il problema posto da Fab servirà ad avviare un ulteriore ciclo didattico.

11.1.6 Per la tabella vale la proprietà commutativa: elaborati individuali

Al termine della discussione riportata nelle sezioni precedenti, l'insegnante fornisce un'ulteriore consegna individuale agli studenti. Le parole utilizzate per formularla sono le seguenti:

M: Vi chiedo di scrivere un po' quello che si è fatto stamattina e di provare a descrivermi un po' questa proprietà commutativa per come l'abbiamo vista insieme, per come l'avete pensato.

Tutti i bambini svolgono questa consegna fornendo un'elaborazione personale del discorso emerso durante la discussione. Di fatto, confrontando i segni utilizzati in questi testi con quelli prodotti durante la discussione, è possibile notare che nessuno recita l'enunciato della proprietà commutativa richiamandolo semplicemente dalla memoria (come aveva fatto Mar durante la discussione) ma lo fa inserendo nel proprio discorso le voci dell'insegnante o dei compagni.

Mat: La proprietà commutativa non funziona sull'**asse di simmetria** della tabella perché se c'è **5×5** come fai a farla. Puoi farlo solo è **sempre 5×5** invece c'è 9×2 vai in quell'altra colonna e c'è 2×9.

In questo protocollo Mat utilizza l'espressione "asse di simmetria" per riferirsi alla diagonale principale della tabella, integrando quindi nella propria frase quanto detto durante la discussione da Ale (linea 111). Si noti anche che l'esempio di quadrato scelto coincide con quello utilizzato precedentemente da Fab (linea 127); anche l'espressione "è sempre 5×5" richiama le parole utilizzate da Fab (linea 132) e dall'insegnante (linea 131).

In questo protocollo si può inoltre notare che la proprietà commutativa (già nota ai bambini come proprietà dell'operazione) viene associata all'artefatto. Le frasi usate dai bambini sono spesso frasi ibride in cui compaiono termini matematici ma anche segni artefatto.

Sar: Oggi abbiamo lavorato sulla **tabella** e abbiamo osservato che in delle **caselle** c'è la **proprietà commutativa**. Se scegli una **casella** non nella **diagonale** se andiamo nella **diagonale** di quella **casella** troviamo un'altra **casella congruente** ed **equiestesa**.

Pet: Oggi abbiamo fatto anzi scoperto che nella **tabella** ci sono tanti **fattori scambiati** diciamo **invertite** come la **proprietà commutativa**. La proprietà commutativa: nella proprietà commutativa abbiamo osservato che nella tabella solo **dei numeri** **si possono invertire** tipo **6×7 7×6** ma altri come **10×10 rimane sempre 10×10**.

Confrontando questi due protocolli è possibile notare che l'alternanza di termini geometrici (in nero) e aritmetici (in rosso) notata durante la discussione ritorna anche negli elaborati individuali. Per esempio, nel protocollo di Sar viene fatto riferimento all'equiestensione e congruenza delle caselle colorate mentre in quello di Pet appaiono maggiori riferimenti alla relazione aritmetica che è obiettivo del processo di mediazione semiotica attuato. Anche in questo protocollo è possibile notare l'uso di uno degli esempi emersi durante la discussione (ovvero il prodotto 6×7).

Ci sono tre protocolli che costituiscono un'eccezione perché le frasi utilizzate non sono ibride. I primi due sono quelli di Car e Fab che, nell'enunciare la proprietà commutativa, fanno uso soltanto di segni matematici, l'altro è prodotto da Nic e contiene solo segni artefatto.

Car: Secondo me la proprietà commutativa è una cosa che **i fattori non cambiano** e il **risultato è lo stesso** cioè non cambia tipo se facciamo **9×3=27** possiamo fare **3×9=27** e **il risultato non cambia**.

Fab: Lavorando sulla tabella abbiamo osservato molte cose e non so cosa dire. Che **se i fattori si invertono il risultato è sempre uguale**.

Nic: abbiamo fatto una tabella e abbiamo visto che **i numeri obliqui** non ci sono **doppi** ma ce ne sono **solo una** mentre gli altri hanno **una coppia** e **sono rettangoli**.

Si noti che Car fa uso di un esempio per descrivere l'inversione dell'ordine dei fattori, Fab invece riesce ad esprimerlo con termini generali, integrando nel proprio enunciato il termine "invertono" che era stato introdotto nella discussione da Ric (linea 25). Nel caso di Nic, invece, i significati che emergono sembrano riferirsi tutti all'attività svolta con l'artefatto e non è presente nessun riferimento all'operazione di moltiplicazione, all'inversione dei fattori o all'uguaglianza dei risultati. Si può notare che differenze sono riscontrabili nell'elaborazione linguistica: il testo di Car è un'unica frase in cui sono legati l'affermazione generale e l'esempio che funge quindi da "verifica" della proprietà stessa. Le produzioni di Fab e Nic mettono invece in evidenza solo la proprietà.

11.1.7 L'artefatto come "ponte" fra significati aritmetici e geometrici

Come si è messo in evidenza nel corso dell'analisi delle trascrizioni, questa discussione è caratterizzata dal riferimento sia agli aspetti figurali della tabella e quindi all'uso di termini appartenenti al discorso della geometria, sia alle relazioni aritmetiche oggetto di esplorazione. Nel caso degli studenti della classe quinta, non si tratta di nuovi apprendimenti, ma vengono messi in relazione significati che, probabilmente, prima non lo erano.

Di fatto, nel corso della discussione, l'associazione fra rettangoli e moltiplicazioni permette di associare proprietà delle figure a quelle dell'operazione. Dal punto di vista dell'esperto, è possibile associare i lati del rettangolo ai fattori e quindi il cambiamento di posizione del rettangolo all'inversione dei fattori. L'invarianza dell'area è associabile alla conservazione del risultato. Questo tipo di associazione è raramente realizzato in modo esplicito o diretto, ma generalmente avviene mediante l'uso di frasi ibride in cui compaiono sia termini aritmetici sia termini geometrici.

L'associazione fra rettangoli e moltiplicazioni viene esplicitata all'inizio della discussione quando viene detto che le caselle corrispondono a moltiplicazioni (linee 22-23). Inoltre la maestra fa notare questa associazione mimando con le mani un rettangolo mentre a parole vengono associate delle moltiplicazioni (Fig. 11.1.3.3). Questa equivalenza sembra utilizzata anche quando si fa riferimento al quadrato (come figura) dicendo che ha gli stessi fattori (linea 19) oppure in quelle frasi in cui si dice che i fattori si scambiano ma l'area rimane la stessa (linee 103-108). Queste frasi mettono anche in relazione i fattori con l'area senza che però i primi siano mai messi in relazione diretta con i lati o che l'area sia messa in relazione col risultato.

L'area viene messa in relazione col risultato della moltiplicazione in modo indiretto. Di fatto viene messo in evidenza che le caselle colorate hanno lo stesso risultato (linea 68, linea 71) e anche che le caselle dello stesso colore sono "uguali di dimensioni" (linee 49 e segg.) ovvero congruenti (linea 17). Il fatto che gli studenti ritengano che figure congruenti siano equiestese è esplicitato da Sar nel protocollo riportato nella sezione precedente. La congruenza è valutata nel contesto dell'artefatto tramite la sovrapposizione del cartoncino, così come richiesto dalla consegna.

Si ha una grande ricchezza di termini anche per riferirsi all'operazione sintattica di inversione dei fattori. Inizialmente viene descritta come "rigirare" (linea 5) ottenendo il rettangolo "per così" e "per così" (linea 7). Queste posizioni vengono indicate come "orizzontale" e "verticale"

in seguito (dalla linea 19) e viene detto che “si invertono” (linea 25). Successivamente, viene utilizzato il termine “scambiano” (linea 39, linea 103) per riferirsi ai fattori; nel caso dei rettangoli si dice che “cambia solo la posizione” (linea 63 e segg.).

Più che una vera e propria catena semiotica, viene a evidenziarsi una complessa rete di significati. L'insieme dei segni coinvolti è schematizzato in figura 11.1.7.1. Le tre fasce orizzontali contengono i segni che si riferiscono ad uno stesso contesto (geometrico, artefatto e aritmetico). Sulla stessa colonna in verticale si trovano i segni che, agli occhi dell'esperto, possono essere messi in relazione. Le linee invece rappresentano le connessioni create durante la discussione.

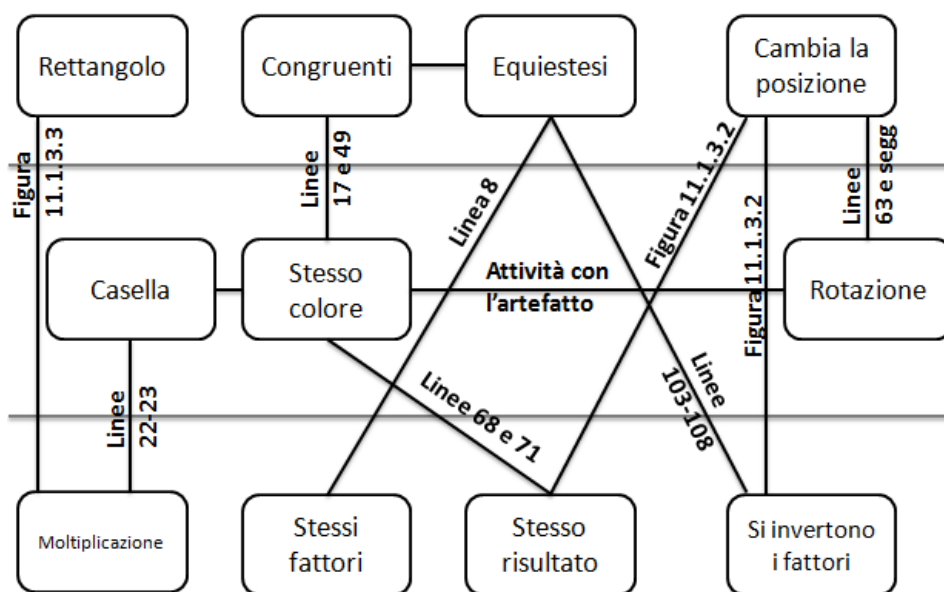


Fig. 11.1.7.1: Schematizzazione delle relazioni tra i segni emersi nella discussione.

11.2 Proprietà distributiva nella classe quinta

Per gli studenti di quinta sono state implementate le stesse consegne descritte nella sezione 7.3, che agli occhi dell'esperto possono essere associate alla proprietà distributiva. A differenza degli studenti della classe seconda, quelli di quinta utilizzano da subito la tavola di Laisant nella versione con 10 righe e 10 colonne.

Nella sezione 11.2.1 si analizza l'attività relativa alla consegna di composizione e la successiva discussione collettiva mentre la sezione 11.2.2 è dedicata alle produzioni individuali degli studenti.

11.2.1 Distributività come composizione

L'analisi qui proposta si riferisce alla consegna di colorare due caselle della tabella che si trovano nella stessa riga per poi individuare le moltiplicazioni a cui corrispondono (sez. 7.3). Si chiede agli studenti di ritagliare due cartoncini delle stesse dimensioni delle caselle colorate, incollarli in modo che formino un unico rettangolo e quindi andare a cercare nella tabella una casella a cui questo rettangolo di cartoncino possa sovrapporsi esattamente. Ciascuno studente svolge questa consegna individualmente.

Successivamente, gli studenti vengono divisi in piccoli gruppi. Si chiede ad ogni gruppo di mettere in evidenza le somiglianze fra i rettangoli colorati da ciascuno degli studenti di cui il gruppo è composto.

11.2.1.1 L'addizione di due moltiplicazioni: espressioni e parentesi

Nella discussione collettiva, l'insegnante chiede agli studenti di riportare quanto emerso durante l'attività svolta nei gruppi. Joh interviene riportando a voce il particolare caso che lui stesso ha affrontato nell'attività individuale: mettendo insieme i rettangoli corrispondenti a 1×1 e 1×2 ha ottenuto il rettangolo corrispondente a 1×3 . Ale mostra qualche perplessità rispetto al fatto che il risultato sia 1×3 . L'insegnante focalizza l'attenzione dei bambini su questo intervento.

Estratto 25			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
1	R: Vediamo di far chiarezza perché secondo me Ale non è l'unico che è un po' confuso, vero?		
2	Joh: No, io son confuso		
3	Rau: Io son confuso più di tutti voi		
4	R: Allora, Ale dimmi un po' se ho capito il tuo dubbio. Te dici [...] non sono mica molto sicuro di quello che esce fuori se io sommo [fa un gesto con le mani come se compattasse qualcosa, Fig. 11.2.1.1a] due moltiplicazioni . Era questa la cosa?	Il gesto eseguito dall'insegnante mentre parla richiama la metafora della somma come unione, potrebbe anche rievocare l'attività con l'artefatto (incollaggio di cartoncino) anche se gli aspetti iconici del gesto non richiamano in modo esplicito quello che è stato effettivamente fatto con l'artefatto Le parole invece sono segni matematici. L'espressione "sommo due moltiplicazioni" condensa la struttura dell'espressione aritmetica attesa	Provide a synthesis
5	Ale: Sì, e anche un' addizione	Il ragazzo sembra non riconoscere nella parola "somma" usata da R il significato di addizione che però riconosce nell'attività svolta.	
6	R: Eh, poi ci faccio un' addizione , quando dico " sommo " [fa un gesto come se toccasse con le mani la superficie di una sfera, Fig. 11.2.1.1b] intendo dire " fare un'addizione ".	R riutilizza la parola del ragazzo in concomitanza un gesto simile al precedente e alla parola utilizzata prima, crea una frase in cui mescola il proprio intervento, linea 4, e quello dello studente, linea 5. I termini sono tutti in segni	Proposta di significato "quando dico... intendo..." Questa azione sembra avere la

		matematici.	stessa finalità di quella osservata nell'estratto 7, linea 95
7	Ale: Eh già		
8	R: Allora, proviamo a riprendere l'esempio che ci ha fatto Joh per cercare di capire, così magari anche lui ci aiuta a capire quello che voleva dire. Lui dice: se io c'ho 1×1 [nel dirlo lo scrive alla lavagna] e 1×2 [lo scrive sulla lavagna ma leggermente distanziato, Fig. 11.2.1.1d]	I simboli utilizzati per scrivere alla lavagna sono segni matematici.	Back to the task Richiama l'esempio
9	Fab: 1×1 fa 1 e 1×2 fa 2 e se gli unisci fa 3	Per Fab, la finalità dell'attività è determinare il risultato, che è dato dalla somma dei risultati delle moltiplicazioni. Si riferisce alle moltiplicazioni (segni matematici) ma la parola "unisci" ha un significato ambiguo: potrebbe essere una metafora per l'addizione oppure un riferimento all'attività fatta con i cartoncini. => Segno pivot.	
10	R: [annuendo] Ok. Era proprio questo. [scrive =1 in verticale sotto 1×1] Noi sappiamo che 1×1 quindi fa 1 [nel dirlo muove la mano in verticale dall'alto verso il basso indicando la lavagna] e [scrive = in verticale sotto 1×2, completando la Fig. 11.2.1.1d] 1×2 fa... [si volta verso la classe]	R accoglie la proposta di Fab ma integra aggiungendo dei segni grafici: il simbolo di uguaglianza è in verticale e rappresenta l'equivalenza fra moltiplicazione e risultato. Qua può essere interpretato in senso procedurale. Il gesto della mano sembra guidare nell'interpretazione procedurale dei simboli, suggerendo il verso in cui si devono leggere.	
11	Coro: Due!		
12	R: Ok [scrive il 2] poi quello che stavano dicendo adesso i vostri compagni è che poi io posso fare l' addizione [muove le due mani messe in verticale ma leggermente curvate una verso l'altra, Fig. 11.2.1.1c] Giusto? [c'è un mormorio di risposte] Come faccio a indicare che devo fare l' addizione [il gesto viene ripetuto con le mani rivolte verso la lavagna, come a voler compattare le due scritture, Fig. 11.2.1.1e-f] fra queste due moltiplicazioni?	Il gesto usato per "addizione" è simile a quello usato prima per "somma" ma R utilizza la parola che Ale aveva proposto. Il gesto "addizione" viene ripetuto rivolto verso la lavagna quando si parla di "addizione fra queste due moltiplicazioni" come se le mani potessero afferrare le moltiplicazioni e attaccarle. Questo tipo di gesto richiama	Ask for a synthesis

		l'attività fatta con l'artefatto. Se alla lavagna si hanno dei segni matematici, i gesti sono invece dei segni artefatto e il fatto che i gesti siano rivolti verso la lavagna mette in collegamento i due tipi di segno: si ha un segno pivot multimodale.	
13	Marta: cioè...a scriverle?		
14	R: Sì, come faccio a scriverlo? Dimmi Marta, ti ascolto.	Rispondendo positivamente alla richiesta della ragazza, R la invita esplicitamente a produrre segni grafici	Ask for a synthesis
15	Marta: Devi fare...come si chiama? Lì devi metterci il più	Coerentemente, la studentessa non indica l'operazione ma il segno che la rappresenta. Si tratta comunque di un segno matematico.	
16	R: Sì, io volevo dire che vorrei fare questo [fa un cerchio col dito intorno alla prima moltiplicazione poi scrive il segno + subito dopo e nello scriverlo dice] più questo [e stavolta fa girare l'indice intorno alla seconda moltiplicazione] Vi va bene scritto così? [indica la scrittura col palmo della mano aperto, Fig.11.2.1.1h]	La classe ha già condiviso le regole d'ordine delle operazioni quando si svolgono espressioni. Però il gesto di R sembra voler mettere in evidenza la struttura aritmetica e in particolare il fatto che si stiano sommando le due moltiplicazioni. L'insieme delle parole "questo" e del gesto che indica l'intero prodotto fornisce un segno che indica il prodotto nella sua interezza senza la necessità di far ricorso a segni matematici. Il dito crea una sorta di parentesi immaginaria o forse richiama il rettangolo a cui corrisponde la moltiplicazione. Questa seconda interpretazione sembra però da escludersi perché il gesto è proprio circolare mentre in altri contesti l'insegnante mima la forma rettangolare per richiamare proprio i cartoncini o le caselle della tabella.	Provide a synthesis
17	<i>Seguono vari "sì" e "no"</i>		
18	Eri: In realtà andrebbe bene però ci servono le parentesi	L'aver evidenziato la struttura dell'espressione aritmetica	

		potrebbe aver fatto emergere la necessità di usare le parentesi	
		Ancora segni matematici	
19	R: Ah		
20	Nic: Le parentesi !		
21	R: Aspettate un attimo. Eri ci stava dando un suggerimento		Focalization sull'intervento di Eri
22	Nic: volevo dirlo io!		

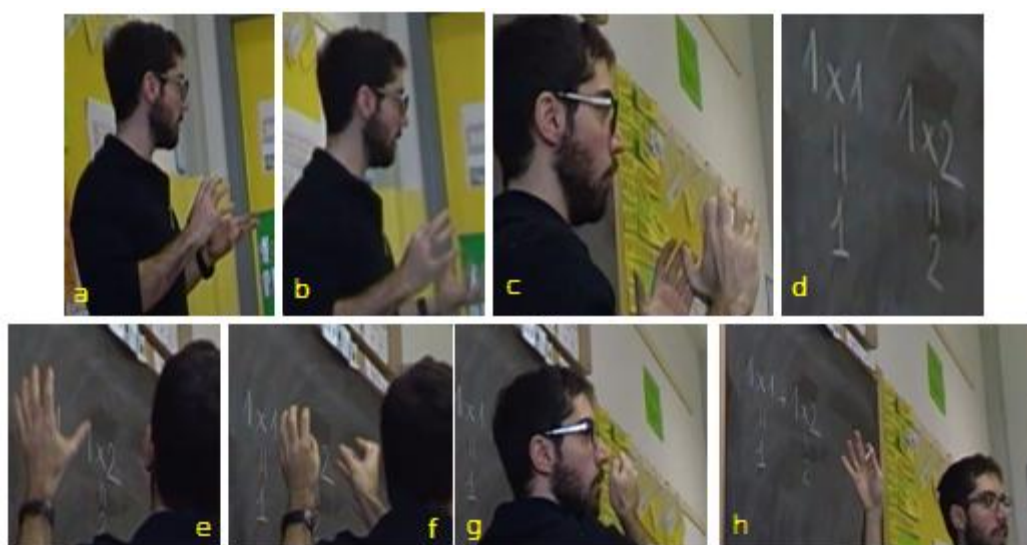


Fig. 11.2.1.1: Gesti dell'insegnante durante la prima parte della discussione.

Evoluzione dei segni Nei suoi interventi, l'insegnante fa spesso ricorso a gesti. Un primo tipo di gesto appare in concomitanza alle parole 'somma' e 'addizione' (la seconda suggerita da Ale, linea 5, e utilizzata poi anche dall'insegnante, linee 6 e 12). Questo gesto sembra rappresentare l'unione di due cose, potrebbe essere quindi un gesto metaforico volto a richiamare un modello intuitivo di somma (come unione di due insiemi). Tuttavia, quando l'insegnante si rivolge verso la lavagna (linea 12), il gesto è rivolto alle moltiplicazioni scritte su di essa. Tenendo conto dell'insieme di parole, gesti e segni grafici si ha quindi l'impressione che il conduttore della discussione voglia richiamare l'azione di "incollaggio" dei due cartoncini rappresentati, in questo momento, dalle due moltiplicazioni scritte alla lavagna. Il gesto è quindi inizialmente iconico (le mani verticali riprendono i lati verticali dei rettangolini ritagliati) e richiama l'attività svolta con l'artefatto: si tratta pertanto di un segno artefatto. Le parole e le scritture utilizzate sono tuttavia dei segni matematici (viene nominata l'operazione di addizione e sono scritte le moltiplicazioni che fungono d'esempio). Il fatto però di utilizzare segni legati al contesto matematico contemporaneamente a gesti che richiamano la consegna svolta con l'artefatto permette di collegare le due tipologie di segni: l'abbinamento di parole/scritture con gesti offre l'occasione per creare un segno multimodale che potenzialmente rimanda contemporaneamente a significati diversi, ovvero un segno pivot.

Successivamente, i due prodotti sono indicati con la parola 'questo' (linea 16) abbinata a un gesto circolare che include tutta la moltiplicazione e suggerisce di considerarla come un unico oggetto. Gli studenti colgono questo aspetto comunicativo dell'insieme di gesto e parola, tant'è che sono essi stessi a suggerire di inserire le parentesi (linee 18 e 20). Il gesto del ricercatore dà origine così al segno grafico proposto dai ragazzi.

Ruolo dell'insegnante In questa parte della discussione si può notare la ripetizione di uno stesso tipo di gesto: quello che indica la somma come unione linee 4, 6 e 12, Fig. 11.2.1.1a-c). Tale ripetizione viene detta *catchment* (McNeill, 1992) ed è generalmente impiegata per fornire coerenza al discorso (*ibidem*). Attraverso il gesto delle due mani dell'insegnante che vengono avvicinate abbina la parola addizione alla metafora dell'unione che può essere eventualmente riletta anche nel contesto dell'artefatto come incollaggio dei cartoncini.

Si noti che nella discussione compaiono anche dei gesti e delle parole di tipo deittico. Probabilmente, l'insegnante notando che gli studenti non padroneggiano ancora alcuni termini (come nel caso di 'somma' nelle prime linee) evita di usare espressioni come "la somma dei prodotti" o "un prodotto più un altro". Preferisce indicare i due prodotti con la parola 'questo' (linea 16) abbinata a un gesto circolare che include tutta la moltiplicazione e suggerisce di considerarla come un unico oggetto. L'interpretazione dell'espressione può essere fatta in riferimento all'attività svolta con l'artefatto: ogni moltiplicazione è da intendersi come un cartoncino che può essere afferrato con la mano e spostato. In questo senso il gesto di "afferrare" la moltiplicazione mette in relazione l'attività con i segni matematici sulla lavagna e funge quindi da segno pivot.

La discussione prosegue al fine di determinare quale debba essere la posizione più opportuna per le parentesi.

Estratto 26			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
23	R: Mi dite dove le metto le parentesi per favore?		Ask for a synthesis
24	Joh: Fra 1 e...		
25	R: Aspetta che c'era Dan che aveva alzato la mano. Vuoi venire qui [Dan annuisce] Vieni.		
26	Dan: [mette una parentesi all'inizio e una alla fine, Fig. 11.2.1.2a]	L'uso delle parentesi fatto da Dan non sembra andare ad evidenziare la struttura che R ha rappresentato con i gesti circolari (linea 16) intorno alle operazioni	
27	R: C'era qualcun altro? Vieni Joh.		
28	Joh: Devi fare così [chiude le parentesi intorno alle moltiplicazioni, Fig. 11.2.1.2b]	Joh sembra invece afferrare la struttura suggerita dal gesto di R e chiude le parentesi intorno alle moltiplicazioni. Si tratta sempre di segni matematici Può darsi che l'uso delle	

		parentesi (e nello specifico il particolare uso fatto da Joh e poi riconosciuto dai compagni) sia frutto del gesto che, in questo senso, appare evocatore di un segno matematico che, come il gesto, mette in evidenza la struttura dell'espressione	
29	Seb: è vero, ha ragione Joh!		
30	R: Grazie mille. Così [indica la lavagna con la mano aperta] vi torna a tutti o c'è qualcuno che questa scrittura gli sembra strana?	"Scrittura" Viene utilizzato per riferirsi a tutto il testo prodotto alla lavagna.	
31	Coro: Sì..sì		
32	Dan: Però poi bisogna metterli tutti insieme	"metterli insieme" Può essere un riferimento all'operazione di somma da effettuare dopo aver calcolato i prodotti oppure all'"incollaggio" dei cartoncini	
33	And: Sembrano potenze !	Segno matematico Lo studente sembra cercare nella memoria un termine matematico da associare alla scrittura.	
34	R: No, cosa sembra?		Ask for a synthesis Viene richiesto di produrre ulteriori segni matematici per metterli in relazione con quelli scritti alla lavagna.
35	Coro: un'espressione	Qui viene associato il termine corretto	
36	R: Ah! È un po' come una specie d'espressione . Sì [scrive il simbolo = al termine dell'espressione, Fig. 11.2.1.2c]. Il problema che adesso ci stavamo ponendo, Ale dimmi se ho capito bene...Te dici "ma quando io faccio l' addizione fra queste due moltiplicazioni [indica alternativamente le due moltiplicazioni tenendo il palmo della mano aperto] che cosa mi esce fuori ?"	Qui R aggiunge un = in fondo come se servisse a indicare "quello che esce fuori". Ancora una volta si porta avanti il discorso utilizzando diversi sistemi semiotici contemporaneamente: quello simbolico-algebrico e quello verbale, fra l'altro con un riferimento al linguaggio colloquiale: "quello che esce fuori" invece che "risultato"	Provide a synthesis Riutilizzando il termine dett dai bambini lo valida, sintetizza poi la parte di discussione precedente riformulando quanto già detto mescolando vari sistemi semiotici.
37	Dan: Tre! Dovresti fare più , c'è anche il più in mezzo.	Dan interpreta la scrittura come qualsiasi espressione vista prima: lo scopo è determinare il risultato. L'interpretazione dell'uguale	

		è procedurale.	
38	R: Sì, c'è anche il più [indica il simbolo col dito]. Allora io son d'accordo che [mette il dito indice sotto il risultato 1] se faccio uno più [sposta il dito sotto al 2] due mi viene tre e quindi deve venire tre .	Tutte le parole utilizzate sono associate ad un gesto di pointing riferito alla seconda linea della scrittura alla lavagna (Fig. 11.2.1.2c). Qui viene data un'interpretazione della relazione additiva fra i risultati	Focalization+provide a synthesis Ripete la frase del bambino e poi fornisce un'interpretazione della scrittura
39	Gab: Io volevo dire ancora un'altra cosa.		
40	R: Dimmi Gab		
41	Gab: Secondo me l' 1 lo devi mettere qui [disegna un piccolo 1 di fianco alla prima parentesi] e poi li devi moltiplicare [scorre con la mano lungo tutta l'espressione, Fig. 11.2.1.3a]	Associa il risultato alla moltiplicazione corrispondente, probabilmente il simbolo di uguaglianza posto in verticale non evidenzia questa relazione per Gab. Il termine "moltiplicare" sembra usato in modo improprio	
42	R: Non ho capito molto bene, sai Gab [...]		
43	Gab: Cioè, invece di metterlo qui [pointing sull'1 nella seconda riga] si mette qui [pointing sul piccolo 1 che ha scritto di fianco alla parentesi] e si somma tutto questo [scorre col gesso lungo la prima parentesi, Fig. 11.2.1.3b], 1 compreso [indica il piccolo 1 di fianco alla parentesi] per questo [scorre col gesso lungo la seconda parentesi, Fig. 11.2.1.3c]	Il gesto utilizzato dal ragazzo racconta del suo modo di leggere la struttura dell'espressione. La lunghezza dei suoi movimenti quando dice "questo" e "questo" traduce la parte di espressione che sta considerando. Questo appare interessante perché il gesto permette al ragazzo di parlare di una cosa a cui potrebbe non essere in grado di dare un nome nell'immediato (ovvero il prodotto nel suo insieme) è un potenziale segno pivot.	
44	R: cioè tu dici che io dovrei scrivere i risultati [indica con la mano aperta prima una e poi l'altra moltiplicazione] di queste parentesi , dici.		Provide a synthesis Fa una sintesi ponendo l'attenzione solo sui risultati e non sulla relazione additiva fra i prodotti
45	Gab: Sì [annuisce]		



Fig. 11.2.1.2: Inserimento delle parentesi nella scrittura simbolica.



Fig. 11.2.1.3: Interpretazione della struttura dell'espressione da parte di Gab.

Evoluzione dei segni Questa parte della discussione è caratterizzata da una abbondante produzione di segni matematici. Joh inserisce le parentesi che, matematicamente, traducono quanto espresso dall'insegnante precedentemente con i gesti (linea 16): si tratta di un caso di conversione genetica, infatti il gesto della mano che "afferra" la moltiplicazione viene convertito in un nuovo insieme semiotico, quello dei simboli aritmetici scritti. L'effimerità del gesto viene superata ricorrendo alla permanenza della scrittura.

Si può notare che le parentesi non sono necessarie al fine di esprimere la precedenza fra le operazioni (che andrebbe comunque alle moltiplicazioni) ma piuttosto a sottolineare il legame con l'attività svolta con l'artefatto: il contenuto della parentesi è il contenuto dei cartoncini. In questo senso le parentesi possono agire da segni pivot e creare il nesso tra i significati relativi all'uso dell'artefatto e i significati matematici.

L'aggiunta del simbolo di uguaglianza da parte dell'insegnante (linea 36) spinge verso un'interpretazione procedurale della scrittura (linee 37-38). L'intervento di Gab riporta l'attenzione sulla struttura dell'espressione: il suo "somma tutto questo per questo" insieme ai gesti fatti (Fig. 10.4.1.3) rivela una corretta lettura delle parti di cui è composta l'espressione e delle relazioni tra queste parti.

Ruolo dell'insegnante L'insegnante promuove la produzione di segni matematici, proponendo agli studenti di inserire le parentesi (linea 23) e poi chiedendo loro di dare un nome alla scrittura proposta (linea 34). Nel caso in cui i termini utilizzati non appaiano corretti, l'insegnante non li valida (linea 34), ripete invece quelli di cui intende promuovere l'uso (linee 36 e 38).

Quando Gab condivide la sua interpretazione della struttura dell'espressione, l'insegnante focalizza soltanto sulla parte di intervento relativa ai risultati (linea 44), senza mettere in evidenza le relazioni tra le operazioni che sono state indicate dal bambino per mezzo di parole e gesti.

11.2.1.2 La somma di due prodotti equivale a un prodotto: appiccicare cartoncini

Nella parte di discussione che segue si torna all'attività con l'artefatto, e il focus ricade sulle relazioni.

Estratto 27			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
46	R: [...] Però, quando noi prendevamo [porta la mano aperta verso la prima parentesi come se dovesse afferrarla, Fig. 11.2.1.4a] il cartoncino 1×1 e lo affiancavamo [sposta la mano sull'altra parentesi, Fig. 11.2.1.4b] al cartoncino 1×2 [beat sulla lavagna con tutta la mano] che... e queste [ripassa la mano prima su una parentesi e poi sull'altra] eran caselle , poi le abbiamo appiccate [avvicina le due mani con i palmi semiaperti, Fig. 11.2.1.4c] e viene [tiene ferma una mano a mezz'aria e con l'indice dell'altra fa un gesto rotatorio che indica il pian immaginario su cui poggia la prima mano, Fig. 11.2.1.4d] un unico cartoncino grande [ripete il gesto rotatorio mentre dice queste ultime parole] Quel cartoncino grande a che operazione corrispondeva?	R parla della tabella e dell'attività con l'artefatto in generale: cartoncino, affiancavamo, caselle, appiccate, cartoncino grande sono segni artefatto Parla di "cartoncino 1×1" però lo dice toccando la scritta alla lavagna che è un segno matematico. Le parole parlano dell'artefatto, i simboli alla lavagna sono matematici; nell'interazione di due diversi sistemi semiotici si trova un collegamento tra artefatto e segni matematici, ovvero un pivot "operazione" è un segno matematico	Back to the task Richiama l'attività con l'artefatto ma alla fine l'uso del segno "operazione" (un segno matematico) permette di porre una domanda che promuove la produzione di segni matematici
47	Coro: un per tre	Segno matematico	
48	Dan: A 3×1	Segno matematico Potrebbe essere partito dal risultato 3 per poi cercare una moltiplicazione che potesse corrispondergli.	
49	R: Dan dice 3×1 [lo scrive alla lavagna]	R traduce le parole del bambino in simboli matematici (sulla lavagna)	Focalization
50	Dan: Uguale 3	Viene utilizzato l'uguale con l'interpretazione procedurale	
51	R: Siete d'accordo?		Persegue l'obiettivo di creare conflitto
52	Varie voci: sì		
53	Joh: No, è 1×3	Segno matematico Joh mette in evidenza la	

		necessità di esprimere una certa struttura.	
54	R: Joh suggerisce di mettere invece 1×3	A differenza di quanto fatto alla linea 49, questo segno matematico non è tradotto in simboli aritmetici scritti	Focalization
55	Varie voci: sì, sì, 1×3	Segno matematico Altri riconoscono la necessità di esprimere una particolare struttura	
56	R: Va bene Dan a te?		
57	Dan: È uguale.	Qui la parola uguale non sembra essere usata in senso matematico ma per dire “per me non fa differenza”	
58	R: Quindi posso scrivere 1×3 Dan? [intanto cancella 3×1]		Ask for a synthesis
59	Dan: Sì, però soltanto che non bisogna mettere 3×1 perché lì abbiamo detto che è orizzontale	“orizzontale” sembra riferirsi al fatto che si stanno usando rettangoli che hanno per base la dimensione maggiore. Nella frase è un sì riferisce all’operazione, ovvero al cartoncino ritagliato o alla casella rettangolare disegnata. Questo fornisce un indizio di come i ragazzi identifichino i prodotti e i rettangoli. Il termine 1×3 viene interpretato in riferimento al cartoncino di altezza 1 e larghezza 3 diviene quindi distinguibile da 3×1, che rappresenta un cartoncino diverso. In questo modo è evidente l’esplicitazione del fatto che le moltiplicazioni con i fattori invertiti sono due moltiplicazioni “diverse” fra loro.	

Ruolo dell’insegnante In questa parte della discussione, l’insegnante ha l’obiettivo di costruire con gli allievi la relazione che esprime la proprietà distributiva, attraverso la costruzione condivisa di una scrittura che esprima la relazione di equivalenza tra due espressioni strutturalmente differenti.

Il discorso si sviluppa attraverso l’introduzione di diversi gesti che hanno l’obiettivo di mettere in relazione la scrittura simbolica che mano a mano viene elaborata e completata alla lavagna con i significati matematici già costruiti e riferiti all’uso dell’artefatto. In particolare

nell'intervento riportato alla linea 46, ci sono gesti di pointing volti a indicare le operazioni che sono racchiuse dentro le parentesi (Fig. 11.2.1.4a-b), seguiti da gesti iconici che richiamano l'attività fatta con i cartoncini e il nastro adesivo (Fig. 11.2.1.4c-d).



Fig. 11.2.1.4: L'insegnante gesticola verso la lavagna ma anche nel proprio spazio gestuale.

Si noti che i gesti deittici rivolti verso la lavagna sono fatti mentre viene detta la parola 'cartoncino' anche se la mano sta indicando un'operazione aritmetica scritta alla lavagna. A parte la premessa sulla moltiplicazione, l'intera frase evoca l'attività con i cartoncini 1×1 e 1×2 , presentando diversi segni-artefatto ("prendevamo il cartoncino...e lo affiancavamo al cartoncino...queste erano caselle e poi le abbiamo appiccate"), ma i gesti deittici sono sfruttati per collegare la scrittura alla lavagna (segno matematico) con l'esperienza fatta con i rettangoli, dandone quindi un significato situato. Al termine dell'intervento, è richiesto il collegamento esplicito ai significati matematici, con la domanda "Quel cartoncino grande a che operazione corrispondeva?" e l'accompagnamento con un gesto ripetuto (Fig. 11.2.1.4d) a sottolineare che l'unione di due cartoncini forma un terzo cartoncino, su cui è posta ora l'attenzione. Nella catena semiotica che si viene a creare, i gesti deittici agiscono da pivot, perché collegano i segni artefatto riferiti all'attività col cartoncino ai segni matematici riferiti alle operazioni aritmetiche.

L'abbinamento tra un gesto che indica una rappresentazione matematica e il linguaggio verbale che indica il riferimento al contesto dell'artefatto (osservabile con analisi sincronica), può essere considerato un caso di **mismatch** (ossia disaccordo, discordanza) tra risorse semiotiche diverse. In base ai risultati sperimentali, Singer e Goldin-Meadow (2005) considerano positiva la presenza di *gesture-speech mismatches* (disaccordo tra parole e gesti) durante lo svolgimento di un'attività matematica; in particolare, queste autrici ipotizzano che in matematica i *gesture-speech mismatches* possano essere strumenti efficaci nelle mani dell'insegnante, perché permettono di trasmettere due informazioni allo stesso tempo (*ibidem*). I nostri dati confermano questa ipotesi nel particolare contesto di un'attività centrata sull'uso di un artefatto; in particolare, la discordanza tra gesti e parole permette di far riferimento contemporaneamente sia al contesto matematico sia a quello dell'artefatto.

Evoluzione dei segni Nella discussione analizzata, il collegamento fra i segni matematici riportati alla lavagna e l'attività con l'artefatto sembra essere recepito anche dagli studenti. Di fatto il breve contrasto di opinioni fra Joh e Dan (linee dalla 48 alla 59) in merito all'operazione che risulta dall'"incollaggio" si conclude con Dan che riconosce che l'operazione

da scrivere sia 1×3 perché è “orizzontale”. La riga 59 riporta un segno linguistico⁵⁹ ibrido. Infatti, il termine “orizzontale” richiama la posizione del rettangolo all’interno della tabella, in cui 1 corrisponde all’altezza e 3 alla base: l’operazione matematica scritta alla lavagna viene quindi interpretata dai bambini (sicuramente Dan) con riferimento all’attività con l’artefatto, nella quale il rettangolo considerato è “orizzontale” perché ha base più lunga dell’altezza. Proprio il riferimento alle caselle della tavola di Laisant permette di differenziare le due moltiplicazioni con l’ordine dei fattori invertito: così come i due rettangoli in posizione diversa sono congruenti ma non identici, anche le due moltiplicazioni hanno lo stesso risultato ma non coincidono. In questo modo, viene posta attenzione sulla struttura dell’operazione e non solo suo risultato.

La discussione prosegue proprio verso l’esplicitazione del collegamento tra quanto osservato con la tavola di Laisant e quanto rappresentato dai simboli aritmetico-algebrici.

Estratto 28			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
60	R: [mentre Dan parla, scrive 1×3] Ah, ho capito, ok. [mette la mano sotto la nuova operazione] quindi 1×3 lo accettiamo. Però non ho capito questo [pointing sul 3] tre com’è che avete fatto a trovarlo, perché da un certo punto di vista capisco quello che diceva Ale, cioè lì [scorre rapidamente con la mano aperta lungo tutta l’espressione a sinistra dell’=] il tre non c’è da nessuna parte. Da dove è venuto fuori?	“Questo tre” + pointing segno multimodale usato per focalizzare e chiedere spiegazione “da dove è venuto fuori” è un segno pivot che può rimandare sia all’elaborazione sintattica sia alle azioni sui rettangoli (si veda dopo il richiamo ai cartoncini, linea 62)	Provide a synthesis + back to the task Prima istituzionalizza la condivisione di 1×3, poi chiede di tornare alla consegna per individuare come il 3 sia stato ottenuto
61	Sam: Addizionando l’1 col 2. [altre voci di sottofondo]	La richiesta viene interpretata da Sam in termini matematici: i segni da lui prodotti sono solo matematici, senza riferimento all’artefatto. Non è chiaro a quale 1 e a quale 2 si stiano riferendo gli studenti: potrebbero indicare i fattori o i risultati? Questo ambiguità dipende dal particolare esempio discusso in cui compare 1 come fattore in tutti i prodotti considerati	
62	R: No scusate però voi mi avete detto che quel cartoncino è 1×3 [quando nomina i numeri, li indica] io sono d’accordo che il risultato è tre [mentre dice “tre” tocca prima il 2 e poi l’1 scritti sulla seconda riga] che è la somma di questi due [tocca nuovamente il 2] ma come avete fatto a dire che è 1×3 [pointing sotto il $\times$ fra 1 e 3] cioè questo tre [pointing sul 3 nell’operazione] da dove esce fuori?	“quel cartoncino è 1×3” Mette in relazione il segno artefatto “cartoncino” con il segno matematico “uno per tre”. Questa frase ibrida è usata come pivot e si aggancia alla domanda espressa con segno pivot alla linea 60. “Il risultato è tre, che è la somma di questi due” si tratta di un segno matematico	Ask for a synthesis + Focalizzazione attraverso pointing a particolare segni

⁵⁹ La videocamera riprende l’insegnante, quindi non si può sapere se è accompagnato anche da un gesto.

	Dimmi Marta	“questo 3” insieme al gesto deittico è utilizzato per distinguere il 3 risultato dal 3 fattore.	
63	Marta: Dai risultati delle due parentesi . Il risultato di quelle due parentesi l'abbiamo addizionato ed è venuto tre.	Qui Marta esplicita che lei interpreta 3 come risultato delle due parentesi (interpretazione procedurale). Il discorso è fatto solo di segni matematici	
64	Mat: è venuta un'operazione da un risultato	Mat utilizza segni matematici ma in un ordine inusuale. Tipicamente, si può affermare di ottenere un risultato da un'operazione. L'interpretazione di questa frase è dubbia: potrebbe essere in riferimento al fatto che un'operazione “funge” da risultato oppure potrebbe essere una sottolineatura del fatto che viene violato l'usuale contratto didattico: dove usualmente starebbe un risultato (ovvero un unico numero) si è inserita un'operazione.	
65	R: Joh, te che volevi dire?		
66	Joh: Io credevo che si facesse così. Fare più [va alla lavagna e scrive il simbolo fra 1 e 2 nella seconda riga] e uguale [lo scrive dopo il 2] tre [scrive il numero e poi aggiunge un simbolo = in verticale, Fig. 11.2.1.5]	Il fatto che il discorso sia tutto spostato sulla matematica viene messo in evidenza dall'attività di Joh che infatti agisce sulla seconda riga della scrittura alla lavagna, che racconta dei risultati e ha poco a che vedere con l'attività con l'artefatto. Notare però che Joh aggiunge anche un uguale verticale fra 1×3 e 3 il che sembra mettere in luce che il ragazzo interpreta la struttura aritmetica di entrambe le uguaglianze, sia quella nella prima riga, sia quella nella seconda. Con l'aggiunta di questo simbolo di uguaglianza si crea una scrittura in cui tale simbolo assume molti significati diversi: può essere interpretato proceduralmente (collega le moltiplicazioni ai loro risultati) oppure in modo relazionale (nella prima riga mette in relazione due espressioni, in verticale mette in relazione due uguaglianze).	
67	R: Ok, su questo sono molto d'accordo. Questi uguali qui [fa un gesto rotatorio col dito mentre indica la lavagna] funzionano tutti? [altro gesto rotatorio] vi sembrano veri tutti quanti?	Utilizza “uguali” al plurale, come ad esplicitare la presenza di diverse relazioni.	Ask for a synthesis La richiesta sulla “verità” degli uguali richiede di interpretare i segni
68	Dan: Sì, quello però fa per 3. Posso	Non è chiaro a cosa si riferisca; la	

	venire?	videocamera sta riprendendo la lavagna e non si vedono i gesti del bambino	
69	R: Dimmi Dan, vieni vieni		
70	Dan: Quello lì va bene, come ha detto Joh, però se lo vuoi fare nella tabella va bene questo [indica il prodotto 1×3] perché non c'è [tocca la tabella appesa al muro] non ci puoi fare $1+2$ [indica verso la lavagna] nella tabella.	Mette in relazione l'insieme di segni legato alla tabella con quelli relativi ai risultati delle operazioni aritmetiche. I diversi pointing possono essere interpretati come passaggio da un "mondo" all'altro. "nella tabella va bene questo" "non ci puoi fare $1+2$ " sono frasi ibride che fanno riferimento alle azioni nella tabella ("non puoi fare") ma anche alle operazioni aritmetiche	
71	R: Nella tabella puoi fare puoi mettere insieme solo le moltiplicazioni .	"mettere insieme" potrebbe essere un segno artefatto. Era stato utilizzato precedentemente proprio da Dan (linea 32) "moltiplicazioni" invece è un segno matematico e quindi ne risulta una frase ibrida	L'insegnante fornisce una sintesi ma l'azione non è classificabile come "provide a synthesis" perché la sintesi non riguarda i segni matematici ma la relazione tra questi e i segni artefatto.
72	Dan: Eh		
73	R: quindi è un po' come se questo [mette la mano a forma di parentesi in fondo a 1×3 , Fig. 11.2.1.6a] fosse quello che succede nella tabella e questi [sposta la mano nella riga successiva, Fig. 11.2.1.6b] fossero i risultati .	R esplicita il collegamento. La tabella diventa utile per parlare di un contesto in cui si può parlare delle operazioni in termini relazionali e non sui loro risultati (ogni cartoncino incarna un'operazione e le operazioni fra cartoncini sono operazioni fra operazioni). La scrittura che si trova nella prima riga, quindi, anche se è un segno matematico, può conservare un forte legame con l'attività fatta con l'artefatto. Funge da segno pivot.	Come linea 71
74	Coro: sì		
75	R: [rimette la mano sulla riga sopra] In una riga abbiam scritto quello che succede nella tabella e Dan ci dice che queste [doppio beat sulla lavagna] sono le uniche cose che possono succedere nella tabella [sposta la mano alla riga sotto]		Provide a synthesis
76	Fed: e poi si fa le operazioni normali .	'operazioni normali' esplicita il fatto che gli studenti sono abituati a vedere quello che c'è nella seconda riga ma non quello che c'è nella prima	
77	R: Ok		

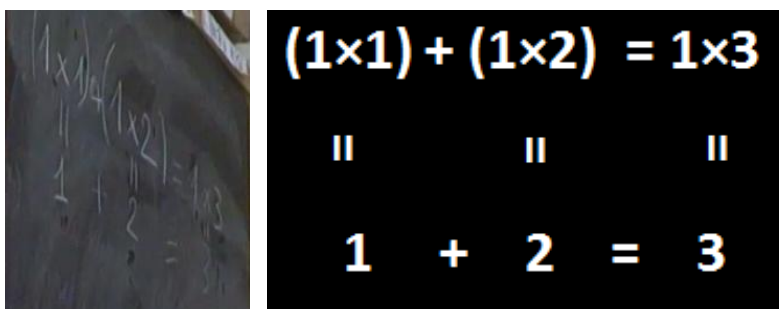


Fig. 11.2.1.5: Scrittura alla lavagna così come completata dall'intervento di Joh.



Fig. 11.2.1.6: L'insegnante indica le iscrizioni alla lavagna mimando una parentesi con la mano.

Evoluzione dei segni La scrittura che l'insegnante aveva cominciato a comporre sulla lavagna nella parte di discussione precedente viene completata da Joh inserendo alcuni segni matematici (linea 66, Fig. 11.2.1.5). Fra questi, ha particolare rilevanza il simbolo di uguaglianza che può avere qui diverse interpretazioni. Nella seconda riga collega l'operazione di somma al suo risultato. Allo stesso modo, i simboli posti in verticale possono essere interpretati in modo procedurale perché collegano ciascuna moltiplicazione della prima riga col suo risultato (nella seconda). L'uguaglianza della prima riga richiede invece un'interpretazione procedurale che Dan effettua nel contesto dell'artefatto (linea 70). I simboli posti in verticale creano un legame fra i due contesti che però non sembra essere in grado di chiarire il senso generale della scrittura. L'insegnante sfrutta l'intervento di Dan esplicitando la differenza di significati nelle due righe della scrittura e utilizzandola per mettere in relazione i segni artefatto ("quello che succede nella tabella", linea 73) con segni matematici ("i risultati"). La scrittura, nel suo insieme, funge da pivot: il suo funzionamento si basa sul fatto che diventa essa stessa oggetto di discussione, o meglio diventa l'oggetto di un compito di interpretazione (linee da 70 a 75)

Ruolo dell'insegnante La domanda con cui l'insegnante inizia la parte di discussione presentata nell'ultima trascrizione (linea 60) sembra mirare alla focalizzazione sugli aspetti relazionali piuttosto che quelli procedurali. In particolare, la richiesta di tornare alla consegna svolta con l'artefatto per determinare il modo in cui è emerso il 3 che fa da fattore mira a mettere in luce la relazione additiva fra i fattori non comuni dei prodotti di partenza (le basi delle caselle corrispondenti) e la base del cartoncino ottenuto con l'incollaggio. L'intervento di Joh (linea 66) esplicita la relazione additiva tra i risultati dei prodotti ma, contemporaneamente, attraverso l'inserimento dei simboli di uguaglianza verticali, esplicita una relazione fra le due righe di testo.

L'insegnante sfrutta questa scrittura e il successivo intervento per guidare una sintesi condivisa che ha come obiettivo quello di esplicitare la relazione che c'è fra quanto avviene nella tabella, quanto è scritto nella prima linea – ovvero la relazione aritmetica tra le operazioni – e la relazione aritmetica tra i risultati (linea 73 e 75).

In altri termini, la scrittura che si trova sulla lavagna diventa oggetto della discussione: l'insegnante la propone come testo da interpretare, ne fornisce interpretazioni parziali, sollecita la ricerca di collegamenti tra l'uso dell'artefatto, le scritture simboliche e l'interpretazione matematica che gli allievi possono dare a partire dalle loro conoscenze matematiche.

11.2.1.3 Espressioni equivalenti: sommi il secondo numero, il risultato non cambia

Il riferimento al contesto dell'artefatto già elaborato sembra creare un'occasione per l'insegnante per spostare l'attenzione dall'interpretazione procedurale ribadita da Fed a quella relazionale. Per farlo, l'insegnante richiama la consegna effettuata per rilanciare nella discussione un nuovo esempio numerico e ripetere nuovamente il processo interpretativo delle scritture.

Estratto 29			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
78	R: Ho capito. Proviamo però a fare un altro esempio ancora? [...]		Back to the task Il compito che viene poi effettivamente svolto è quello di produrre un testo scritto con simboli aritmetici ed interpretarlo.
79	Dan: Io? 8×2		
80	R: Dimmi da quali...qual è il primo cartonc... la prima casella che avevi colorato ?	"cartonc.." "casella" "colorato" Fanno riferimento all'attività svolta, sono segni artefatto	
81	Dan: 8×2	Risponde con un segno matematico anche se lo usa come "nome" per la casella colorata. Lo studente ritiene equivalenti il prodotto e la casella.	
82	R: [scrivendo 8×2 alla lavagna fra parentesi] e poi la seconda casella che avevi colorato ? [intanto aggiunge un + e delle parentesi che ricordano la struttura della scrittura in Fig. 11.2.1.5]	Traduce quanto detto dallo studente in segni matematici scritti. NB: R scrive la nuova riga sotto quella precedente senza cancellare quello che era stato scritto prima	Back to the task
83	Dan: 8×8 [R lo scrive alla lavagna, Fig. 11.2.1.7a]	Come nell'intervento precedente	
84	Joh: In tutto fa... 10	Il numero dato da Joh non è il risultato di nessuno dei due prodotti, né tantomeno della loro somma. Lo studente dimostra di aver già intuito la relazione additiva tra i	

		fattori non in comune fra i prodotti.	
85	R: [aggiunge un = dopo la parentesi] E che casella ti è venuta fuori?	Il linguaggio usato da R qui appartiene alla tabella. “casella” è sicuramente un segno artefatto. Chiedendo questo R sembra voler spingere a associare questa scrittura ad un altro prodotto piuttosto che al risultato numerico dell’espressione come successo nella parte precedente della discussione.	Back to the task
86	Joh: 8×10	Nonostante non si tratti del proprio lavoro, Joh anticipa la casella ottenuta da Dan. Questo conferma l’ipotesi interpretativa fatta alla linea 84	
87	R: Chi è che ha detto 8×10 ?		Focalization
88	Rau: Joh		
89	R: [mentre scrive 8×] allora Joh devi spiegare come hai fatto...		Focalization Con le sue parole sembra confermare la correttezza di quanto chiesto da Joh ma richiede di fornire maggiori spiegazioni
90	Fab: ottanta!	Questo tipo di intervento mette in luce che ci sono ancora studenti che vedono/interpretano l’uguale in modo procedurale, infatti 80 rappresenta il risultato della somma dei due prodotti.	
91	Dan: Eh, 8×10 sì	Il “sì” potrebbe essere in riferimento al fatto che “ottanta” (detto da Fab) sia effettivamente il risultato di questo prodotto oppure potrebbe star affermando di essere in accordo con Joh.	
92	Mat: perché sommi il secondo numero. 8+2 fa 10 quindi rimane...	Mat fornisce una spiegazione per quanto detto da Joh. Introduce il segno “secondo numero” che sembra far riferimento all’ordine in cui sono scritti i fattori. In questo caso, dato che i fattori in comune fra le diverse moltiplicazioni è sempre al primo posto, il “secondo numero” coincide con il fattore non comune. In questo senso è un termine contingente ma che potrebbe svolgere il ruolo di segno pivot per arrivare a parlare dei fattori in comune e a generalizzare.	
93	Dan: Ma che dici?! 8×2 non fa mica 10!	Sembra riferirsi a quanto sta scritto alla lavagna oppure non ha sentito effettivamente quanto detto dal compagno	

94	R: 8 più 2		Focalization
95	Nic: è 8+2 uguale 10	Fa eco a quanto detto da Mat, inserisce però il riferimento all'uguaglianza	
96	Dan: è 16	Continua a riferirsi al prodotto piuttosto che alla somma	
97	R: Mat, dimmi se ho capito bene. Te mi stai dicendo [scrive una parentesi dopo $8 \times$] che praticamente è come se l'avessimo moltiplicato [intanto scrive $8+2$ dentro alla parentesi, Fig. 11.2.1.7b] per 8+2 [indica rapidamente i numeri che ha appena scritto]	Viene messa in evidenza la struttura dell'espressione scritta. I segni sono solo matematici e probabilmente la frase è inusuale per gli studenti: si parla di moltiplicare, non per un unico numero ma per una somma.	Provide a synthesis Riformulando e ampliando quanto detto da Mat
98	Mat: sì		
99	Marta: sì	Non solo Mat dà conferma di quanto detto dall'insegnante	
100	R: Scritto in questo modo [indica la lavagna] va bene?	Viene chiesto agli studenti di interpretare la scrittura	Focalization
101	Fed: I secondi numeri , sempre i secondi numeri . Vedi: 8 e 2	Fed sembra comprendere il significato di quello che era stato detto da Mat (linea 92), il segno "secondo numero" diventa un segno condiviso che permette di esprimere la regola in forma "generale"	
102	Nic: 8×2 fa 16 e $16 + \dots$	Interpretazione di tipo procedurale	
103	R: Parliamo uno alla volta. Aspetta Nic, una cosa alla volta. Volevo ascoltare quello che stava dicendo Fed. Vieni Fed, ti do un gesso colorato se tu mi fai delle freccie per spiegarmi quello che intendevi dire		Focalization Consegnando il gesso al ragazzo, R lo invita a produrre nuovi segni e a convertire quello che stava dicendo a parole in simboli
104	Fed: Lui ha sommato il 2 [traccia un arco che collega il 2 nella prima parentesi con l'8 nella seconda parentesi] più questo 8 [R annuisce]. Ha fatto il più [disegna il simbolo + sull'arco, Fig. 11.2.1.8a]	Fed esplicita la relazione additiva tra i fattori non in comune delle due moltiplicazioni: lo fa sia a parole (usando segni matematici) sia attraverso la rappresentazione grafica richiesta dall'insegnante. Anche in questo caso inserisce il simbolo di somma proprio per esplicitare la relazione additiva	
105	Mat: Eh! Ma l'è uguale!	Mat chiarirà nel suo intervento successivo che cosa intenda dire con "è uguale".	
106	Fed: E poi l'ha mandato qua [indica la parentesi che contenente $8+2$, Fig. 11.2.1.8b] il 10	L'uso dell'espressione "l'ha mandato" lascia intendere che Fed interpreti la relazione di uguaglianza tra le scritture che appaiono sulla lavagna come una trasformazione sintattica che "manda" un'espressione nell'altra	
107	R: Ok, facci un'altra freccia di un altro colore [gli porge un gesso di un colore		Focalization

	diverso]		
108	Mat: è come quello sopra 1+2 [intanto Fed disegna un altro arco che va dall'8 nella seconda parentesi fino alla parentesi oltre il simbolo =, Fig. 11.2.1.8c]	Qui appare chiaro che Mat metta in relazione questo esempio con quello precedente, riferisce da dove è "venuto fuori" il 3 che c'era nel caso precedente. Confrontando le due scritture sembra individuare una somiglianza	
109	Nic: Fed resta sempre uguale .	Apparentemente Nic esplicita il fatto che l'espressione ottenuta con la trasformazione sintattica è equivalente a quella di partenza. Tutti questi ultimi interventi riguardano sempre le espressioni e le trasformazioni su di esse, non c'è più riferimento all'artefatto	
110	Fed: Eh, appunto.		

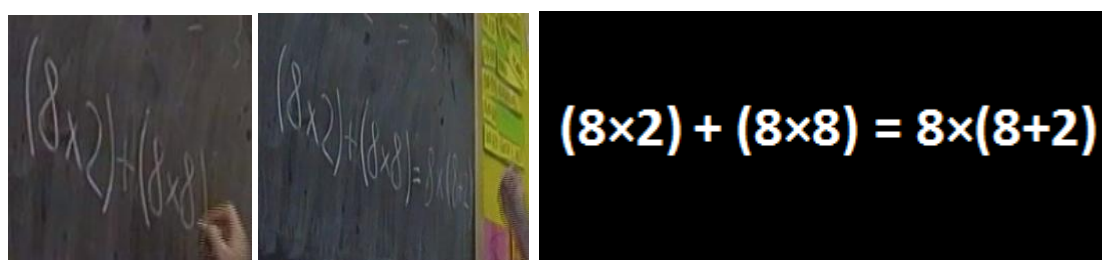


Fig. 11.2.1.7: Scrittura alla lavagna prodotta da R per rappresentare l'esempio di Dan.

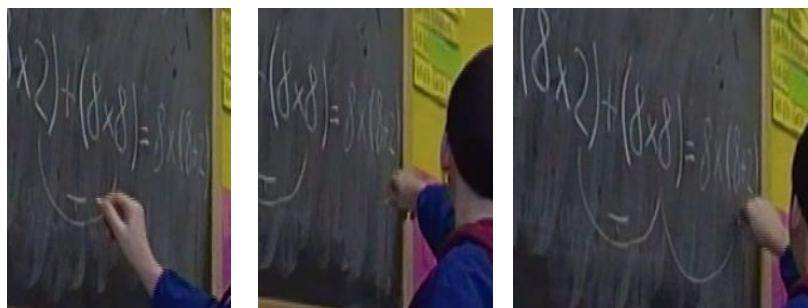


Fig. 11.2.1.8: Fed collega con delle frecce i "secondi fattori" dell'uguaglianza.

Ruolo dell'insegnante Chiedendo di fornire un ulteriore esempio l'insegnante intende offrire nuovamente la possibilità di esplicitare la relazione fra le caselle colorate e le moltiplicazioni che vengono scritte sulla lavagna. La struttura dell'espressione usata precedentemente viene riproposta dall'insegnante, si richiede però di fornire numeri nuovi. Questa richiesta probabilmente ha anche lo scopo di ottenere un esempio in cui non compaia il numero 1 tra i fattori.

La produzione di segni viene inoltre stimolata facendo l'esplicita richiesta di indicare la relazione tra i numeri che formano l'espressione. In questo caso l'insegnante richiede che siano gli studenti a esplicitare la relazione utilizzando delle "frecce". Probabilmente l'insegnante si aspetta una rappresentazione che colleghi ciascuno dei fattori da un lato

dell'uguale con la corrispondente posizione dall'altro lato, superando l'ambiguità di espressioni deittiche e quella originata dal ripetersi dello stesso numero ma con ruoli diversi. Infatti, questo tipo di rappresentazione è tipicamente usata in contesto algebrico per riferirsi alla proprietà distributiva, in letteratura viene detta anche “*little shower*” (David, Tomaz, & Costa Ferreira, 2014).

Evoluzione dei segni Nonostante la richiesta fatta inizialmente faccia riferimento al contesto dell'artefatto, le risposte degli studenti non fanno riferimento a tale contesto e da subito si muovono nel contesto dei numeri usando segni matematici. Le moltiplicazioni suggerite dagli studenti sono tradotte dall'insegnante in segni grafici che richiamano, nella struttura dell'espressione, quanto scritto nella parte di discussione riportata all'estratto 28 (il testo in Fig. 11.2.1.5 è ancora visibile sulla lavagna).

Probabilmente, la possibilità di confrontare la struttura delle due scritture – data dalla loro contemporanea presenza sulla lavagna – permette agli studenti di mettere in evidenza rapidamente la relazione additiva tra i fattori non in comune delle due moltiplicazioni (linee 86, 92 e 95). In particolare il segno “secondo numero” (linee 92 e 101) viene utilizzato e condiviso per riferirsi al secondo fattore di ciascuna moltiplicazione. In questo caso infatti, in tutte le moltiplicazioni il fattore comune compare per primo. Si deve inoltre notare che il fatto che uno dei due prodotti proposti sia un quadrato potrebbe essere uno dei motivi per cui non viene messo in evidenza che il fattore “raccolto” è un fattore comune alle due moltiplicazioni di partenza.

Emerge invece chiaramente il riferimento a una trasformazione sintattica (Fed dice “ha mandato”, linea 106) che lascia invariato il risultato: “resta sempre uguale” (Nic, linea 109). Pertanto, in questa fase di discussione, si passa rapidamente dal riferimento all'artefatto a segni matematici che appaiono essenziali per la costruzione del significato di proprietà distributiva. Tuttavia, è da evidenziare che alcuni studenti continuano a interpretare l'uguaglianza in modo procedurale (linea 102).

Estratto 30			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
111	R: Fed, te vai a posto adesso. Intanto faccio una domanda io. Questa cosa che ci diceva adesso Mat [indica la parentesi che contiene $8+2$] che basta prendere [tocca il 2 della prima parentesi] il due e... [tocca il secondo 8 della seconda parentesi] Fed dice i due [li indica di nuovo prima uno e poi l'altro] secondi numeri e sommarli insieme, vale anche sopra? [indica la riga superiore]	R sfrutta l'espressione “secondo numero” e la riutilizza per parlare dei fattori non in comune.	Ask for a synthesis
112	Fed: Sì, guarda $2+1$		
113	R: [cancella il 3 in 1×3] Qualcuno mi suggerisce che cosa ci posso scrivere qui [apre una parentesi]	Emula la scrittura che c'è sulla stessa lavagna per l'altro esempio.	Ask for a synthesis
114	Seguono vari interventi alcuni dicono $1+2$, altri $2+1$		

115	R: 2+1 o 1+2 ?	Gli studenti sanno che il risultato dovrà essere 3 e che i numeri coinvolti sono 1 e 2, la scelta di un ordine che segua quello dei fattori nelle moltiplicazioni può rivelare una particolare attenzione alla struttura dell'espressione.	
116	Mat: 1+2 [qualcun altro ripete, R scrive 1+2]		
117	Dan: Maestro, però non è proprio completa.		
118	R: Dimmi. Che cosa mancherebbe?		
119	Dan: Posso venire?		
120	R: Asp...Sì, vieni veloce, poi dopo sentiamo anche la Vio che è tanto che c'ha la mano alzata.		
121	Dan: Non è completo perché te non devi fare soltanto 1×2 [indica la seconda parentesi in alto] ma anche 1×1 [indica rapidamente l'altra] sennò ti viene fuori...[scorre con la mano verso sinistra lungo tutta la scrittura]	Non è chiaro che cosa Dan intenda dire. Forse il ragazzo teme che qualcosa manchi perché i numeri che compaiono a destra dell'uguale sono effettivamente meno di quelli che compaiono a sinistra. In particolare il simbolo di moltiplicazione non è a "contatto" con tutti i numeri e quindi sembrerebbe che una moltiplicazione sia andata "persa".	
122	R: Sì. Infatti c'è 1×1 [indica l'1 che compare nella parentesi al secondo membro dell'uguaglianza]		Provide synthesis a
123	Dan: Qui c'è 1×1 [indica lo stesso numero]		
124	R: Però guarda, questo 1 [disegna un lungo arco che termina con una freccia, da un 1 al primo membro fino a quello dentro la parentesi al secondo membro] è diventato questo	L'uso di "è diventato" suggerisce il riferimento a una trasformazione sintattica	Provide synthesis a
125	Dan: E il due è diventato quello	Questa frase ripete lo stesso template dell'intervento precedente dell'insegnante	
126	R: questo due [traccia un arco da un 2 all'altro, Fig. 11.2.1.9] è diventato quest'altro	Fa eco alla frase di Dan ma aggiunge anche un segno grafico	Focalization
127	Joh: è come sotto!	Joh sembra identificare le due scritture, anche quella con i nuovi segni appena introdotti da R	
128	Dan: Questo [indica 8×2 nella riga sotto] fai 8×2, 16 [scorre col dito alla moltiplicazione dopo] 8×8, 64 e ti torna [indica 8×(8+2)] ottanta	Dan invece torna all'interpretazione procedurale, mette a confronto le operazioni ma comunque il fatto che indichi 8×(8+2) mentre dice 80 fa pensare che interpreti l'uguale come segno per la comparazione dei risultati.	
129	R: che corrisponde a 8 [indica con la nocca 8×] per dieci [indica (8+2)] e quindi è uguale [apre la mano] dicevi?	Qui aggiunge l'interpretazione relazionale a quanto detto da Dan	Provide synthesis a
130	Dan: sì		

131	Joh: A lui il risultato è 80		
132	R: In questo caso qui sì		
133	Dan: Il risultato non cambia	Questa espressione è simile a una parte di quella usata nelle discussioni passate in riferimento alla proprietà commutativa. In particolare l'uso del verbo "cambia"	
134	R: Vio		
135	Vio: Ha già detto Dan quello che volevo dire io		
136	R: volevi dire la stessa cosa di Dan?		
137	Vio: sì		
138	R: Uguale uguale?		
139	Dan: Il risultato non cambia!	Fa eco a se stesso, forse rafforzato dal fatto che la compagna abbia detto di concordare con lui	
140	R: Ok. Quindi se ho capito bene, quello che state dicendo è che io posso scrivere in questo [indica un lato della seconda uguaglianza] modo oppure in questo modo [sposta la mano dall'altro lato] ma il risultato rimane [fa un gesto muovendo la mano aperta nell'aria verso la lavagna] uguale alla fine	Sembra voler spingere verso il fatto che le due scritture sono equivalenti. Sta allontanando sempre più le scritture dal mondo della tabella da cui erano nate. Si trattava di cartoncini che venivano attaccati per produrre un altro cartoncino mentre qui R chiede di confrontarle come espressioni aritmetiche equivalenti. Si è passati da segni matematici che in realtà venivano utilizzati per parlare di particolari esempi dell'attività con l'artefatto a un tipo di analisi più generale che riguarda le espressioni matematiche	Provide a synthesis
141	Dan: sì, la proprietà commutativa della moltiplicazione e dell'addizione [intanto R dondola la testa]	Lo studente associa l'invarianza del risultato alla proprietà commutativa. Interessante che noti che la proprietà coinvolge la relazione tra due operazioni	
142	R: Come si chiama? Non è commutativa, commutativa. La commutativa abbiám detto...	R sa che i ragazzi hanno già parlato della proprietà distributiva negli anni passati ma evidentemente i ragazzi non la riconoscono in questa scrittura o forse non riescono a richiamarla dalla memoria	Ask for a synthesis
143	Joh: Distributiva!	Viene richiamato il nome della proprietà, non viene però enunciata	
144	R: Cosa ha detto Joh?		Focalization
145	Cat: [bisbigliando] distributiva		
146	Dan: No! Distributiva è per dividere	Non è chiaro se qui Dan non riconosca la proprietà distributiva perché viene impiegata come composizione (e non come scomposizione) o perché la associ all'operazione di divisione (distributività della somma sul quoziente).	
147	R: Ha ragione Joh, questa proprietà si	Di fronte all'intervento di Dan, R interviene direttamente dicendo che	Provide a synthesis

	chiama proprio distributiva perché sapete cos'è che succede? [indica la lavagna con la mano aperta] è come se i numeri venissero [usando l'indice ripercorre a distanza le frecce disegnate prima] distribuiti.	l'intervento di Joh è corretto, non lascia spazio a discussione su questo tema. Cerca piuttosto di proporre una lettura "al contrario" della proprietà. Questa lettura però richiede un'interpretazione bidirezionale del simbolo di uguaglianza da parte dei bambini.	
148	Joh: Perché guarda il 2 va là e l' 1 va là . [si alza e va alla lavagna] Questo 1 l'ha distribuito a questo 1 [toccando i due numeri all'inizio e alla fine delle frecce ad arco] e questo due in questo [stessa cosa per il 2 all'inizio e quello alla fine dell'altro arco]	Il verbo andare "va" viene utilizzato per parlare della trasformazione sintattica.	
149	R: Ok provo a scriverla questa parola [scrive "proprietà distributiva" fra le due uguaglianze rappresentate sulla lavagna]	Qui viene scritto il nome della proprietà ma non è stata ancora enunciata in modo generale	

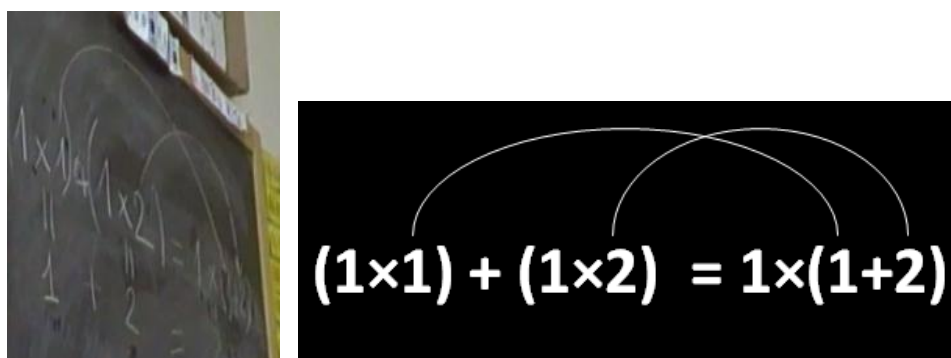


Fig. 11.2.1.9: Archi disegnati dall'insegnante per collegare i fattori sommati.

Evoluzione dei segni In questa parte della discussione emergono ulteriori elementi per una formulazione della proprietà distributiva. In particolare, vengono messi a confronto i due esempi: le due strutture sono paragonate e quindi se ne ricavano le relazioni tra i numeri in gioco, in particolare i "secondi numeri" (linee 111-116). Si noti che nel caso del secondo esempio, non è più necessario passare dai risultati delle operazioni; inoltre, l'aggiunta del 1+2 nella prima scrittura viene fatta senza far riferimento al risultato dell'espressione.

Si passa quindi sempre più a un'interpretazione relazionale delle scritture. La presenza di una trasformazione sintattica viene messa in evidenza dall'uso di verbi come "diventare" (linee 124-126) o "andare" (linea 148). Viene inoltre messa in evidenza l'equivalenza dei risultati delle due espressioni confrontate (linee 133, 139-140). Proprio il riferimento all'invarianza del risultato spinge Dan a supporre la presenza di una proprietà aritmetica – da lui detta 'commutativa', forse per esprimere tale invarianza – che lega le operazioni di addizione e moltiplicazione (linea 141). Il nome di tale proprietà (già nota agli studenti) viene riportato da Joh (linea 143) e validato dall'insegnante (linea 147).

Ruolo dell'insegnante L'insegnante riutilizza l'espressione "secondi numeri" (linea 111) per focalizzare l'attenzione della classe sulla relazione tra i fattori non in comune. Gli studenti individuano la relazione additiva (linee 112 e 114) che l'insegnante rappresenta stavolta in modo esplicito indicando (1+2) come secondo fattore del prodotto che si trova a destra del simbolo di uguaglianza (linee 115-116). Alcuni archi vengono utilizzati per mettere in relazione i numeri che compaiono ai due membri dell'uguaglianza (Fig. 11.2.1.9), inoltre viene introdotto il verbo "diventare" (linee 124-126) per parlare della relazione tra le due scritture. Tale verbo suggerisce quindi la presenza di una trasformazione che porta una delle due espressioni nell'altra.

11.2.1.4 Un fattore in comune: rettangoli con la stessa misura dell'altezza

Tutta la parte di discussione analizzata finora rimane soprattutto sul piano matematico (con l'eccezione delle metafore dell'andare e del divenire, comunque non riferite all'artefatto) e l'interpretazione relazionale è privilegiata dall'insegnante nonostante alcuni studenti dimostrino di rimanere sul piano procedurale (linea 128). Pertanto, nella parte di discussione che segue, la maestra suggerisce di ripercorrere quanto ricollegando quanto detto con l'attività fatta con l'artefatto.

Estratto 31			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
150	R: C'è qualcuno per cui non è chiara questa cosa? [varie voci dicono "io sì", "io no"] Qualcuno vuole provare a spiegare a chi non ce l'ha chiara questa proprietà distributiva ? Magari facciamo anche un altro esempio.		Ask for a synthesis Richiede di "spiegare"
151	M: Forse... forse anche disegnando ?	Qui la maestra interviene il che sembra suggerire che sia piuttosto preoccupata del fatto che sia troppo presto per distaccarsi completamente dall'attività con l'artefatto.	Back to the task Stimola la produzione di segni relativi al contesto dell'artefatto e dell'attività svolta
152	R: Con i rettangoloni dici?		
153	M: Non lo so.		
154	R: [annuendo] Possiamo provare. [alza il tono della voce e si rivolge alla classe] Provo a fare un altro esempio se qualcuno mi aiuta suggerendolo. Però chiederei il favore di parlare a qualcun altro che non sia Dan o Joh. È chiaro che loro l'hanno capita bene questa cosa però hanno parlato tanto oggi.		Back to the task Si decide di provare con un altro esempio e coinvolgendo anche altri studenti
155	Fed: Anche io ho parlato tanto.		
156	R: Anche te hai parlato tanto Fed. C'è qualcun altro che vuole parlare? [segue silenzio] Mi aiutano Joh e Fed allora a costruire un altro esempio		
157	Fed: allora anche Dan.		
158	R: Sì, proviamo a farlo con dei numeri		

	piccoli però		
159	Joh: Che cosa ha detto lui? 1×1 ?		
160	R: In cui però non ci sia l'1		
161	Mat: 2×2		
162	Dan: 2×2		
163	R: Ok. Fermi, calmi. Allora [si volta verso la lavagna, disegna un quadrato e, con un gesso di colore diverso, lo divide in 4 quadretti] questo sarebbe il cartoncino 2×2 . Ok? [R scrive 2×2 dentro al quadrato]	Viene introdotta una simbologia di tipo iconico che richiama i cartoncini che gli studenti hanno usato. Il disegno è quindi un segno artefatto.	Back to the task Viene ripercorsa l'attività fatta con i cartoncini ricorrendo però a una rappresentazione diversa, ovvero non ricorrendo proprio alla tavola, ma a rettangoli disegnati che rappresentano i cartoncini
164	Dav: Sì.		
165	R: lo voglio mettere insieme a un altro cartoncino . Come lo posso scegliere?	"mettere insieme" È un segno artefatto già emerso precedentemente per far riferimento all'incollaggio dei cartoncini ma può far riferimento anche all'operazione di somma.	
166	Joh: 2×3		
167	R: Ok. Perché mi state dicendo proprio 2×3 . Con che criterio l'avete scelta l'altra?	Probabilmente l'insegnante si aspetta che gli alunni esplicitino la presenza di un fattore in comune	
168	Joh; Perché il numero è... un numero sopra	Joh, invece che giustificare l'invarianza di un numero, argomenta il cambiamento dell'altro. "un numero sopra" sembra riferirsi al successivo	
169	R: Un numero è sopra [indica un punto nell'aria] e l' altro numero [fa un gesto rotatorio nell'aria] invece?	Ripete la frase dello studente ma sposta l'attenzione su "l'altro numero"	Focalization
170	M: Marti?		
171	Marti: Uguale..cioè...uguale a $2 \times$ qualcosa	Marti mette risponde secondo le attese dell'insegnante indicando l'uguaglianza tra uno dei fattori ed esprimendo con "qualcosa" la genericità dell'altro fattore	
172	M: qualcos'altro	L'insegnante sottolinea la variazione dell'altro fattore.	Focalization
173	R: Allora: questo che ci sta dicendo la Marti è molto importante [nel dirlo fa diversi beat con entrambi i pugni nell'aria di fronte a sé] se io li voglio appicciare [si volta di lato e sposta un pugno verso l'altro] ci deve essere almeno un [alza un indice] fattore , l'abbiamo visto anche prima...	Qui R in realtà aggiunge un elemento importante alla catena semiotica. La proprietà distributiva infatti non è ancora completa dato che si è rimasti a parlare di "secondi numeri" ma poco si è posto l'accento sui "primi numeri". Il fatto che dovessero esserci dei "fattori in comune" era emerso da	Focalization+Provide a synthesis

		alcuni gruppi nel lavoro in piccoli gruppi ma solo ora riceve la dovuta focalizzazione nella discussione. Si noti che i gesti ancora una volta richiamano l'attività con l'artefatto. Abbiamo ancora una volta un discorso ibrido in cui si parla di (e si fanno gesti su) cartoncini da "appicciare" ma si dice che ci deve essere un "fattore" (segno matematico) in comune. Le due cose verranno rimesse in relazione dopo.	
174	Fab: Uguale!	Completa la frase dell'insegnante sottolineando l'invarianza del fattore	
175	R: che sia uguale , che sia in comune . Allora voi mi avete suggerito [inizia a disegnare un rettangolo 2x3]	Dopo "uguale" ripete "in comune" come a voler validare l'affermazione dello studente sostituendo però il termine con uno sinonimo	Focalization+Provide a synthesis
176	Joh: Perché è in orizzontale .	"orizzontale" segno artefatto, si riferisce alla posizione del rettangolo disegnato.	
177	R: [mentre fa la quadrettatura dentro al rettangolo, Fig. 11.2.1.10a] Ma non solo perché è in orizzontale Joh, ma anche perché devono avere la stessa ...	"stessa" È usato al femminile, non si riferisce quindi al fattore in comune ma sta parlando delle caratteristiche del rettangolo	
178	Mat: linea... misura	"misura" La frase dell'insegnante è interpretata nel contest dei rettangoli	
179	R: [mettendo indice e pollice aperti lungo l'altezza del rettangolo appena disegnato, Fig. 11.2.1.10a] devono avere la stessa misura dell'altezza perché se uno fosse più alto non potrei [si volta e avvicina le due mani più volte] appiccarli uno all'altro	"stessa misura dell'altezza" Si riferisce ai rettangoli, ha però il potenziale di essere messo in relazione con la presenza di un fattore in comune	Focalization+Provide a synthesis
180	Dan: Ma se fai 3x2 all'incontrario ...	"all'incontrario" È un segno artefatto perché si riferisce alla posizione del cartoncino	
181	Sam: è un quadrato		
182	R: come li appiccico però?	"appiccico" Segno artefatto, fa riferimento all'attività svolta	
183	Sam: Rigirato .	"rigirato" Segno artefatto, si riferisce alla posizione del rettangolo. Questo segno era già comparso nella discussione sulla proprietà commutativa	
184	R: Dovrei appiccarli [tiene le mani a palmi aperti in verticale, una sopra l'altra e ne scambia le posizioni] di sopra	Si parla delle azioni sui cartoncini, si tratta di segni artefatto Anche i gesti richiamano in maniera iconica l'attività con l'artefatto e le	

		caratteristiche stesse dell'artefatto	
185	Fab: però ci sta .		
186	Dan: però ci sta!		
187	Joh: Se si rigira è 2×3	"si rigira" Come nel precedente intervento di Sam	
188	Nic: è uguale .	"è uguale" è potenzialmente polisemico: potrebbe semplicemente voler dire "è la stessa cosa" oppure potrebbe riferirsi alla congruenza tra i rettangoli o, ancora, all'uguaglianza dei risultati delle due operazioni	
189	R: sì certo, l'avevamo visto l'altra volta. Qui [indicando con l'indice il rettangolo appena disegnato] quindi	Qui sembra far riferimento alla discussione relativa alla proprietà commutativa	
190	Sam: Basta che sia un multiplo di due	"multiplo di due" Sam fa una stessizzazione tra le operazioni in cui compare 2 e i suoi multipli. Si tratta di un esempio di reificazione: l'operazione è vista come un oggetto, identificata col risultato.	
191	R: basta che sia un multiplo di due esatto. Cosa ci scrivo qui, 2×3 o 3×2 ?	Fa eco all'affermazione dello studente Questa focalizzazione permette quindi di legittimare il leggere la scrittura $2 \times \dots$ come "multiplo di due" il che fa entrare in gioco altri segni matematici	Focalization+ Ask for a synthesis
192	Coro: 2×3 .		
193	Dan: 3×2 dovrebbe essere girato [intanto R scrive 2×3 dentro al rettangolo, Fig. 11.2.1.10b]	"girato" segno artefatto che si riferisce alla posizione del cartoncino che però qui viene utilizzato in riferimento al segno matematico e quindi, nella frase, acquisisce il potenziale significato di riferirsi all'inversione dei fattori. La frase che se ne ottiene è ibrida e polisemica: traducibile sia nel solo contesto matematico sia in quello dell'artefatto	

Evoluzione dei segni Questa fase della discussione è caratterizzata dall'introduzione di segni che richiamano in maniera iconica l'artefatto: i rettangoli disegnati sulla lavagna con le loro quadrettature rappresentano le caselle della tavola di Laisant o i cartoncini ritagliati (Fig. 11.2.1.10). Compaiono molti termini che si riferiscono all'attività svolta precedentemente con l'artefatto come "cartoncino" (linee 163 e 165) oppure "appiccicare" (linee 173 e 179). Altri termini richiamano invece segni emersi nella discussione sulla proprietà commutativa; per esempio viene messa in relazione l'azione di "rigirare" il rettangolo con l'inversione dell'ordine dei fattori (linee 180-187).



Fig. 11.2.1.10: Rappresentazione grafica alla lavagna dei due cartoncini affiancati.

La necessità di una “misura” in comune tra i due rettangoli viene messa in relazione con la presenza di un fattore uguale tra le due moltiplicazioni (linee 174-179). Facendo riferimento al particolare esempio che viene proposto dagli studenti e analizzato alla lavagna, si arriva a stabilire che entrambe le moltiplicazioni considerate debbano rappresentare un “multiplo di due” (linea 190).

Ruolo dell’insegnante L’insegnante, probabilmente preoccupata del fatto che non tutti gli studenti abbiano condiviso i segni emersi nella parte precedente della discussione, decide di tornare alla consegna (linee 150-154). In particolare viene proposta una rappresentazione mista in cui compaiono sia rettangoli quadrettati (che richiamano l’artefatto) sia moltiplicazioni scritte col linguaggio simbolico (segni matematici).

Nel corso della discussione l’insegnante focalizza l’attenzione degli studenti sulla necessità che i due rettangoli abbiano la stessa altezza (linea 177) e, quando viene notato che questo corrisponde ad avere un fattore uguale, suggerisce l’espressione “in comune” come alternativa al segno proposto dagli studenti (linea 175).

Pertanto, se nella parte precedente della discussione era emerso il fatto che la trasformazione sintattica lascia invariato il risultato, adesso si arriva a stabilire la presenza di un fattore in comune, altro elemento fondamentale per il significato di proprietà distributiva.

11.2.1.5 Prodotto del fattore in comune per la somma degli altri fattori: due che moltiplica ... $2+3$

Nella parte finale della discussione si rilegge la relazione additiva tra i fattori in comune attraverso la nuova rappresentazione grafica.

Estratto 32			
	Trascrizione	Analisi segni	Insegnante
194	R: Quando io li appiccico insieme [avvicina le due mani con i palmi aperti, Fig. 11.2.1.11 poi si volta e scrive il simbolo = dopo i rettangoli] questi diventano che cosa?	Sia le parole sia i gesti fanno riferimento all’artefatto. Viene però inserito il simbolo di uguaglianza che a parole è letto come “diventano”, termine già emerso per parlare delle espressioni. Viene data una lettura procedurale dell’uguaglianza ma nel contesto delle operazioni tra cartoncini.	

195	Joh: un rettangolo		
196	R: diventano un unico [percorre con le dita il bordo di un grosso rettangolo nel suo spazio gestuale]	Si noti che l'aggiunta di "unico" alle parole di Joh sembra voler sottolineare che, partendo da due rettangoli se ne ricava uno solo. Quello che non viene detto a parole, viene detto con i gesti. L'aspetto interessante è che la parola di Joh "rettangolo" diventa il gesto di R e che diventerà poi il disegno alla lavagna. C'è una conversione continua da un sistema semiotico all'altro	Provide a synthesis
197	Mat: viene 10.	Interpretazione procedurale.	
198	Joh: 2×6.	Anche se sbaglia a determinare il prodotto, Joh mostra di star dando un'interpretazione relazionale	
199	R: Voi mi state suggerendo [fa un segmento verticale alto 2] che sia 2×... [fa un segmento orizzontale di lunghezza non definita]	Il "voi" è in realtà ingiustificato perché solo Joh ha parlato di una moltiplicazione. Sembra piuttosto un suggerimento sulla tipologia di risposta attesa che viene rinforzato col disegno.	Back to the task
200	Joh: Sei.		
201	Nic: 2×2, 4, 2×3, 6	Interpretazione procedurale	
202	Fed: Cinque [altri intervengono contemporaneamente dicendo lo stesso]		
203	R: Allora, qualcuno dice 2×5 qualcuno dice 2×6. Cosa pensate?		Ask for a synthesis
204	Fab: cinque!		
205	Nic: Ma deve fa 10.	Interpretazione procedurale	
206	R: Nic ice "fa 10, quindi deve essere 2×5". Però Dan aveva anche qualcos'altro da aggiungere		Focalization Ripete una frase dello studente interpretandola
207	Dan: sì, che è come si è fatto prima due... più tre.	Qui Dan mette in relazione la scrittura simbolica precedente con i segni ibdridi (rettangoli che richiamano l'artefatto e operazioni scritte in essi) riportati alla lavagna. A parole descrive la relazione additiva tra i fattori non comuni.	
208	R: cioè ci dice Dan che questo è largo due [mentre lo dice fa una graffa sopra la base superiore del rettangolo 2×2 e sopra la parentesi scrive 2] questo è largo 3 [fa un'operazione analoga per l'altro rettangolo] e quindi quando li metto insieme [completa il rettangolo dall'altra parte dell'=] è largo (molte voci dicono 5) due più tre [mentre lo dice fa la graffa sopra al nuovo rettangolo e scrive 2+3] che fa cinque	Qui la selezione dei simboli da parte di R è indirizzata verso un risultato simile a quello di prima, per questo sembra evitare di scrivere 5 ma rende esplicita la relazione 2+3. Anche se la relazione è la stessa di prima, viene però rappresentata in riferimento all'artefatto: non si parla di operazioni e fattori ma di larghezza dei rettangoli. Qui R introduce un segno ancora nuovo (le parentesi graffe) senza che	Provide a synthesis

	[annuisce, molti ripetono]	però sia stato condiviso	
209	Joh: 2×5		
210	M: d'accordo?	Questo intervento della maestra sembra lasciar poco spazio per risposte negative.	
211	Coro: sì... io sì		
212	R: [che intanto ha quadrettato il rettangolo. Fig. 11.2.1.12a] e quindi questa [poggia la mano in mezzo al rettangolo] a che operazione corrisponde?	Il segno matematico "operazione" richiede la produzione di segni matematici da parte dei ragazzi	Ask for a synthesis
213	Coro: 2×5.		
214	Nic: Dieci.	Interpretazione procedurale	
215	Dan: Non è 5×2 perché sennò dovrebbe essere girato [intanto R scrive dentro al rettangolo 2×(2+3)]	Viene utilizzato il termine "girato", segno artefatto riferito alla posizione del cartoncino, per parlare di inversione dell'ordine dei fattori	
216	R: Se lo scrivo così [Fig. 11.2.1.12] siete tutti d'accordo?	La scrittura in questo modo assume l'aspetto di quelle precedenti sebbene vi sia la notevole differenza data dalla presenza dei rettangoli.	
217	Coro: sì		
218	R: La storia è questa. Se io addiziono [scrive un simbolo + fra i due rettangoli di sinistra, Fig. 11.2.1.12c] 2×2 [lo indica poggiandoci sopra la nocca] e 2×3 [stesso gesto] è come fare [con l'indice indica uno alla volta i simboli dentro il rettangolo al secondo membro dell'uguaglianza] due che moltiplica	ancora una volta mette a confronto le diverse espressioni aritmetiche che però non appaiono come tali nonostante R inserisca quel simbolo + che sta a ricordare il + che c'era prima fra le parentesi.	Provide a synthesis
219	Coro: 2+3		
220	Joh: 2+3 fa 5		
221	Fab: è come fare i due risultati messi insieme	Viene riutilizzato "messi insieme" ma per riferirsi ai risultati invece che ai cartoncini. L'uso di questa stessa espressione nei due contesti offre l'occasione per un pivot che infatti viene subito ripreso dall'insegnante.	
222	R: [annuendo] è come fare i due risultati messi insieme.		Focalization Fa eco alla parole del bambino e in questo modo le valida

Evoluzione dei segni Quest'ultima parte della discussione mette in relazione la struttura delle espressioni scritte alla lavagna nella prima parte della discussione con il disegno dei rettangoli, che adesso viene arricchito di nuovi segni (Fig. 11.2.1.12). In particolare viene messa in relazione la misura della base del rettangolo ottenuto dal "appiccicare insieme" i rettangoli (linea 194) con la somma dei fattori non in comune delle moltiplicazioni di partenza (linea 207).



Fig. 11.2.1.11: Il gesto dell'insegnante richiama l'azione svolta lavorando con l'artefatto.

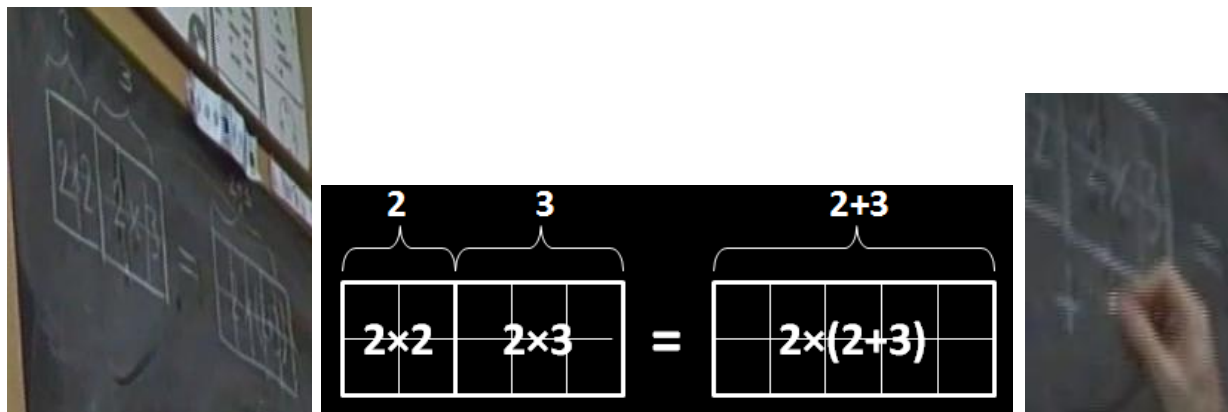


Fig. 11.2.1.12: La rappresentazione grafica alla lavagna viene arricchita.

Si noti che espressioni verbali del tipo “due che moltiplica ... due più tre” (linee 218-219) traducono la struttura dell’espressione scritta dentro al rettangolo più grande (Fig. 11.2.1.12). Tuttavia, la comprensione di una frase di questo tipo richiede l’utilizzo di $2+3$ come fattore, ovvero almeno una condensazione della somma.

Ruolo dell'insegnante Questa fase della discussione presenta le caratteristiche tipiche della fase conclusiva (Mariotti & Maracci, *Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur*, 2010) dato che l’insegnante richiede una sintesi che metta in relazione i segni prodotti finora (linee 203 e 212) e successivamente fornisce sempre una sintesi degli interventi degli studenti (linee 196, 208 e 218).

Si noti che le sintesi dell’insegnante fanno ricorso a una pluralità di sistemi semiotici: il riferimento all’artefatto è mediato dai gesti (linea 194) e dal disegno, le parole fanno spesso eco agli interventi degli studenti (linee 106 e 222), eventualmente con l’aggiunta di alcuni termini (linea 196).

11.2.2 Elaborati individuali: cosa è stato interiorizzato

Dopo la discussione, l’insegnante chiede agli studenti di spiegare con parole proprie quanto emerso dall’attività svolta con l’artefatto e il successivo confronto, nei piccoli gruppi e con tutta la classe. L’analisi dei testi prodotti dagli studenti viene riportata nella sezione 11.2.2.1.

Nel caso degli studenti della classe quinta, l’insegnante di classe ha deciso di proporre un ulteriore elaborato individuale. La consegna della lettera del bambino immaginario (cfr sez. 7.2) viene proposta esclusivamente come consegna da svolgere individualmente, non ne

segue nessuna attività semiotica di tipo collettivo. L'analisi dei protocolli acquisiti è presentata nella sezione 11.2.2.2 ed è utilizzata da noi per fare un bilancio di quanto delle attività svolte è stato fatto proprio dai singoli allievi.

11.2.2.1 Elaborati successivi alla discussione

Appena terminata la discussione presentata nella sezione 11.2.1, agli studenti viene chiesto di spiegare quanto è stato fatto e scoperto durante l'attività individuale e collettiva che si è appena conclusa. Uno studente non svolge la consegna, altri sette si limitano a descrivere gli accadimenti; nominano la proprietà distributiva affermando che se ne è discusso ma non la enunciano in alcun modo. Per esempio Pet afferma che "abbiamo scoperto che certe caselle della tabella fra loro hanno la proprietà distributiva".

Nei rimanenti testi viene enunciata la proprietà facendo uso di una ricca varietà di segni fra quelli emersi durante la discussione messi in relazione con diverse modalità. In alcuni protocolli si fa uso sia di parole sia di espressioni aritmetiche:

- Mat: Oggi abbiamo parlato di più della proprietà distributiva ve la spiego tipo facciamo $(8 \times 2) + (8 \times 8)$ basta **sommi il secondo addendo** e poi moltiplichiamo $8 \times 10 = 80$
- Eri: [...] poi unendo le **2 caselle** ti viene un **risultato** e infine **unendo le sagome** della **stessa misura** si ottiene un'**operazione** per esempio $1 \times 1 = 1$ $1 \times 2 = 2$ $1 + 2 = 3$
- Joh: [...] **Sommi il risultato delle moltiplicazioni** facendo $(8 \times 2) + (8 \times 8) = 8 \times 10$ o così $(8 \times 2) + (8 \times 8) = 8 \times (8 + 2)$
- Fed: Prop. Distrib. Oggi con la tabella abbiamo fatto una cosa che è tipo **espressione** ed abbiamo fatto es. $(8 \times 2) + (8 \times 8) = 8 \times (8 + 2)$ quel **primo due** lo abbiamo **addizionato con il terzo 8**. Poi **il terzo 8** lo abbiamo **messo a fare $8 + 2$** ed è venuto il ris.

Si può notare che la maggior parte dei segni utilizzati sono di tipo matematico (in grassetto nero). In tutti i protocolli viene messa in evidenza la relazione additiva tra i fattori non comuni alle moltiplicazioni. Questi vengono nominati facendo riferimento tramite segni contingenti che fanno riferimento alla posizione del fattore nel particolare esempio scelto. Si noti che gli esempi utilizzati sono gli stessi emersi nel corso della discussione. Il protocollo di Eri si distingue dagli altri per la presenza di segni artefatto (evidenziati in rosso): parla di caselle e di sagome unite, richiamando quindi l'attività svolta. Tuttavia, si può notare che è l'unica a mettere in evidenza la presenza di un fattore comune tra le moltiplicazioni ("stessa misura"); inoltre, mette in relazione l'attività svolta con l'artefatto con i segni matematici emersi nella discussione. Infatti, la frase è ibrida, dice che mettendo insieme sagome si ottiene un'operazione.

La messa in relazione tra segni artefatto e segni matematici compare anche in altri protocolli. Un caso paradigmatico è dato da Ale che riporta le sue osservazioni in forma di elenco. Tra le altre osservazioni, riporta le seguenti

- "risultati delle 2 oper. uniti insieme, **sommate caselle**"
- "si usa la **proprietà distr.**"

Si può notare che nella prima delle frasi riportate viene esplicitato il collegamento tra l'azione sulle caselle e il corrispondente significato matematico. Nei protocolli rimanenti viene fatto uso anche di rappresentazioni grafiche. Alcuni esempi sono riportati in fig. 11.2.2.1; si può notare che sono riportati molti fra i segni che sono comparsi durante la discussione alla lavagna, compresi i rettangoli che rappresentano i cartoncini, le parentesi graffe che ne indicano le dimensioni e le frecce utilizzate per mettere in relazione i fattori sommati. Il caso di Marta (Fig. 11.2.2.1b) si distingue perché, oltre a mettere in evidenza la relazione tra i fattori non comuni, viene esplicitata anche la necessità della presenza di un fattore "uguale".

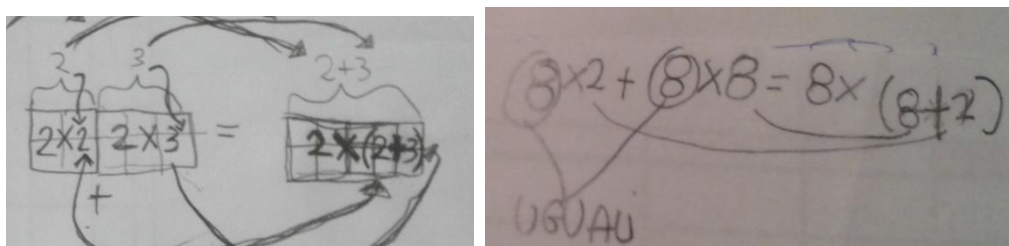


Fig. 11.2.2.1: Testi di Gab e Marta prodotti dopo la discussione.

Sono in tutto cinque gli alunni che ricorrono a simbologie del tipo "little shower" (David et al., 2014); lo fa Cat che riporta l'ultimo esempio presentato nella discussione e commenta:

Cat: [...] I secondi numeri di ogni operazione si **spostano** e sommandoli e moltiplicandoli per il primo fattore otteniamo il risultato [...]

L'allieva mette in evidenza la presenza di una trasformazione sintattica attraverso la quale i numeri si "spostano". La seconda parte della frase esplicita la struttura dell'espressione che si trova al secondo membro dell'uguaglianza. Viene detto che i numeri sono sommati tra loro e poi moltiplicati per il primo fattore.

Infine, è degno di nota il protocollo di Sar perché è l'unica studentessa che fornisce un esempio numerico diverso da quelli che sono stati scritti in precedenza alla lavagna, infatti scrive $(5 \times 3) + (5 \times 6) = [5 \times 9]$. L'esempio di Sar è tratto dalle caselle che lei aveva colorato durante la primissima attività individuale con l'artefatto. Sar mostra di aver rielaborato l'attività svolta individualmente prima della discussione utilizzando i segni emersi nella produzione semiotica collettiva.

In conclusione, anche se non per tutti gli allievi, si può affermare che viene mostrata l'appropriazione di segni condivisi durante la discussione per rappresentare la proprietà distributiva come relazione tra due espressioni aritmetiche equivalenti; almeno per quanto riguarda quelle presentate nel corso della discussione stessa. Tra gli allievi che mostrano questa individualizzazione dei segni, vi sono anche studenti che non hanno partecipato attivamente alla discussione collettiva con interventi ripetuti, come Cat, Eri, Marta, Gab e Sar.

11.2.2.2 Distributività come scomposizione: la lettera a Giulia

La lettera consegnata agli studenti della classe quinta differisce da quella dei bambini della seconda per il prodotto richiesto. Il testo consegnato è il seguente:

Ciao,

mi chiamo Giulia e frequento la quinta a Roma. Nella mia classe abbiamo lavorato con le tabelline geometriche e adesso ho un problema: ricordo molto bene i risultati delle tabelline fino al 5 ma non ricordo bene le altre. Adesso devo risolvere un problema in cui devo calcolare 8×7 , ho provato a contare i quadretti delle tabelline geometriche ma sono molto piccoli e mi confondo. La maestra ci ha detto di non usare la calcolatrice e non so proprio come fare a capire quanto fa 8×7 . Credi che ci siano dei modi in cui posso trovare il risultato? Se sì, me ne suggerisci qualcuno?

Grazie

La consegna viene svolta da 18 studenti ma ben pochi fanno riferimento alla proprietà distributiva. Cinque suggeriscono di far ricorso alle somme ripetute, alcuni di loro sfruttano la proprietà associativa della somma per ricondursi a somme più brevi di $8+8+8+\dots$ e $7+7+7+\dots$ raggruppandole a 2 a 2 oppure partendo da un risultato già noto (5×7) per poi effettuare altre tre somme, ovvero sommando $7+7+7$.

Sette bambini suggeriscono di ridisegnare il rettangolo 7×8 , ignorano quindi il fatto che Giulia, nella lettera, affermi di aver difficoltà a contare i quadretti; altri aggirano questa difficoltà suggerendo di usare il righello o di fare un puntino con la matita sui quadretti già contati per aiutarsi.

Soltanto tre studenti riportano segni emersi nel corso della discussione presentata nelle sezioni precedenti. Marti suggerisce due scomposizioni che descrive per mezzo di simboli matematici e segni grafici (Fig. 11.2.2.2).

$$(5 \times 8) + (8 \times 2) = 56$$
$$(5 \times 7) + (3 \times 7) = 56$$

Fig. 11.2.2.2: Testo di Marta per la risposta alla lettera di Giulia.

Marta utilizza delle espressioni aritmetiche in cui le parentesi sono utilizzate allo stesso modo in cui erano adoperate in quelle scritte alla lavagna durante la discussione (Fig. 11.2.1.5). Aggiunge una freccia rossa che esplicita la relazione additiva tra i fattori non comuni ai due prodotti inseriti tra parentesi. Si noti che, coerentemente con quanto richiesto dalla lettera, a destra del simbolo di uguaglianza è riportato il risultato e non il prodotto che si otterrebbe applicando la proprietà distributiva a quelli indicati tra parentesi. Viene qui data un'interpretazione procedurale al simbolo di uguaglianza.

Ricorrono soltanto a testo scritto Cat, Ale e Sam:

Cat: Ci ho pensato un po' e ti consiglio di usare la proprietà distributiva: devi scomporre uno dei due numeri (es.8) nella somma di due numeri più piccoli (es. 3 e 5) in questo modo la tua moltiplicazione diventa: $7 \times (3+5) = 7 \times 3 + 7 \times 5 = 21 + 35 = 7 \times 8$ in questo modo hai utilizzato le tabelline del 3 e del 5 che tu ricordi bene.

Ale: Visto che Giulia conosce le tabelline fino al 5 Giulia può applicare la proprietà distributiva. $8 \times 7 = (5+3) \times 7 = (5 \times 7) + (3 \times 7) = 35 + 21 = 56$

Sam: [...] Potresti sommare $7+7$ e con il risultato trovato lo sottrai da 70, il risultato di 7×10

Nei testi di Cat e Ale viene fatto esplicito riferimento alla proprietà distributiva. In particolare, Cat enuncia la proprietà in termini generali riportando poi gli esempi numeri tra parentesi. Si noti che entrambi utilizzano il simbolo di uguaglianza dandogli un'interpretazione relazionale: vengono uguagliate espressioni con diverse strutture, tutte equivalenti tra loro grazie alla proprietà distributiva. Solo una parte della scrittura così ottenuta richiama quanto emerso nella discussione (quella evidenziata in neretto), tuttavia si noti che l'ordine dei membri dell'uguaglianza è invertito il che rivela una visione bidirezionale del simbolo di uguaglianza. Le altre parti sono frutto di una rielaborazione degli studenti che mostrano così di aver interiorizzato l'uso dei segni condivisi nelle attività semiotiche collettive.

Nel testo di Sam, invece, la proprietà distributiva del prodotto sulla differenza compare in forma di teorema in atto. I segni utilizzati dallo studente non richiamano quelli emersi durante la discussione e quindi non appare evidente il legame tra quanto fatto dal bambino in questa attività individuale e l'attività con la tavola di Laisant svolta precedentemente.

11.2.3 Distributività nella classe quinta in sintesi

L'evoluzione dei segni presentata nelle sezioni precedenti è difficilmente schematizzabile in modo lineare. Nella discussione analizzata si possono rilevare diversi momenti in cui vi è un'intensa produzione di segni afferenti a sistemi semiotici diversi (parole, disegni, gesti). In particolare, si alternano momenti con una forte concentrazione di segni matematici a momenti in cui più frequentemente ci si riferisce all'attività svolta con l'artefatto. Questa alternanza è generalmente legata ad interventi dell'insegnante che, quando la discussione è intessuta soprattutto su segni matematici, effettua interventi in cui viene richiesta l'interpretazione dei segni scritti con la finalità di promuovere il collegamento fra i segni matematici emergenti e segni legati al contesto dell'artefatto.

L'alternanza di produzione di segni di due tipi diversi porta come risultato la creazione di una complessa rete semiotica imperniata soprattutto intorno al significato di unione di cartoncini, derivante dall'azione di incollare realmente svolta prima della discussione; tale significato viene espresso attraverso segni verbali quali "unire cartoncini" o "appiccicare cartoncini" o attraverso un *catchment* gestuale dato dalla ripetizione di un gesto specifico – avvicinamento delle due mani – che, in modo iconico, rappresenta tale azione.

La rete semiotica che emerge nell'analisi riportata nelle sezioni precedenti è schematizzata nella figura 11.2.3.1. Due segni sono messi in relazione con una linea continua quando compaiono insieme in uno stesso intervento durante la discussione. Le linee tratteggiate indicano le relazioni che sono messe in evidenza soltanto in elaborati individuali. Sono messi in verticale i segni che, all'occhio dell'esperto, possono essere considerati come equivalenti; una linea grigia divide i segni artefatto (in basso) da quelli matematici (in alto).

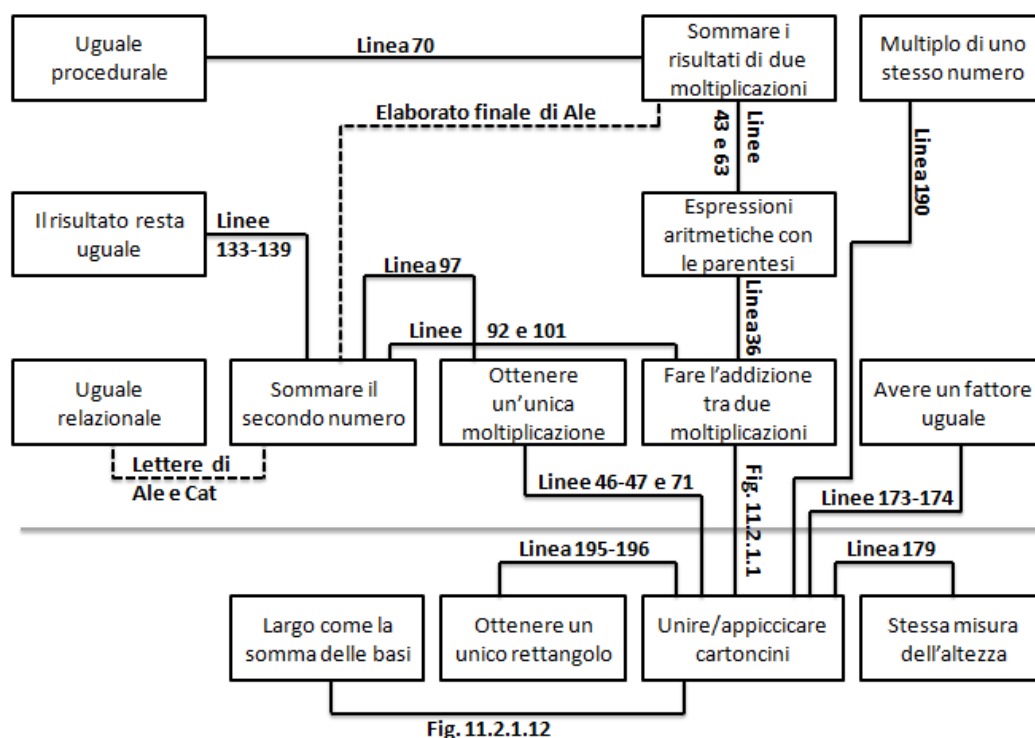


Fig. 11.2.3.1: Schematizzazione della rete semiotica costruita nell'intervento didattico e relativa alla proprietà distributiva.

Si noti che i segni “unire cartoncini” e “appiccicare cartoncini”, qui considerati come aventi lo stesso significato, fungono da perno per il collegamento fra i segni artefatto e vari segni matematici; si tratta quindi di segni pivot. Svolge il ruolo di segno pivot anche il gesto di avvicinamento delle due mani (Fig. 11.2.1.1), infatti mette in relazione l'unione dei cartoncini con l'addizione di moltiplicazioni.

Si può mettere in evidenza anche che il segno “sommare il secondo numero”, che ha un carattere contingente perché interpretabile solo facendo riferimento ai simboli aritmetico-algebrici prodotti durante la discussione, mette in relazione numerosi segni matematici e svolge quindi un particolare ruolo “nodale” all'interno della discussione.

Le relazioni tra i segni che emergono sono diverse rispetto a quelle osservate nella classe seconda. Nel caso degli studenti più giovani è stato possibile individuare una graduale progressione dai segni relativi all'attività svolta con l'artefatto verso segni matematici, alcuni dei quali introdotti per la prima volta proprio durante la discussione. Nel caso degli studenti della classe quindi invece emergono numerosi segni matematici dagli studenti stessi e quindi

anche il ruolo dell'insegnante non è tanto quello di selezionare segni pivot per arrivare a introdurre nuovi segni matematici quanto invece per mettere in connessione quelli già noti con l'attività svolta col nuovo artefatto. In conclusione, si hanno evidenze di forti differenze nei risultati ottenuti nella classe seconda e nella classe quinta, sia per quel che riguarda le relazioni tra i segni che emergono nelle varie attività semiotiche, sia relativamente all'azione dell'insegnante. Tali differenze saranno discusse dettagliatamente nel prossimo capitolo.

12 Discussione e conclusioni

Il lavoro sviluppato in questa tesi parte da un'analisi epistemologica e didattica del contenuto matematico "proprietà della moltiplicazione" (cap. 3) e individua nell'approccio relazionale una modalità privilegiata per un apprendimento con significato (ovvero una codifica semantica, cfr sez. 2.2) dei fatti moltiplicativi. Si è ipotizzato che l'artefatto "tavola di Laisant" potesse essere utilizzato in classe per introdurre (anche precocemente) le proprietà della moltiplicazione e quindi agevolare la memorizzazione dei fatti moltiplicativi.

L'ipotesi è stata elaborata nel quadro della Teoria della Mediazione Semiotica (cfr sez. 5.3) e testata attraverso un intervento sperimentale, progettato e realizzato coerentemente rispetto a tale quadro. Le attività, organizzate in cicli didattici, avevano l'obiettivo di sviluppare i significati di proprietà commutativa e distributiva esplicitando il potenziale semiotico dell'artefatto stesso. L'analisi dei dati raccolti ha seguito una metodologia mista mirata non solo a rilevare gli esiti dell'intervento in classe rispetto agli obiettivi prefissati, ma anche a studiare il processo di mediazione semiotica ipotizzato (cfr cap. 7).

Prima di sintetizzare e discutere i risultati elaborati nei capitoli precedenti (capp. 8-11), si vuole dedicare uno spazio a note precauzionali per l'interpretazione dei risultati stessi. Infatti, le scelte operate sui metodi (cfr cap. 6) comportano anche dei limiti nella possibilità di estendere ad altri contesti i risultati qui ottenuti. La prima sezione di questo capitolo è quindi dedicata a delle riflessioni metodologiche a cui seguirà l'elencazione e discussione dei risultati ottenuti (nella sez. 12.2).

12.1 Riflessioni metodologiche

I limiti della ricerca sono, ovviamente, legati alle scelte fatte sui metodi da adottare per l'implementazione della sperimentazione, per la raccolta dei dati e la loro analisi. Molti di questi limiti dipendono dalla scelta di svolgere la sperimentazione in un contesto reale e non in un contesto di laboratorio. Pertanto, si vuole dedicare una particolare riflessione ai limiti che sono legati al contesto della sperimentazione; successivamente si discuteranno anche quelli legati alle modalità di raccolta e analisi dei dati. La sezione 12.1 si conclude con una riflessione sulle potenzialità della ricerca in termini di rilevanza all'interno del trend della "Ricerca per l'innovazione" in cui si inserisce.

12.1.1 Limiti dovuti al contesto

L'intervento sperimentale proposto, essendo nel contesto di una Ricerca per l'Innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, *Italian trends of research in mathematics education: A national case study in the international perspective*, 1998), si è svolto nel contesto di classi reali e quindi durante le normali ore curricolari della scuola. Questa scelta ha implicato la necessità di concordare tempi e modalità di attuazione dell'intervento con le insegnanti delle classi coinvolte. Se questo tipo di approccio ha permesso di ottenere dati realistici, di tipo ecologico (Neisser, *Conoscenza e realtà*, 1978), è innegabile anche che abbia imposto particolari vincoli

legati all'organizzazione degli ambienti e dei tempi della scuola, alla normativa vigente in termini di privacy degli studenti e di responsabilità delle maestre nonché alle esigenze didattiche delle insegnanti stesse.

Un primo limite è dato dall'impossibilità di tenere sotto controllo il processo di apprendimento degli studenti in ogni suo momento. L'intervento in classe si è svolto su un periodo lungo (cfr sez. 6.2) e l'implementazione delle consegne progettate si è alternata con le molte altre attività didattiche in cui le classi sono coinvolte. La cadenza delle attività con la tavola di Laisant è dipesa anche dalla disponibilità delle insegnanti. Gli studenti, nel frattempo, sono stati coinvolti anche in altre attività matematiche che hanno sicuramente un'influenza sugli esiti dell'intervento; così come è ovvio che succeda in un contesto reale. Sono state effettuate ulteriori raccolte di informazioni *ad hoc* (cfr sez.6.3) per conoscere il più possibile gli eventi accaduti tra una video-registrazione e l'altra, ma resta comunque impossibile conoscere la totalità dei segni che sono stati condivisi dalla classe in tali momenti.

Per quanto riguarda i tempi, la conclusione delle attività in classe ha coinciso con le ultime settimane dell'anno scolastico. Pertanto, il tempo necessario a raccogliere le informazioni sugli esiti dell'intervento è stato breve. Volendo anche indagare la memoria a lungo termine, si è scelto di effettuare un test (sez. 6.4.4) all'inizio dell'anno scolastico successivo, ma questo è stato di difficile organizzazione nel caso degli studenti di quinta primaria. La maggior parte di loro ha partecipato volontariamente alla raccolta dati nonostante non fossero più studenti della scuola in cui è avvenuto l'intervento sperimentale, ma per una piccola minoranza di loro non sono disponibili dati (All. 2). Nel caso degli studenti di seconda primaria, è stato possibile effettuare delle interviste di approfondimento (sez. 6.4.5) quando le interpretazioni del test a lungo termine risultavano ambigue; per gli studenti passati alla scuola secondaria, questo non è stato possibile.

Inoltre, l'uso di classi reali per l'implementazione dell'intervento ha coinciso con la scelta di implementare le consegne in collaborazione con l'insegnante della classe, cioè non proponendo un insegnante diverso rispetto alla maestra già conosciuta dagli studenti. Da una parte questo può essere un limite per un confronto effettivo tra gli interventi dato che differiscono in base allo stile di insegnamento delle maestre. D'altra parte però è anche un elemento di ricchezza perché permette di mettere a confronto i diversi ruoli svolti dalle docenti nel corso delle discussioni; così si ha una ricchezza maggiore di dati rispetto a quelli che si sarebbero avuti se l'insegnante fosse stata la stessa in entrambe le classi.

Infine, si tiene a sottolineare che tutti i dati raccolti riguardano due sole classi. Il numero di studenti coinvolti è un numero piccolo e si tratta di classi della stessa scuola e quindi della stessa città e dello stesso Paese. La scelta di utilizzare un piccolo numero di studenti è fondamentale per via dei metodi di analisi qualitativa scelti; tuttavia appare fondamentale evidenziare che si sono analizzati processi relativi a soli due gruppi-classe che fungono da casi di studio per un'analisi microgenetica. Nessuno dei risultati ottenuti è direttamente generalizzabile ad altre classi, in contesti e culture diversi. Tuttavia, come si vedrà nelle ultime due sezioni di questo capitolo, permettono di dare sia dei contributi teorici nell'ambito della

ricerca in didattica della matematica, sia suggerimenti effettivi rispetto alla pratica di insegnamento.

12.1.2 Limiti dovuti ad altre scelte nella raccolta e analisi dei dati

Il fatto di aver previsto di effettuare l'intervento anche in una classe quinta ci ha costretti a porci la problematica di conoscere le abilità e conoscenze pregresse degli studenti coinvolti. Tali informazioni sono state reperite sia attraverso un'intervista all'insegnante sia attraverso un apposito pre-test (sez. 6.4.1). Non è stata svolta un'analoga raccolta di informazioni nella classe seconda dato che gli studenti non avevano conoscenze pregresse sulle proprietà della moltiplicazione e sulle espressioni aritmetiche; pertanto i risultati di tale test apparivano come facilmente prevedibili e poco significativi. Chiaramente questa costituisce una differenza tra i due gruppi-classe coinvolti e quindi un limite alle possibilità di confronto. Tuttavia, l'analoga nei test successivi all'intervento fornisce comunque delle importanti informazioni per effettuare un paragone (cfr sez. 12.2.1.3).

Un altro limite nella raccolta dati è dato dall'utilizzo di una sola videocamera mobile per effettuare i video in classe. La mobilità ha permesso di avere un'immagine di chi parlava di volta in volta ottenendo così informazioni non solo su quello che veniva detto ma anche sulla comunicazione non verbale. Tuttavia, non sempre lo spostamento di inquadratura è stato rapido quanto lo sono stati gli interventi degli studenti e quindi, in alcune occasioni, non è stato possibile avere informazioni circa i gesti di alcuni allievi. L'utilizzo di un numero maggiore di videocamere avrebbe permesso di ovviare al problema ma gli strumenti a disposizione e il limitato numero di adulti presenti nel momento dell'implementazione dei cicli didattici hanno imposto un limite anche al numero di videocamere utilizzabili.

Infine si vuole ricordare un limite dettato dalla scelta di utilizzare un test progettato per la diagnosi della discalculia evolutiva come strumento di valutazione delle prestazioni degli studenti nel richiamo dei fatti moltiplicativi (sez. 6.4.2). Dato che questo tipo di diagnosi non viene effettuata prima della classe terza, non sono disponibili dati di confronto per i bambini di seconda; pertanto si sono calcolati i punteggi della classe seconda facendo riferimento ai dati di terza. Tuttavia, per sopperire in parte a questo limite, si è deciso di far svolgere il test a un'altra classe seconda della stessa scuola in modo da verificare se un'eventuale differenza fra le prestazioni dei bambini di seconda coinvolti nella sperimentazione e i dati forniti per la terza primaria dai creatori della Batteria per la Discalculia Evolutiva (Biancardi & Nicoletti, 2004) fosse ascrivibile alla differenza di età piuttosto che all'intervento sperimentale stesso.

I risultati così ottenuti, insieme a quelli emersi dalle altre raccolte dati citate, forniscono delle risposte alle domande di ricerca che ci siamo poste. Tali risultati sono sintetizzati e discussi nella sezione 12.2.

12.1.3 Test di adeguatezza

Nel presentare il trend della "Ricerca per l'innovazione", in cui questo lavoro è inquadrato, Arzarello e Bartolini (1998) propongono dei test di adeguatezza. Il primo è il test di *minimalità*:

in a research study in mathematics education at least two of the three components that corresponds to trends A, B and C are considered. Relevance requires that all three of the components be considered⁶⁰. (*ibidem*, p. 251)

Le componenti a cui viene fatto riferimento sono i concetti matematici (trend A), l'innovazione didattica (trend B), i processi cognitivi (trend C). Nel nostro caso, la presenza di tutti e tre gli aspetti viene messa particolarmente in evidenza nel capitolo 4, in cui l'artefatto viene scelto proprio analizzandone gli aspetti epistemologici, cognitivi e didattici. Nei capitoli di analisi dei dati, queste diverse componenti sono messe in relazione tra loro: per esempio le routine ricostruttive sono analizzate dal punto di vista matematico (mettendo in luce le proprietà coinvolte) e analizzandone il carico cognitivo per la memoria di lavoro. Inoltre, con le analisi del processo di mediazione semiotica si punta a esplicitare il legame tra il pensiero relazionale emergente dopo l'intervento e quanto avvenuto durante l'intervento stesso. In questo senso, il presente lavoro soddisfa anche il secondo test, quello di *inter-funzionalità dinamica*:

in a research study in mathematics education the dynamic inter-functionality between the components is respected, i.e. analysis is focused on the mutual relationships between the components rather than on the components themselves⁶¹. (*ibidem*, p. 253).

Pertanto, se nella rassegna della letteratura e nell'analisi a priori si sono analizzate separatamente le componenti, nel sintetizzare i risultati si metteranno invece in luce le relazioni che tra queste intercorrono piuttosto che fornire un'analisi separata.

12.2 Sintesi dei risultati

Lo studio pilota sulle memorie degli adulti presentato nel primo capitolo è stato l'innescio per una prima formulazione delle domande di ricerca (sez. 1.3). Lo studio della letteratura sul tema (capp. 2-3) e la scelta di un opportuno quadro teorico (cap. 5) hanno portato a una riformulazione delle domande stesse (sez. 5.4).

Le domande di ricerca hanno orientato il disegno della ricerca (cap.6) in modo che i risultati ottenuti fossero rispondenti proprio a tali domande. Nelle varie sezioni che seguono si sintetizzano i risultati ottenuti dall'analisi mostrata nei capitoli precedenti mettendo in evidenza il modo in cui rispondono alle domande di ricerca. Per farlo, si è divisa la sezione 12.2 in due parti: una prima parte relativa ai prodotti dell'intervento sperimentale (sez. 12.2.1) e una seconda parte a proposito dei processi studiati (sez. 12.2.2). Ciascuna di queste sezioni è a sua volta articolata nelle varie sotto-domande di ricerca a cui si risponde in modo che ogni domanda sia seguita dalla presentazione dei risultati su cui si basa la risposta.

⁶⁰ In uno studio di ricerca in didattica della Matematica sono considerate almeno due delle tre componenti che corrispondono ai trend A, B e C. La rilevanza richiede che tutte e tre le componenti siano considerate.

⁶¹ In uno studio di ricerca in didattica della Matematica l'interfunzionalità dinamica tra le componenti viene rispettata, cioè l'analisi focalizza sulle mutue relazioni tra le componenti piuttosto che sulle componenti a sé stanti.

12.2.1 Prodotti dell'intervento

Una delle ipotesi da cui questo lavoro prende le mosse è che lo sviluppo del pensiero relazionale in ambito moltiplicativo possa favorire il richiamo dei fatti aritmetici relativi a questa operazione. Pertanto, ci si è chiesti

Che prestazioni hanno gli studenti nel richiamo dei fatti moltiplicativi dopo l'intervento con la tavola di Laisant?

In particolare ci si domanda se le prestazioni sono da considerarsi buone rispetto a quelle medie di altri studenti italiani e se effettivamente i bambini coinvolti nella sperimentazione mostrano di far leva sul pensiero relazionale. Per rispondere a ciascuna di queste domande si è fatto uso di diversi strumenti di raccolta dati. Infine, si sono messe a confronto le prestazioni degli alunni di diverse età.

12.2.1.1 Gli studenti hanno buone prestazioni nel richiamo dei fatti moltiplicativi?

Calcolando i punteggi relativi al test BDE (sez. 8.1) si nota che il valore medio per il Quoziente di Calcolo dei bambini della classe seconda è al di sotto del valor medio ottenuto dal campione di studenti usato per validare il test. Questa differenza è interpretabile come effetto dell'anno di scolarizzazione di differenza tra il gruppo sperimentale e gli studenti che hanno validato il test stesso.

Per quanto riguarda i punteggi ottenuti nei compiti "tabelline" e "moltiplicazioni a mente", ossia i due compiti in cui è coinvolto il richiamo di moltiplicazioni (cfr sez. 8.1.1), la classe si comporta in modo del tutto paragonabile al campione di studenti di terza primaria usato per la normalizzazione. Nel compito "moltiplicazioni a mente" la deviazione standard è addirittura minore di quella del campione di validazione della BDE.

La maggior parte degli errori consistono in esitazioni, ovvero tempi di risposta più lunghi rispetto a quelli massimi ammissibili nella somministrazione della BDE. Questo potrebbe significare che, per i risultati non memorizzati, molti studenti abbiano sviluppato strategie ricostruttive che sono più dispendiose in termini di tempo rispetto al richiamo diretto dalla memoria. Nella maggior parte dei casi gli studenti arrivano comunque a risultati corretti; mostrano quindi l'acquisizione di competenze più complesse della semplice memorizzazione.

Dal confronto della seconda sperimentale con la seconda di controllo (sez. 8.2.2) si evince che *la classe seconda sperimentale ha delle prestazioni significativamente superiori rispetto alla classe di controllo nei compiti di richiamo di fatti moltiplicativi.*

Non ci sono differenze significative in tutte le altre prove e, di conseguenza, neanche nel Quoziente di Calcolo complessivo. Quindi, le specificità degli studenti della classe seconda sperimentale influenzano particolarmente e in modo positivo le prestazioni in compiti relativi alla sola operazione di moltiplicazione.

Nel caso della classe quinta (sez. 8.1.2) è possibile confrontare i risultati con quelli del gruppo di coetanei che ha contribuito alla validazione della BDE. Il valore medio ottenuto dalla classe è paragonabile a quello del campione di validazione (All. 1). Pertanto gli studenti di quinta

elementare hanno prestazioni nella media. Anche nei singoli compiti, *la classe quinta si comporta in modo del tutto paragonabile al campione usato per la normalizzazione del test.*

Si può notare che la deviazione standard nei due compiti di richiamo di moltiplicazioni è più alta di quella che gli autori del test hanno ottenuto col campione di validazione. Se si eliminano il valore più alto e il valore più basso della classe si ottengono valori paragonabili (addirittura inferiori). Quindi, il risultato di queste consegne del test risente molto dell'effetto dei valori estremi. L'intervento sembra essere stato efficace per gli studenti più deboli, che hanno raggiunto il livello dei compagni più forti con l'eccezione dei due studenti che hanno prestazioni agli estremi.

12.2.1.2 Gli studenti ricostruiscono i fatti moltiplicativi facendo leva sul pensiero relazionale?

L'analisi delle risposte degli studenti al compito di completamento della tavola pitagorica (sez. 8.3) ha permesso di mettere in evidenza cinque routine messe in atto dagli studenti per ricostruire un fatto moltiplicativo quando non direttamente richiamabile.

- Facendo riferimento alla letteratura citata nella sezione 3.4.2, la **routine A** può essere classificata come una strategia di *calcolo con sequenze di conteggio*. Questa routine consiste nell'elencazione di una sequenza di numeri senza nessuna specificazione su come questi numeri siano ottenuti. Si tratta di una routine di tipo procedurale basata sul richiamo mnemonico di una sequenza di risultati.
- La **routine B** si basa sul *modello iterativo* (cfr sez. 3.4.1) della moltiplicazione e può essere considerata un caso di *calcolo additivo* (Sherin & Fuson, 2005). Anche questa routine è associabile a un pensiero di tipo procedurale.
- La **routine C** consiste, invece, in un'applicazione della proprietà commutativa. Si basa su una proprietà aritmetica, quindi la sua applicazione richiede senso dell'operazione e la consapevolezza dell'equivalenza delle moltiplicazioni con i fattori invertiti. Pertanto, questa routine può essere associata al pensiero relazionale.
- Nel caso della **routine D** si sfrutta un prodotto noto e da esso si parte con un processo di tipo iterativo. Gli studenti che seguono questo comportamento potrebbero considerare la prima moltiplicazione richiamata come condensazione del processo di somma ripetuta, poi procedono avanti (o indietro) sempre per somme ripetute. Si tratta di un comportamento procedurale.
- Nella **routine E** si sfruttano due prodotti già noti e si applica (eventualmente in forma di *teorema in atto*) la proprietà distributiva. Questa routine rappresenta un'istanza di pensiero relazionale: per metterla in atto è necessario riconoscere l'uguaglianza fra i risultati della procedura attuata e dell'operazione richiesta. Tale equivalenza si basa, in modo non sempre esplicito, sulla proprietà distributiva della moltiplicazione.

Il confronto tra le diverse classi (sez. 8.4) permette di mettere in evidenza che le due classi sperimentali fanno maggiormente uso della routine C rispetto agli studenti della classe di controllo. La routine E è poco utilizzata nella seconda sperimentale, compare spesso nella classe quinta e non è mai esplicitata dagli studenti della classe di controllo; questo gruppo-

classe mette in atto più frequentemente la routine D che è una routine complessa in termini di carico cognitivo (cfr sez. 8.3.3) ma procedurale.

Le routine C ed E, che caratterizzano le due classi sperimentali, sono invece due routine che fanno leva sul pensiero relazionale: consistono in applicazioni della proprietà commutativa e della proprietà distributiva, entrambe oggetto dell'intervento in classe con la tavola di Laisant. *Gli studenti delle classi coinvolte nell'intervento dimostrano più frequentemente l'applicazione di pensiero relazionale nella ricostruzione di fatti aritmetici rispetto a quanto fatto dagli allievi della classe di controllo*, questo risultato appare ricollegabile proprio all'intervento attuato.

12.2.1.3 Che differenze ci sono in gruppi-classe di età diversa?

I risultati sintetizzati nelle risposte alle prime due sotto-domande mettono in evidenza delle differenze tra le performance di studenti di età diversa. Per quanto riguarda il richiamo di fatti moltiplicativi gli studenti di quinta hanno prestazioni equivalenti ai loro coetanei in tutta la prova mentre quelli di seconda sono paragonabili agli allievi di terza soltanto nelle prove sulla moltiplicazione; hanno risultati peggiori nelle altre. *Una possibile interpretazione è che queste differenze siano imputabili al maggior lavoro sul calcolo scritto e sulle operazioni di addizione e sottrazione* che è stato svolto dai bambini più grandi nei precedenti anni scolastici.

Questo risultato suggerisce che l'introduzione precoce delle proprietà della moltiplicazione risulti in prestazioni migliori nel richiamo dei fatti moltiplicativi soprattutto per gli studenti che ne conoscono pochi; questo non è testimoniato solo dalle migliori prestazioni della classe seconda ma anche dal fatto che nella classe quinta si misura una deviazione standard più bassa rispetto a quelle del campione di validazione della BDE. Di fatto, le proprietà forniscono possibili modalità di ricostruzione dei risultati delle moltiplicazioni, esse costituiscono una valida alternativa al richiamo diretto. D'altra parte, quando i fatti moltiplicativi sono disponibili in memoria, l'applicazione delle proprietà della moltiplicazione non è più la strategia ottimale (sia in termini di tempo di risposta, sia di carico cognitivo) e quindi le prestazioni degli studenti che hanno già un ampio repertorio di fatti memorizzati non migliorano sensibilmente a seguito dell'intervento.

Un'altra differenza è registrabile per quanto riguarda le routine osservate: la routine A caratterizza le classi seconde differenziando le loro prestazioni da quelle della quinta. Si tratta una routine decisamente procedurale e che richiede uno scarso impiego della memoria di lavoro; in letteratura viene classificata come routine immatura (Sherin & Fuson, 2005) proprio perché messa in atto più frequentemente dagli studenti più giovani.

La routine E sembra invece caratterizzare la classe quinta; è una delle routine più complesse, che richiede un carico cognitivo alto (cfr. sez. 8.3.3) e gestibile soltanto quando alcuni fatti moltiplicativi sono già disponibili in memoria. Inoltre, l'applicazione di questa routine è un'istanza di *pensiero relazionale che sembra quindi essere applicato maggiormente nella ricostruzione di fatti moltiplicativi dagli studenti di quinta rispetto a quelli di seconda*.

Si noti che quest'ultima affermazione non è in contrasto col fatto che gli studenti della classe quinta impieghino meno frequentemente strategie ricostruttive; in quei casi in cui le applicano, queste fanno spesso affidamento al pensiero relazionale. Inoltre, questo non

significa che gli studenti di seconda non abbiano sviluppato pensiero relazionale. Questo viene messo in luce dall'analisi del test a lungo termine e dalle interviste di approfondimento (cap. 9): in entrambi i gruppi-classe appare chiara la presenza di istanze di pensiero relazionale.

Una differenza è riscontrabile nel fatto che nella classe quinta primaria sono molti gli studenti che fanno esplicito riferimento alle proprietà della moltiplicazione per giustificare la correttezza delle equivalenze proposte in quest'ultimo test. Per i bambini della classe seconda questo avviene quasi esclusivamente per la proprietà commutativa. Tale proprietà è enunciata da molti, ma con modalità diverse: alcune volte si fa riferimento solo al piano sintattico (si decreta l'equivalenza facendo riferimento all'ordine dei fattori invertito), altre solo al piano semantico (si confrontano i risultati). Pertanto se ne può concludere che molti fra gli studenti di seconda hanno una visione della proprietà che necessita di un'armonizzazione dei due piani sintattico e semantico.

Lo stesso può essere affermato nel caso della proprietà distributiva che mostra delle peculiari fonti di difficoltà ascrivibili all'impossibilità di darne una breve formulazione verbale così come al fatto che non si tratta di una proprietà *di* una operazione ma piuttosto una relazione *fra* due operazioni nonché alla mancanza di simmetria nelle strutture aritmetiche utilizzate per rappresentarla (cfr sez. 9.2.1). Si nota anche che alcuni studenti, nel corso dell'intervista di approfondimento, cambiano il loro modo di utilizzare la proprietà distributiva arrivando ad applicarla correttamente. Pertanto si può affermare che, al termine dell'intervento sperimentale, *l'uso della proprietà distributiva per validare uguaglianze tra espressioni aritmetiche è interiorizzato da molti fra gli studenti di quinta mentre è entrato a far parte della zona di sviluppo prossimale di alcuni fra quelli di seconda.*

Per quanto riguarda il senso dell'operazione degli studenti, si può mettere in evidenza che i discorsi degli studenti delle diverse classi sembrano muoversi su due piani differenti: per gli studenti di seconda, l'equivalenza delle espressioni ai due membri di un'uguaglianza è verificabile soprattutto attraverso il calcolo dei risultati; tale calcolo può essere eventualmente abbreviato utilizzando le proprietà delle operazioni. Il simbolo di uguaglianza è interpretato per lo più come espressione di un'azione di confronto tra risultati; alcuni notano una differenza nei significati attribuibili a tale simbolo e manifestino un disagio nell'usarlo con significati diversi (sez. 9.2.1.1).

Gli oggetti del discorso sono i numeri sui quali le proprietà agiscono, generalmente, in forma di teorema in atto. Vi sono comunque alcuni segni di reificazione delle operazioni; si riscontrano negli studenti che riescono a mostrare, in alcune occasioni, una visione dell'uguale come segno di equivalenza. Nel discorso degli allievi di quinta invece le proprietà sembrano essere interpretate come regole di trasformazione sintattica da applicare agli oggetti matematici 'operazioni' (sez. 9.1). Il confronto di espressioni viene interpretato dagli studenti in termini di ricerca di una proprietà che trasformi un'espressione a un membro dell'uguaglianza nell'altra; l'uguale è visto come simbolo di equivalenza.

Una possibile spiegazione delle differenze tra gli allievi di seconda e quelli di quinta risiede nel fatto che gli studenti di quinta elementare abbiano già reificato l'oggetto matematico 'operazione' prima dell'inizio dell'intervento sperimentale e pertanto hanno potuto trarre

vantaggio dal fatto che, per loro, le moltiplicazioni costituivano già oggetti manipolabili e sui quali è possibile e ha senso ‘applicare regole’. Per i bambini di seconda elementare si trattava di oggetti ancora da “costruire”, si trattava di processi, eventualmente condensati. Le proprietà possono agire su tali processi per renderli più brevi o semplici.

12.2.2 Processo di mediazione semiotica

L’introduzione dell’uso dell’artefatto “tavola di Laisant” non è sicuramente diffusa nella tradizionale didattica dei fatti moltiplicativi e delle proprietà della moltiplicazione in Italia. Si è deciso quindi di indagare dettagliatamente il modo in cui il processo di mediazione semiotica è avvenuto. In particolare, ci si è chiesti

L’analisi del processo di mediazione semiotica attraverso la tavola di Laisant (con i cicli didattici progettati) mostra lo sviluppo del significato matematico di “proprietà di una operazione” – in particolare dei significati matematici di “proprietà commutativa della moltiplicazione” e “proprietà distributiva”? Ci sono differenze fra gruppi-classe di diversa età?

La risposta a questa doppia domanda è dettagliata nelle risposte alle singole sotto-domande elencate di seguito.

12.2.2.1 Quali aspetti del potenziale semiotico dell’artefatto emergono nell’attività di classe?

Nel capitolo 4 sono state messe in evidenza le caratteristiche della tavola di Laisant che possono permettere agli studenti, seguendo consegne appositamente progettate, di esplorare le proprietà della moltiplicazione. In particolare, nel capitolo 7 sono state elencate le consegne realizzate nell’intervento sperimentale specificando come, attraverso di esse, il potenziale semiotico dell’artefatto possa essere espresso, ovvero mettendo in evidenza i legami tra le consegne e i significati matematici obiettivo dell’intervento. Per affrontare tali consegne sono sempre utilizzati cartoncini rettangolari fabbricati dagli studenti che divengono, per le attività analizzate, parte integrante dell’artefatto stesso.

La prima consegna di sovrapposizione di uno stesso cartoncino a due caselle (sez. 7.2) è finalizzata a esplicitare la proprietà commutativa: si può sfruttare la tavola di Laisant per enunciarla per via “geometrica”. Infatti, se due rettangoli hanno le stesse dimensioni (stessi fattori) allora è possibile ruotare o ribaltare uno dei rettangoli per sovrapporlo all’altro. Due rettangoli congruenti contengono lo stesso numero di quadretti (stesso risultato).

Nella classe seconda (sez. 10.1) è emerso da subito il riferimento alla differente posizione delle caselle congruenti e viene detto che una rotazione dell’intera tabella porta una nell’altra. I segni “verticale” e “orizzontale” sono stati utilizzati per parlare delle diverse posizioni dei rettangoli e il riferimento alla rotazione del foglio è mutato dall’insegnante nel riferimento alla rotazione delle caselle. Questa formulazione è stata condivisa dalla classe: si è arrivati a notare la diversa posizione delle due caselle colorate e la possibilità di passare dall’una all’altra mediante una rotazione/giro.

Anche gli studenti di quinta primaria hanno usato le parole “orizzontale” e “verticale” per riferirsi a rettangoli che hanno rispettivamente la base più lunga dell’altezza o viceversa (sez. 11.1). Il cambiamento della posizione è stato da loro indicato con segni quali “invertire” e “rigirare” che fungono da pivot grazie alla loro ambiguità: si possono riferire sia al cartoncino sia ai fattori della moltiplicazione. Le osservazioni sono state riassunte dall’insegnante in un testo ibrido riportato alla lavagna (Fig. 12.2.1) che richiama il tipo di formulazione della proprietà commutativa che ci si aspettava nell’analisi a priori del potenziale semiotico.



Fig. 12.2.1: Scritture alla lavagna prodotte dall’insegnante della classe quinta durante la discussione.

Nell’analisi del potenziale semiotico si era anche messo in evidenza che la tabella è simmetrica rispetto alla diagonale principale e quindi se ne può ricavare anche una “simmetria” nell’operazione di moltiplicazione.

Tale simmetria è stata messa in evidenza dagli studenti. Nella seconda è stato detto che c’è uno specchio “perché tutto si ripete due volte”. Andando avanti nella discussione, uno studente ha affermato che “tutte le mattonelle sono uno specchio”; l’insegnante ha ripetuto questa frase sostituendo “mattonelle” con “quadrati” e tale affermazione ha trovato l’accordo di tutta la classe.

Le conoscenze pregresse degli studenti della classe quinta hanno permesso di esplicitare ancor più chiaramente la presenza della simmetria. Si è parlato di un asse di simmetria costituito dalle caselle quadrate e si è focalizzata l’attenzione sul particolare ruolo di queste caselle: la possibilità di invertire o meno la posizione dei fattori della moltiplicazione è stata messa in relazione con la forma della casella stessa notando che le caselle quadrate “non hanno una coppia”.

L’analisi a priori delle consegne relative alla composizione e scomposizione di rettangoli (sez. 7.3) ha messo in luce la possibilità di mediare il significato di proprietà distributiva proponendo agli studenti di unire, affiancandoli, rettangoli con la stessa altezza. Si è ipotizzato che l’osservazione che i rettangoli hanno altezza in comune e che la base del rettangolo finale è pari alla somma di quelle dei rettangoli di partenza potesse costituire un primo germe del significato di proprietà distributiva. Tuttavia, la proprietà distributiva si riferisce a una relazione di equivalenza fra relazioni aritmetiche ed è quindi fondamentale mettere in evidenza che tale relazione è a “doppio senso”. La discussione sulla trasformazione opposta $a \times b + a \times c \leftarrow a \times (b + c)$ è partita proponendo consegne di scomposizione.

In sintesi, gli aspetti che sarebbero dovuti emergere nelle attività erano la presenza di rettangoli con la stessa altezza (ovvero un fattore in comune) e la loro trasformazione in un rettangolo che ha base pari all'unione (ovvero la somma) della basi dei rettangoli di partenza. La possibilità di effettuare tale trasformazione in entrambi i sensi è collegabile a una visione dell'uguaglianza come equivalenza.

Come previsto, questi aspetti sono effettivamente emersi nelle discussioni di entrambe le classi. In particolare, gli studenti di seconda hanno condiviso che mettere insieme due "mattonelle" (termine usato per riferirsi ai cartoncini) corrisponde all'operazione di somma dei loro risultati ma contemporaneamente restituisce anche un'altra mattonella che "ha la stessa altezza" ed "è larga come tutt'e due" (cfr sez. 10.2.1). La reversibilità di questa operazione è stata messa in luce durante la consegna della lettera a Giovanni. La possibilità di dividere una moltiplicazione nella somma di due prodotti più piccoli è stata rappresentata sia attraverso i rettangoli sia mediante l'uso di concatenazioni di uguaglianze in cui il simbolo "=" veniva utilizzato come simbolo "bidirezionale".

Nella classe quinta (cfr sez. 11.2.1) è emerso chiaramente il riferimento a una trasformazione sintattica (le espressioni sono soggetto di frasi in cui i verbi sono "ha mandato" e "va") che lascia invariato il risultato: viene detto "resta sempre uguale". Si è passati rapidamente dal riferimento all'artefatto a segni matematici e la trasformazione è stata descritta come la somma dei "secondi numeri" riferendosi ai fattori non comuni che, nell'esempio analizzato durante la discussione, comparivano dopo i fattori in comune. L'insegnante ha richiamato la consegna svolta con l'artefatto anche allo scopo di mettere in relazione le trasformazioni sintattiche notate con le caratteristiche dei rettangoli colorati durante le attività individuali. Gli studenti hanno evidenziato che i rettangoli hanno la stessa altezza, il che corrisponde ad avere un "multiplo" (come detto da uno studente) in comune. Ancora: è stato messo in evidenza che unendo un rettangolo di base due con uno di base tre se ne ottiene uno con base $2+3$.

Per quanto riguarda l'equivalenza tra le espressioni così ottenute, molti studenti hanno notato che hanno lo stesso risultato, l'uguale è stato quindi interpretato come espressione di un'azione di confronto dei risultati finali delle espressioni. In questa fase, sono stati pochi gli studenti che hanno mostrato evidenze di interpretazione dell'uguale come espressione di equivalenza.

12.2.2.2 Quali catene semiotiche permettono di descrivere l'evoluzione dei significati?

Analizzando le discussioni dei diversi cicli didattici implementati in entrambe le classi, è stato possibile evidenziare una fitta rete di relazioni tra i segni emersi, rappresentabile con diverse catene semiotiche.

Nella prima discussione della classe seconda (sez. 10.1) è comparso un segno ricorrente: la parola "gemelle" che cambia progressivamente significato (Fig. 12.2.2). Inizialmente veniva utilizzato da un gruppo per riferirsi alle specifiche caselle colorate a cui può essere sovrapposto esattamente un particolare rettangolo di cartoncino. Questo termine è stato poi riutilizzato dall'insegnante per riferirsi a una generica coppia di caselle che potrebbero essere

state colorate con lo stesso colore svolgendo la consegna. Attraverso i successivi interventi su cui viene focalizzata la discussione, la parola si è arricchita di ulteriori significati: prima due caselle gemelle possono essere portate l'una nell'altra con una rotazione, poi è possibile vedere una come il "riflesso" dell'altra in uno dei quadrati della diagonale principale che funge da "specchio".

La richiesta dell'insegnante di ritornare alla seconda parte della consegna, ovvero di inserire dei numeri all'interno delle caselle, ha permesso di individuare le caselle gemelle come quelle caselle che hanno le stesse dimensioni e, di conseguenza, lo stesso numero di quadretti interni. Il collegamento con i simboli aritmetico-algebrici scritti è stato invece fatto dopo la discussione attraverso una consegna in cui compariva nuovamente l'uso del termine "gemelle" che, da aggettivo per le caselle della tabella, diveniva aggettivo per le moltiplicazioni, poi collegate dal simbolo di uguaglianza in scritture del tipo $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$.

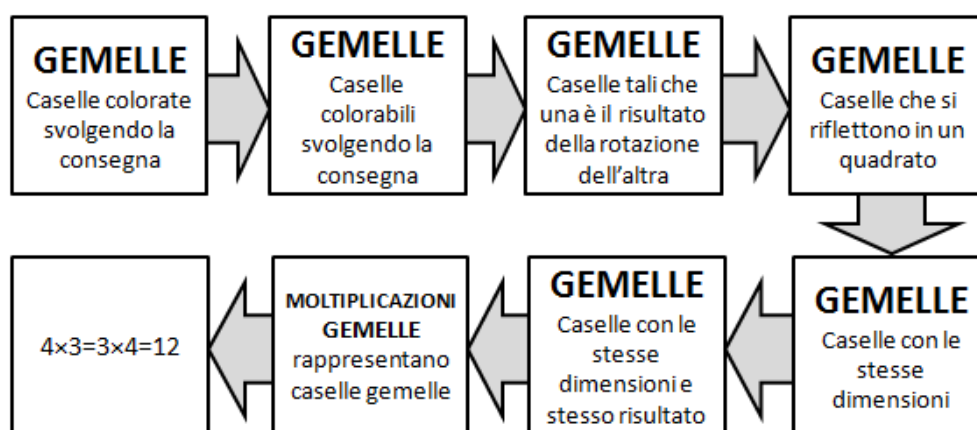


Fig. 12.2.2: Schematizzazione della catena semiotica che collega la consegna di colorazione delle caselle simmetriche alla scrittura simbolica dell'equivalenza fra moltiplicazioni con fattori invertiti.

L'attività di composizione di rettangoli mediante l'incollaggio di cartoncini con la stessa altezza è stato l'incipit per la costruzione di tre diverse catene semiotiche intrecciate tra loro.

4. Il segno artefatto 'mattonelle' è stato sin dall'inizio condiviso dalla classe per riferirsi sia alle caselle della tavola di Laisant, sia ai rettangoli di cartoncino realizzati. L'insegnante si è riferito alle mattonelle identificandole con le loro dimensioni dicendo, per esempio, "la mattonella due per tre". Nella rappresentazione grafica alla lavagna, la parola 'mattonella' è stata associata ai rettangoli disegnati, nei quali sono scritte le moltiplicazioni corrispondenti. Successivamente queste stesse moltiplicazioni sono comparse senza il rettangolo.
5. Il segno artefatto 'mettere insieme' si è riferito inizialmente all'attività svolta, ovvero all'incollaggio di due rettangoli di cartoncino. Nel corso della discussione, si è passati dall'attività effettiva a un incollaggio ipotetico di rettangoli disegnati. L'insegnante ha cominciato poi a parlare di "mettere insieme i quadratini"; pertanto l'espressione non si riferiva più solo ai rettangoli (ovvero alle moltiplicazioni) ma anche ai quadretti in essi contenuti (ovvero i risultati). In questo secondo contesto, sono stati proprio gli studenti a riconoscere una relazione additiva. Le parole "mettere insieme" sono state sostituite dal simbolo di addizione e il passo successivo è stato fatto dall'insegnante

proponendo di inserire tale simbolo fra moltiplicazioni, senza utilizzare più i rettangoli.

6. La parola “uguale” è stata introdotta dall’insegnante durante la discussione e contemporaneamente scritta fra i rettangoli disegnati. Nel parlato, era interpretabile come congruenza fra i rettangoli uniti e il rettangolo che rappresenta la loro somma. Nei disegni alla lavagna poteva essere interpretato anche in modo procedurale, come segno che indica il risultato dell’operazione “rettangolo+rettangolo”. La relazione che c’è fra i risultati, facilmente interpretata dai bambini, è stata rispecchiata nella relazione fra i rettangoli, tanto che i bambini hanno inserito il simbolo + fra rettangoli nelle loro produzioni individuali. Tuttavia, ogni rettangolo rappresenta una moltiplicazione e quindi queste nuove scritture indicavano una relazione fra prodotti; l’uguale ha acquisito un’interpretazione relazionale, esplicitata alla fine anche attraverso testi ibridi in cui comparivano sia rettangoli sia simboli aritmetico-algebrici.

In conclusione, queste catene semiotiche hanno portato fino all’uso di espressioni aritmetiche per confrontare la somma di due prodotti con la moltiplicazione corrispondente al suo risultato. L’abbandono dei rettangoli e l’interpretazione relazionale dell’uguale hanno consentito l’uso di tali espressioni per rappresentare, attraverso concatenazioni di uguaglianze, relazioni fra espressioni aritmetiche, in particolare la relazione data dalla proprietà distributiva. Complessivamente è emersa una rete di segni collegati fra loro, la rete semiotica schematizzata in figura 12.2.3. Attraverso molteplici catene semiotiche, in collegamento tra loro, si può evidenziare lo spostamento dall’uso di segni artefatto (come cartoncini, caselle e mattonelle) verso segni matematici quali concatenazioni di uguaglianze tra espressioni aritmetiche per rappresentare la relazione data dalla proprietà distributiva.

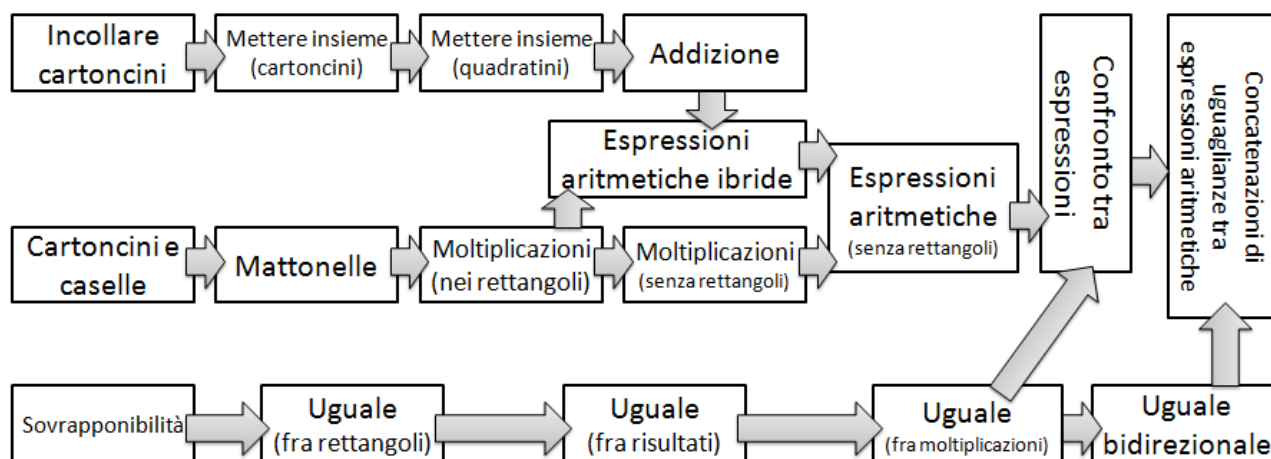


Fig. 12.2.3: Schematizzazione della rete semiotica relativa ai segni utilizzati per rappresentare la proprietà distributiva.

Le relazioni tra i segni risultano ancora più complesse nella classe quinta in cui i segni emersi durante la discussione sono stati messi in relazione con le conoscenze pregresse degli alunni sia sulle proprietà aritmetiche sia sulle figure geometriche coinvolte.

Di fatto, nel corso della discussione, l’associazione fra rettangoli e moltiplicazioni ha permesso di mettere in relazione le proprietà delle figure con quelle delle operazioni. Dal punto di vista

dell'esperto, è possibile associare i lati del rettangolo ai fattori e quindi il cambiamento di posizione del rettangolo all'inversione dei fattori. L'invarianza dell'area è collegabile alla conservazione del risultato. Questo tipo di associazione è stato raramente realizzato in modo esplicito o diretto dagli studenti, ma generalmente è avvenuto mediante l'uso di frasi ibride in cui comparivano sia termini aritmetici sia termini geometrici.

L'associazione fra rettangoli e moltiplicazioni è stata esplicitata dai bambini sin dall'inizio della discussione e la maestra l'ha fatta notare mimando con le mani un rettangolo mentre a parole si riferiva a delle moltiplicazioni. L'area è stata messa in relazione col risultato della moltiplicazione in modo indiretto. Di fatto è stato evidenziato che le caselle colorate hanno lo stesso risultato e anche che le caselle dello stesso colore sono "uguali di dimensioni". Il fatto che figure congruenti siano equiestese derivava dalle conoscenze pregresse degli alunni.

Si è osservata una grande ricchezza di termini anche per riferirsi all'operazione sintattica di inversione dei fattori. Inizialmente è stata descritta come "rigirare"; in seguito è stato detto che "si invertono". Successivamente è stato utilizzato il termine "scambiano" per riferirsi ai fattori; nel caso dei rettangoli si è detto che "cambia solo la posizione".

Complessivamente, è emersa una complessa rete di significati. L'insieme dei segni coinvolti è schematizzato in figura 12.2.4. Le tre fasce orizzontali contengono i segni che si riferiscono a uno stesso contesto (dall'alto: geometrico, artefatto e aritmetico). Sulla stessa verticale si trovano i segni che, per il matematico esperto, possono avere un significato equivalente. Le linee nere invece rappresentano le connessioni che sono state create durante la discussione dagli studenti o dall'insegnante.

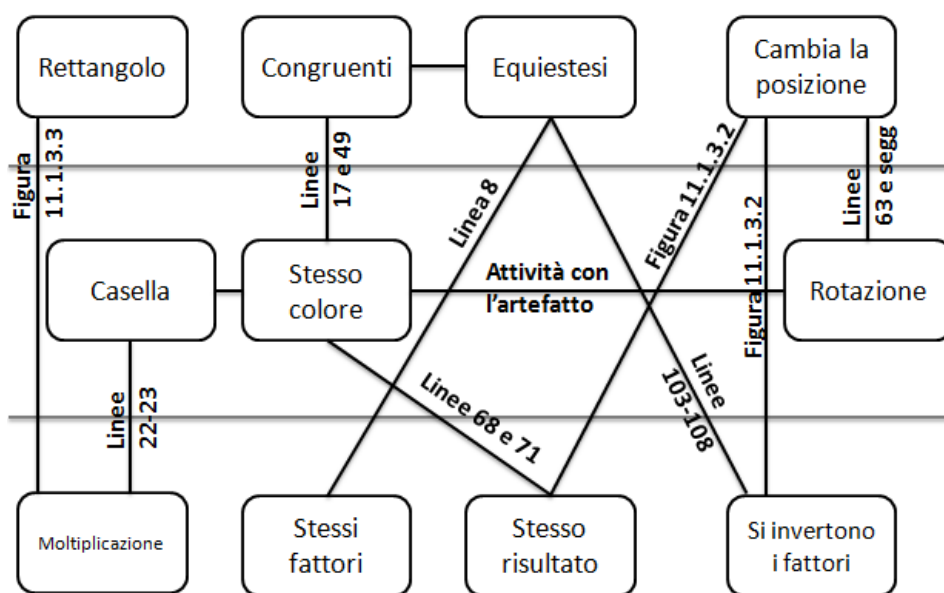


Fig. 12.2.4: Schematizzazione delle relazioni tra i segni emersi nella discussione sulla proprietà commutativa nella classe quinta

Anche l'evoluzione dei segni emersi nelle attività semiotiche centrate sulla proprietà distributiva è difficilmente schematizzabile in modo lineare. Nella discussione analizzata si sono potuti rilevare diversi momenti con un'intensa produzione di segni afferenti a sistemi semiotici diversi (parole, disegni, gesti). In particolare, si sono alternati momenti con una

forte concentrazione di segni matematici a momenti in cui veniva più frequentemente fatto riferimento all'attività svolta con l'artefatto.

L'alternanza di produzione di segni dei due diversi tipi ha portato come risultato la creazione di una complessa rete semiotica imperniata soprattutto intorno al significato di unione di cartoncini mediato attraverso segni verbali quali “unire cartoncini” o “appiccicare cartoncini” ma anche attraverso un *catchment* gestuale dato dalla ripetizione di un avvicinamento delle due mani che, in modo iconico, rappresenta l'azione.

La rete semiotica che emerge dall'analisi è schematizzata nella figura 12.2.5. Due segni sono messi in relazione con una linea nera continua quando sono comparsi insieme in uno stesso intervento durante la discussione. Le linee tratteggiate indicano le relazioni che sono evidenti soltanto in elaborati individuali. Sono posizionati in verticale i segni che, all'occhio dell'esperto, possono essere considerati come equivalenti; la linea grigia divide i segni artefatto (in basso) da quelli matematici (in alto).

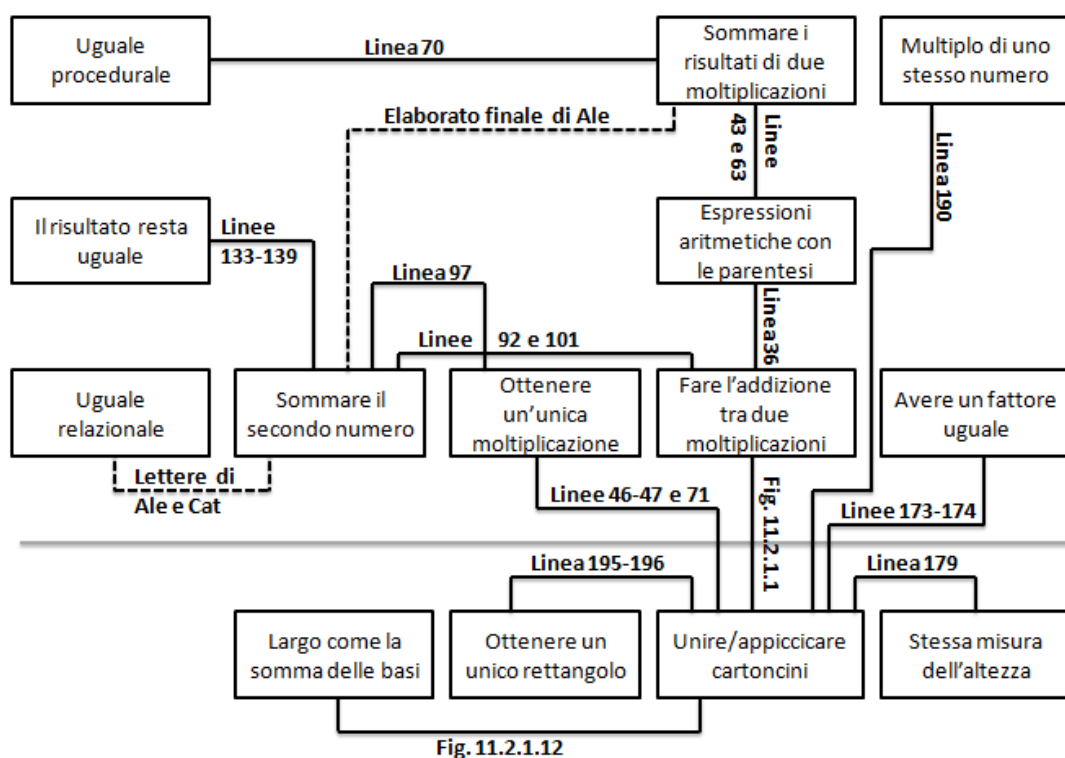


Fig. 12.2.5: Schematizzazione della rete semiotica relativa alla proprietà distributiva nella classe quinta.

Si noti che le espressioni “unire cartoncini” e “appiccicare cartoncini”, qui considerate come aventi lo stesso significato, fungono da perno per il collegamento fra i segni artefatto e vari segni matematici; si tratta quindi di segni pivot. Svolge il ruolo di segno pivot anche il gesto di avvicinamento delle due mani (citato come Fig. 11.2.1.1), infatti mette in relazione l'unione dei cartoncini con l'addizione di moltiplicazioni. Questo aspetto sarà discusso più nel dettaglio nella sezione 12.3.1.

12.2.2.3 Quale il ruolo dell'insegnante/esperto nella gestione del processo di mediazione semiotica verso le proprietà della moltiplicazione?

L'analisi dei comportamenti degli insegnanti è stata fatta all'interno del quadro fornito da Mariotti e Maracci (2010). Secondo tale quadro le azioni possono essere ricondotte a quattro tipologie di schemi. Di seguito, per ciascuno schema, si riportano le azioni messe in atto dagli insegnanti coinvolti nell'implementazione dell'intervento sperimentale oggetto di studio.

Back to the task è lo schema definito dalla classe di situazioni caratterizzate dalla necessità di promuovere negli studenti la produzione di segni artefatto ritornando in modo esplicito al compito assegnato. Nei dati qui analizzati, generalmente la discussione inizia con la richiesta di richiamare l'attività svolta individualmente e nei piccoli gruppi. Ciascun gruppo riferisce quanto emerso nel confronto fra pari e da lì si avvia la discussione.

Si ritorna nuovamente alla consegna in quei momenti in cui sono stati prodotti da alcuni studenti dei segni che però non sono condivisi da tutta la classe. Questo succede soprattutto nelle discussioni relative alla proprietà distributiva (sia in seconda sia in quinta): quando uno studente specifica in termini matematici una relazione che è obiettivo dell'intervento, ma gli altri studenti hanno difficoltà a interpretare quanto emerso, l'insegnante propone di svolgere nuovamente la consegna per verificare le affermazioni fatte anche nel contesto dell'artefatto. Questo succede più frequentemente nella classe quinta (p.e. estratto 31) in cui la produzione di segni matematici è particolarmente intensa. Tuttavia, non mancano degli esempi anche nella classe seconda (si veda l'estratto 9)

Risulta degno di nota il fatto che generalmente la consegna non viene concretamente ripetuta ma si ricorre a una "simulazione" del movimento dei cartoncini o della colorazione delle caselle ricorrendo a disegni fatti sulla lavagna o su cartellone. In questo modo, si creano dei segni grafici che richiamano l'artefatto in modo iconico.

Acquisiscono un ruolo particolarmente importante gli esempi numerici scelti. Per esempio, quando nella discussione sulla proprietà distributiva in quinta emergono moltiplicazioni che coinvolgono 1 come fattore comune (estratti 27 e 28), l'insegnante decide di proporre ulteriori esempi in cui questo non succede, in modo che la somma dei risultati non coincida con la somma dei fattori non comuni.

Focalization è l'insieme di azioni i cui obiettivi sono l'evidenziazione di specifici segni al fine di selezionare gli aspetti pertinenti dei significati di tali segni e la circoscrizione dei riferimenti all'artefatto per supportare la presa di coscienza degli aspetti chiave da parte degli studenti.

Nelle discussioni analizzate, queste azioni sono effettuate spesso attraverso eco degli interventi degli studenti: l'insegnante ripete le espressioni utilizzate dai bambini, in toto o in parte. Alcune volte sono sostituiti dei termini oppure viene ripetuta soltanto una parte della frase. Implicitamente, queste azioni validano alcune affermazioni e ne respingono altre (quelle che non sono ripetute). In alcuni casi, la stessa espressione viene anche ripetuta più volte affermando così il particolare valore dato a particolari segni. Se ne ha un esempio nel

riferimento alle caselle colorate fatto durante la discussione sulla proprietà distributiva in quinta (sez. 11.2, estratto 18).

La sostituzione di termini all'interno di una frase non è sempre realizzata per introdurre nuovi segni matematici o per formalizzare una frase. Alcune volte avviene l'opposto: in una frase ricca di segni matematici, uno di questi viene sostituito con un segno artefatto. Probabilmente questo tipo di intervento è messo in atto quando l'insegnante teme che un segno matematico introdotto da uno studente non sia ancora interpretabile da tutta la classe. L'inserimento di un segno artefatto già condiviso permette di mettere in relazione i nuovi segni matematici emergenti con l'attività svolta con l'artefatto (p.e. negli estratti 11 e 31). In questo modo viene sfruttato il potenziale ruolo di tagli segni come pivot.

Una particolare modalità di focalizzazione è usata nelle discussioni nella classe quinta. L'insegnante non ripete gli interventi degli studenti soltanto con le parole ma trascrive sulla lavagna quelli su cui vuole focalizzare l'attenzione di tutti (sez. 11.1). Inoltre, disegni, simboli e frecce sono utilizzati per convertire l'intervento orale di uno studente in segni grafici. In questo modo l'insegnante non sta solo riportando quanto detto ma lo interpreta e lo arricchisce da un punto di vista semiotico: segni diversi, appartenenti o meno a sistemi semiotici diversi, sono messi in relazione tra loro contribuendo quindi allo sviluppo della rete semiotica.

La molteplicità di significati attribuibili ad alcune espressioni è spesso sfruttata. L'insegnante focalizza su termini ambigui che possono far riferimento sia al contesto dell'artefatto sia a quello matematico. In questo modo, una parola inizialmente usata per parlare della tavola di Laisant può essere poi reinvestita nell'enunciato della proprietà aritmetica.

La necessità di disambiguare il significato di una parola non dipende sempre dal doppio riferimento al contesto dell'artefatto e quello matematico; alcune volte la polisemia di una parola in altri contesti disciplinari viene individuata dall'insegnante come possibile causa di non condivisione di un significato emergente dalla discussione. Perseguendo la finalità di indirizzare gli studenti verso una particolare interpretazione del termine, l'insegnante richiede agli studenti di esplicitare le loro interpretazioni. In queste azioni, che abbiamo chiamato "richiesta di significato" (p.e. negli estratti 7 e 18) l'insegnante formula domande del tipo "che cosa vuol dire...?" oppure richiede una spiegazione più articolata, chiedendo "cosa intendi per...?". Usando le parole di Nigris affermiamo che "le domande che l'insegnante pone hanno la chiara funzione di aiutare i bambini a riflettere [...] stimolando un confronto tra i diversi punti di vista e lasciando il tempo ai bambini di provare a trasformare la conoscenza".

Quando diversi significati emergono, l'insegnante indica agli studenti qual è quello che è adottabile nel contesto della discussione in corso. Effettua così un'azione complementare di sintesi che abbiamo chiamato "proposta di significato" (negli estratti 7 e 25) che differisce dalle azioni di tipo 'provide a synthesis' perché non riguarda segni matematici.

Ask for a synthesis raccoglie le situazioni in cui la discussione ha già portato all'emergere di segni condivisi stabili che condensano gli aspetti chiave dell'esperienza comune con l'artefatto. In queste situazioni si ha la necessità di generalizzare e decontestualizzare i

significati emersi. Questo viene fatto, nei nostri dati, quando sono stati introdotti dei segni matematici per rappresentare quanto fatto con l'artefatto e si chiede agli studenti di riutilizzare espressioni aritmetiche di simile struttura per rappresentare altri esempi (p.e. negli estratti 9, 24 e 29).

Anche in questo caso, gli insegnanti fanno spesso uso di segni ibridi che mantengono alcuni aspetti dell'artefatto ma presentano già segni matematici. Ne sono un esempio le scritture che comprendono moltiplicazioni e rettangoli che sono introdotte proprio dai docenti nelle discussioni di entrambe le classi (Figg. 10.2.1.3 e 11.2.1.10).

Si noti che non sempre gli studenti sono in grado di esprimere in termini generali le relazioni notate a partire da alcuni esempi numerici. Pertanto, anche quando richiede una sintesi, l'insegnante spesso suggerisce agli studenti di farlo utilizzando un esempio numerico personale (p.e. nell'estratto 24). Si ha questo tipo di situazione quando viene richiesto di ripetere il discorso facendo riferimento alle caselle colorate da un particolare studente durante la sua attività individuale.

Ancora, ci sono situazioni in cui l'insegnante esplicita il tipo di rappresentazione in cui vuole che la sintesi venga fatta. Questo tipo di richiesta promuove la traduzione da un sistema di rappresentazioni a un altro evidenziando così l'equivalenza di diverse rappresentazioni: quelle ibride e quelle più propriamente aritmetiche.

Nella classe seconda compare spesso una particolare modalità di richiesta di sintesi: l'insegnante ripete le parole di un alunno rielaborandole ma chiudendo l'affermazione con una richiesta di conferma da parte dello studente sul fatto che quanto detto corrisponda a quello che il bambino ha affermato in precedenza (estratti 1, 9 e 11). Il fatto che alcuni bambini rispondano anche negativamente testimonia l'efficacia di questo tipo di richiesta che, tuttavia, richiede un contratto didattico per il quale sia possibile invalidare una proposizione del docente.

Provide a synthesis raccoglie le azioni effettuate quando la discussione ha portato a una generalizzazione o a una decontestualizzazione dei significati dall'uso dell'artefatto ed è necessario ratificare l'accettabilità di un segno nel contesto della matematica. Questo viene spesso fatto dagli insegnanti coinvolti nella nostra sperimentazione ripetendo una frase di uno studente, eventualmente rielaborata nella struttura o in alcune parole.

Ratifiche più esplicite sono quelle che si hanno quando l'insegnante scrive sulla lavagna un'affermazione oppure dichiara esplicitamente di trovarsi in accordo con quanto affermato dagli studenti. Nel caso delle discussioni di quinta, questo viene fatto anche integrando i segni proposti dagli studenti in scritture già presenti alla lavagna. Vengono così a crearsi dei testi ricchi di segni e "stratificati" nel tempo, che sintetizzano l'andamento di una parte della discussione (per es. quello mostrato in fig. 12.2.1).

Appare degno di nota il fatto che la sintesi dell'insegnante fa spesso uso di diversi sistemi semiotici. A volte la comunicazione verbale è fatta di soli segni matematici ma le rappresentazioni grafiche o i gesti fanno riferimento al contesto dell'artefatto creando così un

mismatch che permette di mantenere il collegamento con l'artefatto anche quando molti segni matematici sono entrati a far parte del discorso (cfr sez. 11.2.1).

Infine, non sono rare le occasioni in cui anche l'insegnante fa ricorso a termini e gesti deittici per evitare l'uso di segni matematici non ancora introdotti o la condensazione di operazioni con espressioni quali "la somma dei prodotti" o "un prodotto più un altro". Espressioni contingenti come "questo pezzo qui" mentre la mano afferra (estratto 27) o sottolinea (estratto 28) una parte di espressione servono a questo scopo.

In sintesi, la realizzazione del passaggio dall'uso dello strumento alla costruzione di un significato resta sempre legata all'intervento dell'insegnante che inserisce tale strumento nell'attività di classe e ne fa un elemento catalizzatore per la costruzione di significati matematici coerenti ai propri obiettivi educativi. Azioni quali il riconoscimento e la produzione di segni ibridi sono elementi chiave del processo di mediazione semiotica e l'uso temporaneo di tali segni (come segni pivot) risulta utile per mantenere continuità nello sviluppo dei segni, ovvero non "saltare" troppo rapidamente ai segni matematici prima che i significati a essi collegati si siano sviluppati.

Le discussioni di classe sono attività ricche dal punto di vista semiotico in cui si incontrano diversi significati anche per le stesse parole; questa ambiguità viene sfruttata dall'insegnante quando consiste nella possibilità di interpretare un termine nei due contesti dell'artefatto e della matematica. Si ottiene così un segno pivot. Quando però l'ambiguità dipende dalla polisemia della parola in altri contesti, vengono messe in atto azioni specifiche che non sono classificabili col quadro teorico di analisi; tali azioni sono state chiamate "richiesta di significato" e "proposta di significato".

L'attenzione all'uso di una molteplicità di sistemi semiotici, dalle riproduzioni dell'artefatto (come quella sul cartellone appeso di fianco alla lavagna) ai più effimeri gesti e parole deittici, risulta cruciale per mantenere sempre una connessione (anche flebile) tra l'esperienza con l'artefatto e i segni matematici che, attraverso le catene semiotiche presentate nella sezione precedente, a essa sono collegati.

12.2.2.4 Confronto dello sviluppo del processo di mediazione semiotica nei due gruppi-classe

Le relazioni tra segni che emergono nella classe seconda e nella classe quinta sono differenti. In particolare, nella classe seconda si osserva con maggiore chiarezza una progressione dai segni artefatto a quelli matematici, come modellizzato dalle catene semiotiche così come definite all'interno della Teoria della Mediazione Semiotica. Nella classe quinta, invece, è possibile individuare una maggior densità di produzione di segni matematici e spesso l'insegnante si adopra per collegare i segni matematici già prodotti dagli studenti all'attività con l'artefatto piuttosto che inserire nel discorso nuovi segni matematici; fa quindi un collegamento "a ritroso". Con questa finalità seleziona ed elabora segni pivot che permettono tale collegamento.

Questa differenza può essere ascritta alla maggiore disponibilità di segni matematici nelle conoscenze pregresse degli studenti di quinta. In particolare, nel caso della proprietà

commutativa, la discussione è ricca di oggetti del discorso geometrico (sez. 11.1.4) quali le relazioni di equiestensione e di congruenza. I segni artefatto fungono da “ponte” creando un collegamento tra il discorso aritmetico obiettivo dell'intervento e il discorso geometrico già condiviso dai bambini (sez. 11.1.7, Fig. 12.2.4). Nel caso della proprietà distributiva invece, si evidenzia la presenza di segni artefatto e segni contingenti che mettono in relazione segni matematici già noti ai bambini ma che, in precedenza, potevano non essere tra loro in relazione.

Si conferma quindi l'ipotesi, fatta in precedenza per la classe quinta (sez. 4.5), che la proposta di consegne che richiedono l'uso della tavola di Laisant serva maggiormente a consolidare le conoscenze pregresse che a costruirne di nuove. In particolare, vengono create nuove relazioni tra segni matematici già noti agli studenti.

Pertanto, se già nel processo di “costruzione” di un nuovo oggetto matematico le catene semiotiche non procedono linearmente, ma si intrecciano come nel caso mostrato in figura 12.2.3 per la proprietà distributiva in seconda, questo è ancora più evidente quando l'artefatto viene inserito nel processo di insegnamento/apprendimento per ri-trattare il significato di segni già noti agli studenti. In questo caso, i dati analizzati suggeriscono che il processo di *back-and-forward* tra segni artefatto e segni matematici si ripete più volte generando reti semiotiche più ricche di nodi. Ulteriori dati sono necessari per approfondire questo aspetto. Dal punto di vista teorico, questa differenza può essere inquadrata facendo riferimento alle teorie di stampo cognitivo: sarà fatto nella sezione 12.3.2.

Un aspetto comune nei processi osservati nelle due classi è dato dalla presenza di azioni dell'insegnante volte a discutere il significato di alcune parole o scritte. Sebbene questo tipo di azione non fosse previsto dal quadro teorico utilizzato per l'analisi degli interventi dell'insegnante, si è rivelata importante per selezionare i significati di alcuni termini e rendere quindi condivisibili per tutti dei segni introdotti nel corso della discussione.

12.3 Contributi alla teoria

Ogni ricerca per l'innovazione, secondo il paradigma di Arzarello e Bartolini (1998), ha contemporaneamente lo scopo di:

3. produrre esempi paradigmatici di miglioramento dell'insegnamento della matematica;
4. indagare le condizioni che permettono od ostacolano tali processi.

Più in generale, le ricerche basate su progetti hanno lo scopo di comprendere il progresso degli studenti e di costruire teoria anche sui mezzi con cui il processo di insegnamento/apprendimento viene implementato, la cosiddetta *learning ecology* (Cobb et al., 2003). Pertanto, nel concludere questo lavoro, appare fondamentale mettere in evidenza come la ricerca qui presentata contribuisca sia alla teoria sia alla pratica. Le due sezioni successive sono finalizzate a mettere in luce i principali contributi teorici; successivamente si presenteranno le implicazioni per la didattica.

12.3.1 Gesti come segni pivot⁶²

Bartolini Bussi e Mariotti (2009) osservano che particolari gesti possono essere considerati come artefatti e, a proposito dei segni artefatto, affermano che:

Questa categoria di segni artefatto include tanti e diversi tipi di segni e, ovviamente, i segni non verbali come gesti o disegni, o combinazioni di essi. (p.292)

Pertanto i gesti sono da intendersi come segni nella TMS, e hanno quindi un ruolo nella costruzione delle catene semiotiche. Inoltre le autrici contemplano la possibilità di considerare come segni artefatto delle “combinazioni” di gesti e altri segni.

Su questo tema, alcuni primi risultati sono stati ottenuti da Bartolini Bussi e Maschietto (2009), che analizzano il processo di appropriazione del modello matematico del disegno in prospettiva (la piramide visuale) a partire dall’attività con il vetro di Dürer e altri artefatti. Le autrici mettono in evidenza due gesti: uno è usato per rappresentare un generico piano di taglio del cono e l’altro sembra rappresentare il vertice del cono stesso. Sebbene possano riferirsi ad alcune parti dell’artefatto, i due gesti vengono utilizzati dagli allievi mentre verbalmente si esprimono con termini matematici; inoltre tali gesti sono convertiti in segni grafici e linguistici creando così un intreccio dei diversi insiemi semiotici in gioco.

Nello stesso anno, Maffei e colleghi (2009), studiando i processi di mediazione semiotica portati avanti da un’insegnante per l’equivalenza di espressioni algebriche a partire dal software Aplusix, mettevano in evidenza come la tessitura di significati nella catena semiotica avviene attraverso risorse semiotiche diverse, tra cui parole, iscrizioni alla lavagna e gesti che fanno riferimento iconicamente a segni specifici utilizzati dal software come feedback alle manipolazioni simboliche degli studenti.

Il ruolo dei gesti come segni-pivot viene evidenziato da Bartolini Bussi e Baccaglini-Frank (2015) nel loro studio sul ruolo di un robottino mobile (l’ape *bee-bot*) nella formazione di una classificazione inclusiva di rettangoli e quadrati in una classe prima di scuola primaria. Nell’articolo viene messo in evidenza l’emergere di diversi tipi di gesti che si riferiscono principalmente ai movimenti fatti dal robot. Uno di questi gesti (utilizzato dagli studenti mentre parlano della rotazione di *bee-bot*) viene ripetuto dall’insegnante creando quindi un *gioco semiotico* (Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009) volto a passare dal significato di “svolta” a quello di “angolo”. Secondo le autrici il gesto è da classificarsi come segno pivot in quanto viene sfruttato intenzionalmente dall’insegnante per collegare il contesto dell’artefatto al segno matematico desiderato. Inoltre il gesto viene poi convertito in un segno grafico che richiama l’artefatto (in particolare i tasti di rotazione del *bee-bot*) ma è utilizzato nel contesto delle figure geometriche (per rappresentarne gli angoli). In questo modo la catena semiotica si arricchisce. Le autrici concludono che:

in this initial phase when specific terminology had not been developed and shared by the students, they used gestures in the air. One interpretation of this might be that the children were compensating for missing words. On the other hand, it could be that in this

⁶² Le considerazioni riportate in questa sezione sono pubblicate anche in (Sabena, Krause, & Maffia, 2016) e (Maffia & Sabena, Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains, 2016).

situation the gestures were perceived as being more effective at communicating, perhaps especially in self-communication [...]. In this sense the turn gesture mirrored by S [l'insegnante] became part of the shared signs, and it was a first instantiation of a sign to eventually refer to the idea of "angle"⁶³. (p. 402)

Un aspetto importante messo qui in evidenza è che il gesto inizialmente prodotto da uno studente e poi ripreso dall'insegnante viene infine condiviso dall'intera classe. Questo gesto viene classificato come segno pivot perché ha la potenzialità di introdurre nel discorso i segni che pur riferendosi in prima istanza al contesto dell'artefatto; ne selezionano aspetti significativi che possono evolvere nei significati matematici legati all'angolo. Come presentato nell'articolo, è proprio la combinazione del gesto con i termini espressi verbalmente (prima "girare", poi "angolo") e graficamente a rendere possibile la realizzazione di una catena semiotica efficace. In generale, i gesti sembrano avere particolari ruoli nella costruzione della catena semiotica; nei dati analizzati nei capitoli precedenti è possibile identificarne di diversi.

L'insegnante, orchestrando la discussione, cerca di mettere in atto il processo di mediazione semiotica collegando segni artefatto e segni matematici attraverso l'introduzione di segni pivot. Tra quelli che si sono potuti osservare molti coinvolgono gesti; si riescono a descrivere almeno due usi distinti dei gesti come segni pivot:

1. il gesto è prevalentemente *deittico* (gesto di pointing concreto) ed è esso stesso un segno pivot perché effettuato per collegare segni artefatto (p.e. espressi verbalmente) con segni matematici (p.e. scritti, a cui il gesto si riferisce);
2. il gesto è *iconico* ed è un segno artefatto, ma è abbinato a una parola o a segni scritti che sono invece segni matematici. La combinazione fra segno matematico e segno artefatto è quindi realizzata grazie alla simultaneità con cui segni afferenti a insiemi semiotici diversi sono usati: diciamo che è la coppia (gesto; parola) o (gesto; scrittura) che funge da pivot. Il doppio riferimento potenziale tipico dei segni pivot è dunque realizzato attraverso la presenza di un doppio registro semiotico.

Possiamo dire che nel primo caso il gesto è un "anello" della catena semiotica e si ha quindi un **segno pivot gestuale** (Fig. 12.3.1a). Nel secondo caso invece la catena è tenuta insieme dalla simultaneità tra segni e si ha un **segno pivot multimodale** (Fig. 12.3.1b). La catena evolve nell'evoluzione parallela di segni in diversi sistemi semiotici, quello che Arzarello (2006) chiama *semiotic bundle* (fascio semiotico).

⁶³ Nella fase iniziale, quando una terminologia specifica non è ancora stata sviluppata e condivisa dagli studenti, essi usano gesti nell'aria. Una possibile interpretazione è che gli studenti stessero compensando le parole mancanti. D'altra parte, potrebbe darsi che in questa situazione i gesti siano percepiti come più efficaci nella comunicazione, forse nella comunicazione intrapersonale in modo particolare [...]. In questo senso il gesto di rotazione rispecchiato da S [l'insegnante] è diventato parte dei segni condivisi, ed è una prima istanza di segno che eventualmente si riferisce all'idea di "angolo".

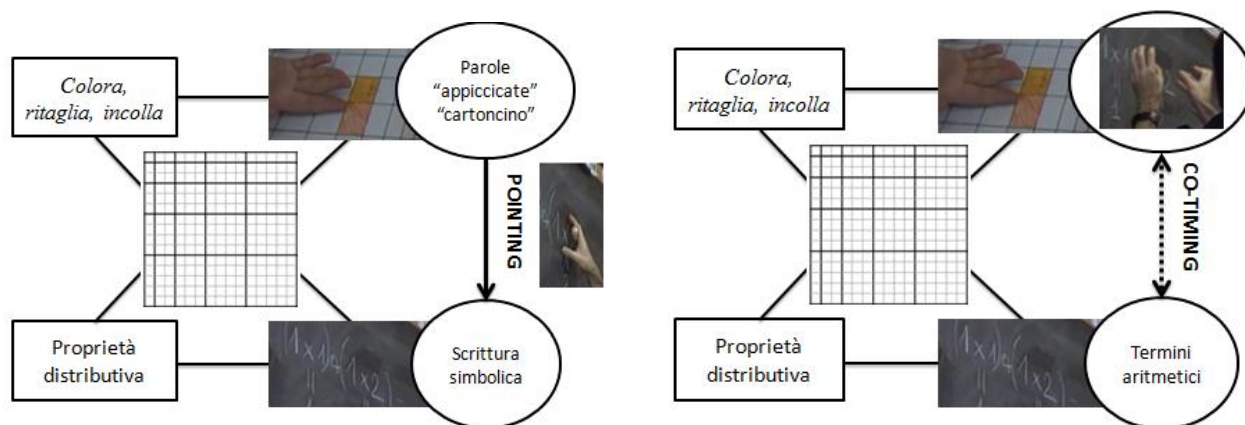


Fig. 12.3.1: Due diverse modalità di uso dei gesti come segni pivot esemplificate con segni della discussione sulla proprietà distributiva in quinta primaria (sez. 11.2).

I segni pivot multimodali possono essere osservati quando le differenti modalità semiotiche si riferiscono a due diversi contesti, una all'artefatto e l'altra al contesto matematico che è obiettivo dell'attività di insegnamento/apprendimento.

Tutto questo appare coerente con quanto emerge nello studio dei gesti in psicologia: alcuni ricercatori parlano di *gesture-speech mismatch* (ovvero discordanza tra gesti e parole) quando i gesti mediano un'informazione differente rispetto alle parole dette in contemporanea (Goldin-Meadow, 2003). La *ridondanza* (Kita, 2000) fra gesti e parole, ovvero la ripetizione di messaggi simili attraverso le due diverse risorse semiotiche può apparire un utile sistema per rendere particolarmente esplicita l'intenzione di veicolare una certa informazione. Tuttavia, i mismatch tra gesti e parole sono ritenuti un utile strumento nelle mani dell'insegnante di matematica perché possono mediare due diverse informazioni allo stesso tempo (Singer & Goldin-Meadow, 2005); nel nostro caso si tratta di far riferimento in contemporanea all'artefatto e alla cultura matematica.

In sintesi, l'analisi dei dati riportati in questo lavoro supporta il fatto che i gesti non-ridondanti possano essere efficacemente sfruttati dall'insegnante; se ne è osservato l'uso come segni pivot nei due diversi modi sopraelencati.

12.3.2 Sullo sviluppo dei concetti: una lettura vygotkiana

Fra le differenze osservate nei risultati relativi alle due classi coinvolte nell'intervento sperimentale, sono evidenti le diverse relazioni che si osservano tra i segni emergenti dalle attività semiotiche collettive e individuali (sez. 12.2.2.4). Nell'analisi a priori era già stato previsto un possibile effetto delle conoscenze pregresse degli studenti di quinta primaria che, nel corso degli anni di scolarizzazione che li separano dalla seconda, hanno già incontrato la moltiplicazione e le sue proprietà.

Il quadro teorico utilizzato per l'analisi dei dati (cfr cap. 5) non considera una differenza tra i segni matematici che emergono da conoscenze pregresse e quelli che invece sono introdotti per la prima volta. Per poter descrivere questa diversità occorre quindi riferirsi ad altri costrutti introdotti nella letteratura già presente cercando di integrarli nel quadro qui utilizzato. Allineandosi all'indicazione di Radford (2008), per il quale non è possibile mettere

in comunicazione teorie che non condividono i principi fondamentali, si decide di far riferimento al background comune dei due approcci utilizzati (Commognition e TMS), ovvero la matrice vygotskiana.

Per descrivere l'evoluzione dei concetti nel corso dell'età scolare, Vygotskij (2004) ricorre a risultati sperimentali di laboratorio riguardanti adulti e bambini, evidenze dall'educazione speciale e dalla etimologia della lingua. Ne deriva un modello evolutivo dei concetti scientifici suddiviso in tre stadi, a loro volta caratterizzati da diverse fasi. Di seguito viene riportata una sintesi di questi stadi, descritti in modo più dettagliato nel quinto capitolo della sopracitata opera di Vygotskij.

1. Stadio dei **sincretismi** (o mucchi). In questo stadio, il significato di una parola è dato dall'esperienza data dalla percezione del bambino; più elementi sono legati in base a un'impressione percettiva unica. Questo stadio si compone di tre tappe: la prima tappa consiste nella formazione dell'immagine sincretica (o mucchio di oggetti) corrispondente al significato di una parola derivato da tentativi nell'uso della parola stessa in base e dalla verifica della distanza tra risultati ottenuti e quelli attesi. Nella seconda fase, l'immagine sincretica si costituisce sulla base di coincidenze spaziali o temporali. L'ultima tappa di questo stadio si ha quando vengono ridotti a un unico significato i rappresentanti di diversi gruppi già riuniti precedentemente dalla percezione del bambino. Questo significa che da gruppi sincretici precedenti vengono isolati dei rappresentanti che sono a loro volta uniti sincreticamente in uno dei modi precedenti. La maggior parte delle parole apprese nella primissima infanzia acquisisce significato attraverso sincretismi.
2. Stadio dei **complessi**. Questo stadio è quello più diffuso nel corso dell'infanzia e della prima età scolare. Si ha un complesso quando il bambino riunisce oggetti simili in un gruppo comune basandosi su legami oggettivi. Tuttavia, il legame che caratterizza gli oggetti di un complesso è fattuale; formano un complesso oggetti che sono tra loro legati, ma non necessariamente tutti allo stesso modo.

Un primo tipo di complesso è quello ottenuto per associazioni: un oggetto funge da nodo e tutti gli oggetti che condividono una caratteristica fattuale con quell'oggetto formano il complesso di cui tale oggetto è il rappresentante. Una seconda modalità di formazione del complesso viene detta da Vygotskij "a catena". Si tratta di quelle situazioni in cui l'appartenenza a uno stesso complesso è stabilita per transitività di associazioni. Si parla invece di complessi diffusi quando gli oggetti sono associati per familiarità (cfr sez. 2.1.2); in questo caso i contorni del complesso sembrano essere più fluidi. La fase di passaggio dai complessi ai concetti è data dalla formazione di pseudoconcetti. "[I]l bambino forma uno pseudoconcetto tutte le volte che assegna ad un modello dato una serie di oggetti che potrebbero essere assegnati e riuniti gli uni agli altri sulla base di un concetto astratto" (*ibidem*, p.161). Un esempio è dato dal caso di un bambino che, di fronte a oggetti di diverse forme, isola quelli di forma triangolare perché assomigliano a un oggetto prototipico a lui noto a cui eventualmente ha anche dato il nome di 'triangolo'. Un adulto che lo osservi o ci parli potrebbe convenire con lui sul fatto che abbia isolato tutti i triangoli, questo però non significa che il bambino riesca a riconoscere tutti i poligoni che hanno tre lati come triangoli. Per esempio

potrebbe non riconoscere come tale un triangolo con due lati molto più lunghi del terzo perché non “assomiglia” al triangolo prototipico che lui associa al termine.

3. **Stadio dei concetti.** Distinguere uno pseudoconcetto da un concetto può non essere semplice dato che in molti contesti l'adulto e il bambino possono comprendersi e utilizzare la stessa parola in modi apparentemente equivalenti. La rilevazione di un vero e proprio concetto è possibile solo quando vi è la disponibilità – per chi lo concepisce – di una proprietà generale enunciabile. “[I]l concetto compare quando una serie di tratti astratti è di nuovo sintetizzata e quando la sintesi astratta così ottenuta diviene la forma fondamentale del pensiero mediante cui il bambino comprende e dà senso alla realtà che lo circonda” (*ibidem*, p.189). Questa modalità di pensiero, secondo Vygotskij, diviene predominante nell'adolescenza.

La prima fase nella formazione di un vero concetto si ha quando il bambino stabilisce una priorità tra le caratteristiche degli oggetti che fanno parte di uno stesso complesso, stabilendo quindi quali caratteristiche siano prioritarie per definire gli oggetti ad esso appartenenti. Inizia quindi un processo di analisi degli oggetti, ovvero di separazione delle caratteristiche. Si parla di concetto potenziale quando la caratteristica scelta riguarda la possibilità di utilizzare la stessa parola per oggetti che svolgono la stessa funzione in determinate attività; lo pseudoconcetto è determinato “nel campo del pensiero pratico-attivo” (*ibidem*, p. 188). La formazione del concetto avviene nel momento in cui viene fatta una sintesi – in contrapposizione con l'analisi con cui il processo di formazione del concetto vero e proprio è iniziato – di quanto emerso dalle fasi precedenti.

Sebbene vengano indicati dei momenti in cui i diversi stadi sono più evidenti, lo stesso Vygotskij mette in guardia dal pensare che questi si susseguano uno dopo l'altro seguendo sempre lo stesso ordine prestabilito.

Ci si può [...] rappresentare questo processo di successione di forme differenti di pensiero e di fasi del suo sviluppo come un processo puramente meccanico, dove ciascuna fase comincia quando la precedente è già completamente finita e terminata. Il quadro dello sviluppo risulta molto più complesso. Differenti forme genetiche coesistono, come nella crosta terrestre coesistono delle stratificazioni di epoche geologiche differenti. Questa situazione non è un'eccezione ma piuttosto una regola nello sviluppo di tutto il comportamento nel suo insieme. [...] Anche l'adulto [...] è lungi dal pensare sempre per concetti. Molto spesso il suo pensiero si esercita al livello del pensiero per complessi, talvolta scendendo a forme ancora più elementari [...]. (*ibidem*, p.191)

Le definizioni fornite soffrono forse di alcune ambiguità e possono essere ulteriormente specificate o modificate, così come effettivamente è avvenuto da quando Vygotskij le ha scritte sino ai tempi odierni. Tuttavia, sono sufficienti per lo scopo di questa sezione, che non è tanto quello di discutere la teoria genetica dei concetti quanto piuttosto aprire la possibilità di mettere in relazione le ricerche che afferiscono a questo filone con i risultati presentati precedentemente in questa tesi.

Applicando al presente lavoro i costrutti vygotskiani appena presentati, è facile sostenere che i bambini della classe seconda e quelli della classe quinta sia prima sia dopo l'intervento si

trovano a stadi diversi per quanto riguarda i significati obiettivo dei cicli didattici sperimentati. In particolare, nel caso dei bambini di seconda, i legami creati tra i diversi segni emersi nelle attività semiotiche dipendono, in prima battuta, dal solo fatto di essere originati a seguito di una stessa attività con un particolare artefatto. In questo modo si crea un complesso che ha come nodo centrale l'artefatto; attraverso la discussione si generano catene semiotiche che possono divenire una base per riorganizzare il complesso a catena. Ne potrebbe essere un esempio quella legata alla parola "gemelle" rappresentata in figura 12.2.2.

Il passaggio dal complesso per associazione a quello a catena non può che avvenire nella discussione, perché nell'attività semiotica collettiva le modalità di uso delle parole messe in atto dai singoli bambini si incontrano (ed eventualmente si scontrano, nel caso di conflitti comognitivi) con quelle dei compagni e, soprattutto, dell'insegnante. La rilevanza della presenza dell'adulto in questo momento di formazione è sottolineata, ancora una volta, da Vygotskij stesso:

Il linguaggio di chi gli sta intorno con i suoi significati stabiliti, costanti predetermina le vie su cui si muove lo sviluppo delle generalizzazioni del bambino. Esso lega l'attività propria del bambino, orientandola su un corso determinato, rigorosamente definito. Ma seguendo del tutto questa via determinata, prestabilita, il bambino pensa secondo il modo proprio dello stadio di sviluppo intellettuale in cui si trova. [...] Le vie lungo le quali si estendono e si trasferiscono i significati delle parole, gli sono date dalle persone che gli stanno vicino nel processo di relazione verbale con loro. Il bambino, però, non può assimilare di colpo il modo di pensare degli adulti, e ottiene un prodotto simile ai prodotti degli adulti, ma procurato mediante operazioni intellettive completamente differenti, elaborate secondo un modo particolare di pensiero. (Vygotskij, 2004, p. 163)

Questo assunto spiega perché di fronte alla proposta di una stessa consegna con uno stesso artefatto i significati che emergono da bambini a stadi di sviluppo diversi possano essere diversi seppur potenzialmente convergenti, e spiega anche perché tale convergenza possa realizzarsi a seguito della guida offerta dall'adulto che ha preso parte alle discussioni matematiche. Nei casi analizzati la guida è realizzata dall'insegnante che avendo un preciso obiettivo ha agito orientando lo sviluppo. In particolare, il ritorno alle consegne svolte causa la produzione di molti segni da parte dei bambini, spesso tratti da contesti non matematici (si pensi alle parole 'gemelle' e 'specchio'). L'insegnante focalizza su questi segni facendo eco alle parole dei bambini ma modificandole: suggerisce modalità d'uso delle parole e delle iscrizioni che potranno poi essere riutilizzate dai bambini.

Ancora, se le attività semiotiche proposte agli studenti di seconda primaria possono essere viste come momenti in cui si vengono a formare dei nuovi complessi, lo stesso non si può dire nel caso degli studenti di quinta. Di fatto, molti fra questi studenti hanno già formato dei complessi relativi ai concetti che sono obiettivo delle attività; le discussioni con gli studenti di questa età non sono tanto volte a introdurre un nuovi oggetti o rappresentazioni quanto a selezionare alcuni aspetti all'interno dei significati emergenti durante l'attività semiotica collettiva. Lavorando sia all'interno del discorso geometrico sia del discorso aritmetico si selezionano oggetti appartenenti a complessi probabilmente prima separati e si propone agli studenti di farne una sintesi. Non è facile stabilire se si giunge a quello che Vygotskij

definirebbe un concetto vero e proprio, ma sicuramente i bambini sono spinti ad andare oltre lo stadio del complesso mettendo a confronto pseudoconcetti che in una particolare attività (quella che segue le consegne svolte) possono svolgere la stessa funzione. Si pensi ai casi in cui 'fattori' e 'lati' oppure 'area' e 'risultato' sono parole interscambiabili nel parlare della consegna svolta.

In sintesi, si può arrivare ad affermare che una consegna relativa a un particolare artefatto può avere due ruoli differenti: creare un contesto in cui alcuni termini possono essere associati in modo fattuale ottenendo così un nuovo complesso (nel nostro caso per gli studenti di seconda), oppure fornire l'opportunità per svolgere un'attività in cui due pseudoconcetti già esistenti siano interscambiabili e quindi sintetizzabili in un unico concetto vero e proprio (per gli allievi più grandi).

Questa interpretazione, oltre a render conto e descrivere meglio le differenze osservabili nel caso delle due classi ci permette di ritornare sull'ipotesi iniziale dalla quale è partito il nostro lavoro, ovvero sul possibile legame tra memorizzazione di fatti aritmetici e concettualizzazione delle proprietà delle operazioni.

In entrambi i casi, l'uso dell'artefatto porta ad attività semiotiche ricche di segni proposti dagli studenti che, attraverso la discussione tra pari e con l'insegnante, finiscono con l'essere utilizzati insieme all'interno di testi (orali, scritti, disegnati). Vengono a crearsi dei legami tra significati che precedentemente potevano essere completamente sconnessi. Dal punto di vista delle teorie della memoria (cfr cap. 2) la creazione di nuovi nodi e nuove connessioni è un evento positivo ai fini del futuro richiamo delle informazioni. Di fatto, secondo il modello di propagazione dell'attivazione (Collins & Loftus, A spreading activation theory of semantic memory, 1975), quando una delle informazioni nella rete verrà attivata, trasmetterà il suo stato di attivazione anche a quelle semanticamente adiacenti rendendo così più probabile il richiamo futuro. Pertanto, la creazione di nuovi "ponti" anche tra concetti (o complessi, o pseudoconcetti) dapprima separati appare come una strategia ottimale per prevenire il rapido oblio. In questo senso lo sviluppo del pensiero relazionale (in particolare la messa in relazione di diverse operazioni attraverso le proprietà) risulta in una facilitazione nel richiamo dei fatti moltiplicativi, ipotesi già promossa in letteratura (Carpenter, Franke, & Levi, 2003) e qui avvalorata.

12.4 Implicazioni per la pratica

12.4.1 Suggerimenti didattici

Riccollegandosi quanto discusso nella sezione precedente, si può notare che l'ipotesi che l'approccio relazionale possa essere vantaggioso in termini di richiamo è avvalorato dai dati analizzati in questa tesi. Gli studenti della classe seconda coinvolti nella sperimentazione rivelano prestazioni di richiamo dei fatti moltiplicativi paragonabili a quelle di bambini con un anno di scolarizzazione in più.

Tali risultati e la discussione proposta nelle sezioni precedenti ci spingono a interrogarci su quelle che sono le prassi didattiche italiane; una sommaria analisi di testi scolastici della

scuola primaria suggerisce che lo spazio dedicato alla costruzione delle e alla riflessione sulle proprietà delle operazioni è incomparabilmente inferiore a quello dedicato all'esecuzione di procedure di calcolo con il fine di renderle automatiche. Senza contare il totale disinteresse per la costruzione del significato matematico di tali procedure, che sono solitamente introdotte come 'regole' da rispettare.

In particolare, se ci si sofferma separatamente sulle diverse componenti attraverso le quali si è definito il pensiero relazionale (sez. 3.3) si nota che solo lo sviluppo del senso dell'operazione appare nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo (MIUR, 2012) tra i traguardi da promuovere. Anche questo traguardo ha comunque una forte connotazione procedurale essendo realizzato attraverso obiettivi quali "conoscere con sicurezza le tabelline della moltiplicazione dei numeri fino a 10", "eseguire le operazioni con i numeri naturali con gli algoritmi scritti usuali" oppure "eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo". Il verbo 'eseguire' viene utilizzato molte volte, mentre il verbo 'confrontare' è utilizzato in riferimento ai singoli numeri e raramente per le procedure. Il riferimento alle strutture aritmetiche è assente, le proprietà delle operazioni sono citate solo nella scuola secondaria (anche se accade che vengano introdotte e fatte memorizzare dagli allievi, come nel caso dei nostri allievi di quinta) e il riferimento al significato relazionale del simbolo di uguaglianza viene introdotto esplicitamente solo quando si arriva a parlare di equazioni.

I risultati ottenuti in questo lavoro suggeriscono invece l'importanza della promozione di specifici interventi finalizzati allo sviluppo del pensiero relazionale. In particolare, l'analisi delle difficoltà osservate nella manipolazione delle strutture aritmetiche (sez. 9.2.1.2), mette in evidenza l'esigenza di uno sviluppo parallelo delle interpretazioni sintattica e semantica di tali strutture. Un risultato chiaro che emerge da questo studio riguarda i rischi di un approccio che privilegi le pure trasformazioni sintattiche, e suggerisce un'educazione che renda consapevoli del pericolo di perdere l'interpretazione numerica di un'espressione, per aiutare a raggiungere il controllo sulla consistenza matematica delle espressioni. Di fatto, la promozione del pensiero relazionale richiede uno sviluppo del controllo semantico per verificare che ogni trasformazione sintattica abbia un'interpretazione aritmetica consistente.

Il fatto che gli studenti della classe quinta mostrino una maggiore reificazione dell'operazione di moltiplicazione rispetto agli studenti più piccoli sostiene l'idea che tale tipo di approccio relazionale non sia importante solo nell'introduzione della moltiplicazione e delle sue proprietà, ma piuttosto nell'arco di tutti gli anni della scuola primaria (forse anche oltre) in modo da poter rileggere tali proprietà prima come parti di procedure, poi (ad avvenuta condensazione) come vere e proprie proprietà di oggetti matematici.

Per quanto riguarda l'interpretazione del simbolo di uguaglianza, i nostri dati (cfr sez. 9.2.1.1) spingono ad allinearsi con quanto già emerso nelle diverse ricerche internazionali (e.g. Falkner, Levi, & Carpenter, 1999; Molina & Ambrose, 2008) nell'affermare che anche gli studenti dei primi anni della scuola primaria possono distinguere i diversi significati che il simbolo di uguaglianza può assumere. Tuttavia, per evitare che l'interpretazione procedurale di tale simbolo venga privilegiata, e prenda il sopravvento ostacolando altre interpretazioni, si

potrebbero ipotizzare strategie didattiche opportune per curare entrambe le interpretazioni. Per esempio, si potrebbe pensare a introdurre segni diversi per mettere in evidenza i diversi significati: una freccia unidirezionale può rappresentare la relazione tra operazione e risultato mentre una freccia bidirezionale, o doppia-freccia, potrebbe essere impiegata per rappresentare l'equivalenza tra espressioni numeriche.

Infine, per quanto riguarda il tema centrale di questa tesi, ovvero la memorizzazione dei fatti aritmetici, si può affermare che una condensazione delle procedure basate sulle proprietà aritmetiche (come nel caso delle routine relazionali osservate, sez. 8.3) risulta vantaggiosa al fine di favorire il richiamo di particolari fatti aritmetici dalla memoria; l'ipotesi forte che se ne può trarre è che se la procedura è condensata, è possibile ricostruirla al bisogno e quindi la memorizzazione è più stabile. L'approccio relazionale è un approccio alternativo rispetto a quelli che fanno affidamento sulla sola memoria fonologica, ripiegando invece sulla codifica semantica che la ricerca dimostra essere più efficace nel richiamo a lungo termine (Craik & Lockhart, *Levels of processing. A framework for memory research*, 1972). Per esemplificare, gli studenti coinvolti nella sperimentazione non hanno mai ripetuto a scuola le cosiddette "tabelline" eppure gli esiti dei compiti di memorizzazione della BDE sono migliori rispetto a quelli dei coetanei non coinvolti nella sperimentazione (sez. 8.2) e paragonabili a quelle di allievi con un anno di scolarizzazione in più (sez. 8.1) .

Tuttavia, è opportuno notare che alcune delle routine ricostruttive osservate (sez. 8.3.1) richiedono un forte carico cognitivo (sez. 8.3.3) e potrebbero quindi essere di difficile applicazione per studenti che hanno uno span memoria di lavoro minore. La letteratura mostra l'esistenza di fatti moltiplicativi il cui richiamo è più semplice (cfr cap. 2). L'uso di questi fatti aritmetici all'interno di routine complesse come quelle basate sulla proprietà distributiva potrebbe renderle accessibili anche a tali studenti.

L'intervento presentato in questo lavoro ha mostrato l'efficacia di un particolare artefatto, la tavola di Laisant, al fine di sviluppare significati matematici relativi alla proprietà commutativa della moltiplicazione e alla proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Tale artefatto appare facilmente utilizzabile in classe e le consegne di colorazione, ritaglio e incollaggio proposte possono permettere di esplicitarne il potenziale. Può essere utilizzato in classe sia per introdurre per la prima volta le proprietà aritmetiche, sia per ri-affrontare questi temi al termine della scuola primaria. Un tipo di uso non esclude necessariamente l'altro, così come l'efficacia della tavola di Laisant non esclude l'esistenza di altri artefatti altrettanto efficaci per questo scopo didattico.

12.4.2 Suggerimenti per la formazione insegnanti

Se ci si aspetta che gli insegnanti promuovano il pensiero relazionale nella scuola primaria, così come auspicato anche nella letteratura internazionale, è necessario fornire loro le conoscenze pedagogiche necessarie. In particolare, una conoscenza delle difficoltà che gli studenti potrebbero incontrare appare come fondamentale tassello della *pedagogical content knowledge* (Shulman, 1986) utile per interventi del genere. La ricerca mostra che attualmente non è così: i futuri insegnanti di scuola primaria mostrano difficoltà analoghe a quelle che in

questo lavoro sono state osservate negli studenti, soprattutto per quanto riguarda la proprietà distributiva (Lo, Grant, & Flowers, 2008).

I risultati di ricerca che negli ultimi venti anni si sono susseguiti su questa tema costituiscono una valida base su cui una formazione degli insegnanti potrebbe basarsi. L'uso di un artefatto semplice da realizzare ed economico quale la tavola di Laisant può essere promosso a livello di formazione pre-servizio e appare indicato anche per la formazione in servizio vista la possibilità di utilizzarlo poi facilmente in classe nell'immediato. Proprio questa semplicità d'uso costituisce un rischio. Come mostrato dall'analisi, l'uso della tavola non previene necessariamente le difficoltà nell'interpretazione delle strutture aritmetiche o l'uso procedurale del simbolo di uguaglianza. Una specifica formazione dei docenti sembra un requisito fondamentale perché le consegne studiate in questo lavoro possano divenire consegne da promuovere al largo pubblico.

L'analisi del ruolo dell'insegnante e lo sviluppo del quadro teorico in questa direzione sembra fornire elementi interessanti per l'educazione professionale degli insegnanti. L'introduzione e la familiarizzazione con strategie comunicative basate sulle azioni descritte, e la cui efficacia è stata mostrata nelle analisi svolte nei capitoli precedenti, possono costituire un elemento chiave nella formazione di base.

12. 5 Ulteriori sviluppi di ricerca

Il primo capitolo di questa tesi presenta una ricerca pilota che ha aperto le domande di ricerca da cui il lavoro presentato successivamente ha preso le mosse. Tuttavia, l'analisi delle memorie degli adulti sui fatti moltiplicativi lascia aperte altre strade che qui non sono state percorse. Nella sezione 1.2.3 si è notato come gli adulti con una minore scolarizzazione sviluppino degli script rigidi nella ricostruzione di fatti moltiplicativi; gli studenti coinvolti nella sperimentazione mostrano una varietà di routine, ma l'abilità nel passare da una all'altra a seconda della moltiplicazione richiesta non è stata testata. Pertanto ulteriori dati potrebbero essere raccolti per valutare variazioni della flessibilità di scelta del calcolo quando l'approccio relazionale viene promosso attraverso l'uso della tavola di Laisant.

Inoltre, i dati riportati nel primo capitolo mostrano anche che adulti con minor scolarizzazione hanno prestazioni peggiori nel richiamo diretto dei fatti moltiplicativi dalla memoria. Si è ipotizzata la possibilità di una causalità tra questi due fatti: le difficoltà incontrate nel calcolo potrebbero essere tra le cause di drop-out scolastico. Di conseguenza, studenti con migliori prestazioni nel richiamo dei fatti aritmetici (come quelli del gruppo sperimentale) potrebbero sviluppare un miglior rapporto con la matematica e essere maggiormente resistenti ad altri fattori alla base dell'abbandono scolastico. Un ulteriore approfondimento potrebbe essere quindi fatto sulle ricadute in termini affettivi del tipo di intervento proposto. L'intervento potrebbe quindi essere ripetuto, sia per approfondire ulteriori aspetti teorici, sia per avere conferme sui risultati qui ottenuti attraverso una raccolta dati che coinvolga un numero più ampio di studenti. In questo caso sarebbe necessario prevedere una variazione dei metodi, privilegiando analisi quantitative. Si potrebbe inoltre immaginare di ripetere l'intervento variando le consegne in modo da

valutare se alcuni aspetti del potenziale semiotico vengono esplicitati più efficacemente quando la consegna è espressa in termini diversi.

Dal punto di vista semiotico si è messa in evidenza una varietà di risorse semiotiche impiegate nelle discussioni in classe. In letteratura è possibile incontrare rappresentazioni utili per lo sviluppo del senso della struttura in contesto algebrico. Ne sono un esempio le rappresentazioni ad albero e la verbalizzazione delle espressioni (Maffei & Mariotti, 2011; Malara & Navarra, 2009). L'uso di queste altre risorse potrebbe essere promosso anche nell'implementazione delle consegne con la tavola di Laisant al fine di evitare alcune delle difficoltà osservate.

Infine, i contributi teorici riportati nella sezione 12.3 possono prevedere ulteriori approfondimenti. In particolare, le modalità di uso dei gesti come componente chiave dei segni pivot, così come sono state osservate potrebbero non essere le uniche possibili. Un'analisi mirata di ulteriori discussioni di classe potrebbe mettere in luce altre possibili modalità. L'elaborazione sullo sviluppo dei concetti richiede sicuramente ulteriori dati: il confronto di catene semiotiche che emergono in discussioni sugli stessi oggetti matematici ("stessi" dal punto di vista dell'esperto) in classi con studenti di età diverse potrebbe fornire elementi utili per arricchire il quadro che nella sezione 12.3.1 è stato abbozzato.

Allegato 1: Risultati test BDE

CLASSE V Sperimentale						
	Tab	Mmen	A/S<10	A/S>10	Scritt	QC
Vio	11	11	11	12	11	118
Ale	8	9	11	8	9	85
Seb	11	9	11	10	10	103
Rau	11	11	11	10	10	109
Dan	11	8	11	12	11	109
Sam	11	11	11	12	9	112
And	9	9	11	7	6	77
Mar	11	11	11	10	9	106
Caro	10	10	9	7	8	83
Nic	11	8	11	10	10	100
Fed	10	11	11	12	10	112
Dav	8	6	6	8	8	59
Mat	11	9	11	11	10	106
Fab	10	10	8	9	10	91
Joh	10	11	11	8	10	100
Eri	10	10	4	8	9	74
Pet	10	9	11	8	10	94
Riccardo	11	8	11	11	10	102
Mar	10	11	9	8	11	97
Cat	11	11	11	11	9	108
Sar	11	9	9	10	10	97
Gab	2	3	1	2	6	50
Media	9,91	9,32	9,59	9,27	9,36	95,09
SD	2,00	1,96	2,68	2,33	1,36	17,50

CLASSE II Sperimentale						
Studente	Tabelline	MoltMent	A/S<10	A/S>10	CalcScritt	QC
Sim	10	11	8	12	8	97
Mel	9	9	9	9	6	77
Lor	11	11	11	12	11	118
Mir	6	9	9	11	9	83
MAlb	9	9	11	9	9	91
Fra	10	10	9	10	7	88
NicG	10	10	7	10	7	83
Gia	11	8	8	6	6	68
Sar	10	9	5	6	6	59
Gin	11	10	8	10	8	91
Ele	8	10	7	9	7	74
MAB	11	11	10	12	9	109
GaD	7	8	8	10	8	74
GaB	9	10	7	8	8	77
NicS	9	9	5	2	8	50
SofB	11	8	8	9	6	77
SofM	11	6	7	8	6	65
Abd	6	10	8	9	9	77
Zen	10	10	7	10	8	85
Mat	10	9	5	6	7	62
Media	9,45	9,35	7,85	8,9	7,65	80,25
SD	1,61	1,04	1,66	1,97	1,48	16,24

CLASSE II Controllo						
Studente	Tabelline	MoltMent	A/S<10	A/S>10	CalcScritt	QC
Mar	5	7	11	7	7	62
Ann	11	11	9	11	9	103
Sha	7	9	7	9	7	68
Mar	4	8	7	8	9	59
Ema	10	7	11	11	10	97
Gio	11	8	11	11	10	103
SofC	9	9	7	11	8	83
Mel	10	8	9	11	6	83
Moh	3	6	7	8	4	50
SofG	8	9	7	10	9	80
Hib	3	8	7	7	5	50
Giu	10	8	10	10	10	94
Ali	4	6	7	10	6	50
Sil	11	12	11	10	10	112
Sul	8	9	9	11	8	85
Aid	6	8	11	10	7	77
Mat	8	9	10	11	9	91
Ale	11	8	9	12	8	94
Nic	9	9	9	11	7	85
Media	7,79	8,37	8,89	9,95	7,84	80,32
SD	2,84	1,46	1,66	1,47	1,77	19,10

Allegato 2: Risposte test a lungo termine

Classe II		
	Quesito sulla proprietà commutativa	Quesito sulla proprietà distributiva
GaB	Perché 4×7 e 7×4 sono dello stesso risultato	Perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ fa 6×11
Sar	Perché 7×4 è uguale a 4×7 ma il risultato è lo stesso	Il numero di Martina è pari ma $6 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$ non dà lo stesso risultato
Gin	Sì è giusta 4×7 è uguale a 7×4	No perché $6 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$
Zen	Perché i numeri sono uguali però sono messi in ordine diverso	Perché $8 + 3$ fa 11
NicG	Perché 7×4 è uguale a 4×7 e danno lo stesso risultato	No perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ non fanno 6×11
MAb	Perché 7×4 è uguale a 4×7	Perché $6 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$
Ele	Sì perché quattro per sette uguale sette per quattro e la stessa cosa	Sì fa più veloce dire 3×11 sì che sì
Fra	Perché 4×7 è uguale a 7×4	No perché non si può fare un'operazione con il per, il più e il per
Mel	Corretta perché non cambia niente solo le cifre sono messe all'incontrario	Non corretta perché non è così non si può fare
Mir	Sì perché io faccio 4×7 o 7×4 il risultato è uguale $7 \times 4 = 28$ $4 \times 7 = 28$	No perché non puoi fare un'operazione con il + con dei numeri della divisione
GaD	Sì perché ha scritto 4×7 che è uguale a 7×4	No perché 6×8 fa 48, 8×3 fa 18 e 6×11 fa 66
NicS	Fare (4×7) è uguale a (7×4)	
Lor	Perché se a lo stesso numero tipo 4×7 o 7×4 è la stessa cosa	Perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ è come fare 6×11
Abd	Luca ha calcolato 4×7 e da risultato 7×4	Se Martina ha calcolato $6 \times 8 + 6 \times 3 =$ da il risultato $6 \times 11 = 66$
SofB	Perché ha fatto due moltiplicazioni diverse con gli stessi numeri	Perché ha fatto tre moltiplicazioni diverse e poi ha scritto = e poi ha fatto questa moltiplicazione (6×11)
Mat	Perché ha fatto la moltiplicazione $7 \times 4 = 4 \times 7$ e è giusta	Perché $6 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$ è corretto
Gia		
SofM		
MAIb	Sì. $4 \times 7 = 28$ $7 \times 4 = 28$	Sì, $6 \times 3 = 18$ $6 \times 8 = 48$ $48 + 18 = 66$ $6 \times 11 = 66$
Sim	Perché ha scritto due operazioni uguali $4 \times 7 = 7 \times 4$ è giusta	Perché ha fatto $8 \times 6 = 48$ mentre $6 \times 3 = 18$ $48 + 18 = 66$ e $6 \times 11 = 66$ sicché ha fatto una cosa giusta

Classe V		
	Quesito sulla proprietà commutativa	Quesito sulla proprietà distributiva
Pet	Sì, perché anche se invertiamo i fattori il risultato non cambia, es. $4 \times 7 = 28$ es. $7 \times 4 = 28$	No perché se è $6 \times 8 + 6 \times 3 =$ non fa (6×11) perché non si sommano
Vio	Assente	
Ric	Sì perché o prima o dopo è uguale il risultato	No perché sennò non torna il risultato perché è una moltiplicazione diversa
Joh	Sì perché la proprietà commutativa c'è anche per moltiplicazione	Sì perché la proprietà associativa c'è anche nella moltiplicazione
Seb	Sì perché se inverti i numeri il risultato non cambia	
Cat	Sì ha scritto bene perché nella moltiplicazione vale la proprietà commutativa	Sì perché ha unito 8 e 3 e il risultato è lo stesso
Marti	Sì perché sulla moltiplicazione si può applicare la proprietà commutativa	Sì perché $48 + 18$ fa 66 e 6×11 fa 66
Sara	Assente	
Sam	Sì ha scritto una cosa corretta perché ha eseguito la proprietà commutativa	Sì ha scritto una cosa corretta, perché ha sommato le due moltiplicazioni, se sommi il risultato delle moltiplicazioni il risultato è uguale se fai 6×11
Rau	Sì perché cio ha la proprietà comutativa	No perché non ci ha la proprietà
Mat	Sì perché la moltiplicazione vale la proprietà commutativa	No perché sennò il prodotto non è uguale
Nic	Sì perché il risultato è uguale anche se cambi i risultati	No perché se no il risultato non è uguale
Dan	Sì perché è la proprietà commutativa	No. Perché devi fare il risultato di 6×8 sommando il risultato di 6×3
Dav	No non ha ragione perché 7×4 è solo la proprietà commutativa e basta	Sì ha ragione perché se fai l'operazione in colonna e fai $6 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$ se la fai in colonna $8 + 6$ fa 11
Fed	No perché aveva scritto bene 7×4	No. Perché ha scritto sempre le stesse cose
Fab	Sì perché la moltiplicazione ha alcune proprietà e quella che a fatto Luca la proprietà cumutativa	Sì, perché $8 + 3 = 11$ e quindi fa 6×11
Marta	Sì perché 4×7 o 7×4 è uguale perché ha adottato la proprietà commutativa: cambiando l'ordine degli addendi il risultato non cambia	Non lo so
Eri	No perché viene un numero pari	No perché $6 \times 8 = 48$ e $6 \times 3 = 18$ non va bene perché se riuniamo i risultati delle moltiplicazioni non fa 11
Ale	Sì, perché ha fatto la proprietà commutativa	No, perché non ha usato nessuna proprietà
And	Assente	
Car	Sì ha scritto una cosa corretta perché ha usato la proprietà invariantiva	Ha scritto una cosa corretta perché ha usato la proprietà associativa
Gab	Sì perché viene sempre con lo stesso risutalto (proprietà commutativa)	Se non va moltiplicato torna, se va moltiplicato non torna

Allegato 3: Analisi delle interviste

Di seguito si riporta la sbobinatura completa delle interviste effettuate per approfondire l'analisi dello sviluppo del pensiero relazionale per quei bambini che hanno fornito risposte ambigue al test a lungo termine che è descritto nella sez. 6.4.4 e le cui risposte sono riportate nell'allegato 2 e analizzate nel capitolo 9. Le sbobinature sono organizzate in tabella in modo che nella prima colonna di ciascuna tabella sia riportato un numero progressivo, nella seconda sono riportati i diversi interventi dell'intervistato e dell'intervistatore e nella terza viene effettuata un'analisi eventualmente arricchita con immagini di iscrizioni o gesti fatti durante l'intervento. Ciascuna riga corrisponde a un intervento dei due discorrenti in modo che tutte le righe con numerazione dispari corrispondano a interventi dell'intervistatore (R) e le righe pari corrispondano a interventi dell'intervistato (indicato con la sigla identificativa del bambino).

Ciascuna tabella corrisponde all'intervista a un bambino. La sbobinatura è preceduta da una breve sintesi di quello che il bambino aveva risposto nel test a lungo termine e che ha motivato l'intervista. Dopo ciascuna sbobinatura viene fatta una sintesi dell'analisi in cui si evidenzia, in particolare, se sono state rilevate istanze di pensiero relazionale oppure no.

L'intervista

Per facilità di lettura, si riporta una breve descrizione dell'intervista. Per una descrizione completa delle scelte fatte nella costruzione dell'intervista, si rimanda alla sezione 6.4.5.

Viene chiesto ai bambini di commentare nuovamente l'immagine dei due bambini alla lavagna che era stata proposta nel test a lungo termine (sez. 6.4.4, fig. 6.4.4.1). Viene poi mostrata ai bambini la risposta che avevano dato e si chiede loro di commentarla indicando se sono ancora d'accordo con quanto avevano scritto o se cambierebbero tale risposta.

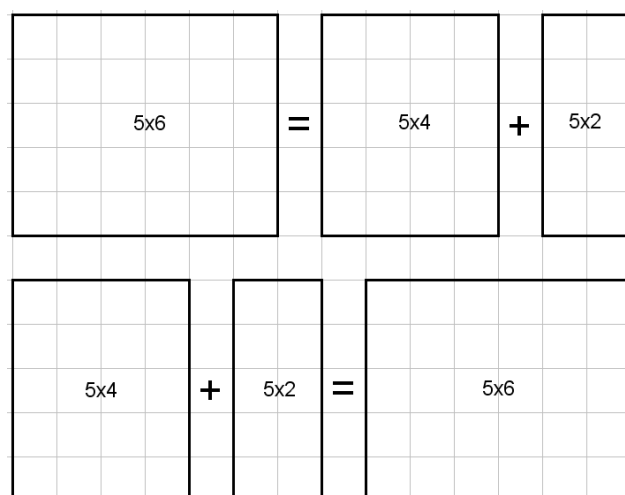
Sono poi mostrate altre uguaglianze con struttura simile e si chiede di stabilire se sono vere o false. Le uguaglianze proposte sono:

$$5 \times 6 = 5 \times 2 + 5 \times 4$$

$$5 \times 6 = 5 \times 3 + 5 \times 4$$

$$5 \times 4 + 5 \times 3 = 5 \times 2 + 5 \times 5$$

Infine si chiede al bambino come si potrebbe spiegare la correttezza o meno di queste espressioni facendo riferimento all'artefatto. Si mostra un'uguaglianza dello stesso tipo rappresentata con segni ibridi (Fig. 6.4.5.1, riportata anche di seguito) legati all'attività fatta precedentemente con l'artefatto (cfr sez. 10.2) e si chiede di commentarli.



L'analisi

Gli interventi dei bambini sono analizzati al fine di evidenziare le diverse componenti del pensiero relazionale. Pertanto, in accordo con la definizione data nella sezione 3.3 si dirà che uno studente sta *sviluppando il proprio pensiero relazionale* in ambito aritmetico quando:

- ancora soggetto al bisogno di chiusura, riconosce il simbolo di uguaglianza come *espressione di azione* (Molina & Ambrose, 2008) ovvero confronta due espressioni fra le quali viene inserito il simbolo di uguaglianza ricorrendo al calcolo del risultato di ciascuna delle due per poi confrontare i risultati delle espressioni stesse. [1]
- Sviluppa le abilità che concorrono al *senso dell'operazione* (Slavit, 1999), ovvero
 - riconosce un'operazione in un contesto diverso da quello in cui gli è stata inizialmente presentata (per es. risolve un problema di ripartizione con una divisione dopo che questa è stata introdotta per la prima volta attraverso le sottrazioni ripetute) [2]
 - ha una conoscenza, almeno intuitiva, di alcune delle proprietà dell'operazione (anche in forma di *teoremi in atto*, Vergnaud, 1985). [3]
- Interpreta un'espressione aritmetica non seguendo l'ordine di scrittura da sinistra verso destra ma divide l'espressione in alcune delle sue *componenti* (nel senso di Hoch & Dreyfus, 2004) anche individuando l'eventuale precedenza di operazioni. [4]

Si dirà invece che si ha un'istanza *di uso del pensiero relazionale* in ambito aritmetico quando lo studente:

- Dimostra *senso dell'operazione* (Slavit, 1999) ovvero
 - riconosce e applica diversi modelli e rappresentazioni della stessa operazione aritmetica [1]
 - usa in modo intenzionale le proprietà dell'operazione anche se non è in grado di enunciarle in forma generale (Jacobs, et al., 2007; Mason, et al., 2009; Empson, et al., 2011). [2]
- interpreta il simbolo di uguaglianza posto fra due espressioni aritmetiche come *espressione di un'equivalenza*, ovvero non svolge i calcoli ma utilizza strategie basate

sulle proprietà delle operazioni coinvolte per determinare l'equivalenza fra i due membri dell'uguaglianza (Carpenter et al., 2003; Molina & Ambrose, 2008). [3]

- Dimostra una o più delle abilità che concorrono al *senso della struttura*.

Il **senso della struttura** può essere definito operativamente come un insieme di abilità:

- vedere un'espressione aritmetica come un'unica entità, [4]
- riconoscere in un'espressione aritmetica una struttura incontrata precedentemente, [5]
- dividere un'espressione nelle operazioni che la costituiscono, [6]
- riconoscere le mutue connessioni fra le operazioni, [7]
- riconoscere quale manipolazione è possibile eseguire (in base alle proprietà delle operazioni), [8]
- riconoscere quale manipolazione è utile fare (per raggiungere un particolare obiettivo). [9]

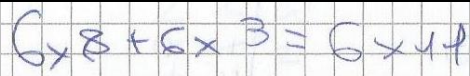
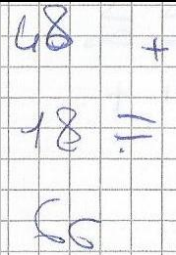
Ciascun punto delle definizioni è stato etichettato con un numero e un colore che vengono utilizzati nell'analisi per codificare i vari interventi in base alle abilità che vengono dimostrate dal bambino. Per esempio, se un bambino dimostra di interpretare il simbolo di uguaglianza come equivalenza e divide un'espressione nelle operazioni che la costituiscono, allora si indicheranno le sigle [3] e [6] di colore verde. Se invece il bambino interpreta un'espressione aritmetica non da sinistra verso destra ma dividendola in alcune sue componenti (seppur non sempre corrette) si riporterà la sigla [4] di colore rosso.

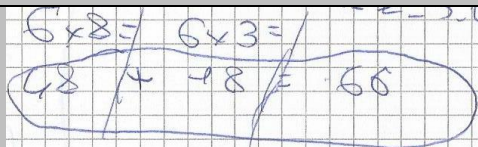
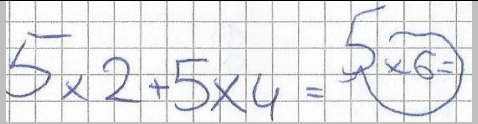
Laddove compaiano istanze delle routine di ricostruzione dei fatti aritmetici classificate nella sezione 8.3.1, queste saranno indicate nell'analisi facendo riferimento alla lettera con cui sono state denominate (da A ad F).

Intervista a Mir

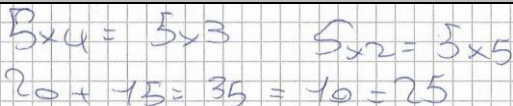
Mir aveva risposto alla domanda relativa alla proprietà distributiva inserita nel test a lungo termine dicendo che "non puoi fare un'operazione con il + con dei numeri della divisione". Pertanto nella risposta di questo bambino è possibile notare l'abilità di analizzare l'espressione in termini delle operazioni che la costituiscono ma non è chiaro se si renda conto della relazione che intercorre fra queste; forse esplicita che le moltiplicazioni hanno una precedenza e confonde la parola "moltiplicazione" con "divisione". Inoltre, non è possibile interpretare il modo in cui lui vede il simbolo di uguaglianza.

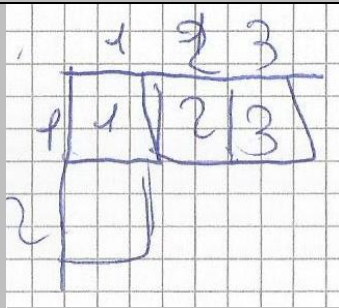
Transcript		Figure e analisi
1	R: [mostra l'immagine dei bambini alla lavagna] Qui ci sono dei bambini, che stanno scrivendo delle cose alla lavagna. Volevo chiederti: secondo te, quello che stanno scrivendo questi bambini alla lavagna è giusto, è sbagliato? Se sì o se no, perché?	
2	Mir: [indicando il bambino che scrive l'uguaglianza che esprime la proprietà commutativa] Questo va bene perché se li cambi è lo stesso. Questo..	Mir enuncia la proprietà commutativa con una terminologia di tipo "procedurale". Di fatto il soggetto della frase non è l'operazione ma un generico "tu" [3]
3	[interrompendolo] No aspetta, aspetta. Spiegami meglio:	

	se li cambi che cosa?	
4	Se cambi, per esempio, se metti 4×7 [con l'indice indica prima un fattore e poi l'altro] è uguale a 7×4 [sposta il dito sull'operazione all'altro membro dell'uguaglianza]	La parola uguale viene utilizzata per confrontare due operazioni, quindi sembra che non si tratti di un uguale di tipo procedurale
5	In che senso è uguale?	
6	Fanno lo stesso risultato [scorre con il pollice su tutta la scrittura]	Mir esplicita che il simbolo uguale viene inteso come espressione dell'azione di confronto fra i risultati delle due operazioni [1]
7	Ah ho capito. Ok.	
8	Invece, questo [indica l'altro bambino nel disegno] mette due... sia le moltiplicazioni, sia... le moltiplicazioni più la... la... cioè sia la moltiplicazione che... va be'	
9	Dillo a parole tue. Non ti preoccupare delle parole.	
10	Cioè moltiplica... sta facendo un'addizione con dei numeri moltiplicati	Mir sta interpretando la struttura dell'espressione aritmetica. Dimostra un certo senso della struttura perché evidenzia che si tratta di un'addizione in cui sono coinvolti numeri moltiplicati, quindi nota la precedenza fra le operazioni [4] [6] [7]
11	Sì è vero	
12	E poi quando fa 6×11 non torna perché dovrebbe. Soltanto queste sono moltiplicazioni [non si capisce a cosa si stia riferendo perché non si vede bene dove indichi] quindi non tornerebbe.	
13	Si può controllare facendo i calcoli?	
14	[riscrive l'uguaglianza sul foglio] sei per otto farebbe... ehm... 40. No, scusa, 48 [scrive il risultato sul foglio].	 L'ordine con cui svolge i calcoli conferma che Mir non ha problemi nel riconoscere l'ordine con cui le operazioni vanno eseguite [4] [6] [7]
15	Sì	
16	E 6×3 farebbe 18 [scrive 18 sotto al 48]. E 6×11 [scrive 6×11] fa... ehm... 66 [completa col simbolo = e il risultato]	
17	Mi spieghi come hai fatto a calcolare 6×11 ? Perché hai ragione, fa 66 ma l'hai fatto molto veloce. Come hai fatto a farlo così veloce?	
18	Perché sapendo che 6×10 fa 60 [R annuisce] facendo per 11 aggiungi un altro 6 [indica l'operazione scritta sul foglio]	In questo passaggio applica la routine D, potrebbe trattarsi di un'applicazione della proprietà distributiva (in forma di teorema in atto) [3] [2]
19	Hai ragione, così si fa veloce. È vero.	
20	Allora, $48 + 18$ fa cinquant... fa 66, aspetta eh [completa la scrittura precedente con un + e un =, scrive il risultato sotto il 18] Sì fa... no fa...	
21	Otto e otto fa sedici, scrivo 6 e porto 1...	
22	Sì fa 66. Però non tornerebbe perché non puoi fare con l'addizione la moltiplicazione.	Mir nota che le due espressioni ai membri dell'uguaglianza sono equivalenti ma sembra stupito di questo risultato. Apparentemente riconosce che in questo caso si ha l'equivalenza ma non pensa che questo valga

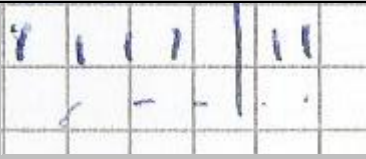
		in generale.
23	Però te l'hai fatto lì.	
24	Torna il risultato ma non...	
25	Non ti convince il modo in cui l'ha scritto?	L'intervistatore suppone che il problema di Mir stia nel riconoscere l'adeguatezza del simbolismo usato per rappresentare l'espressione di sinistra
26	Sì.	
27	Tu come lo scriveresti per scriverlo per bene?	
28	Sei per otto quarantotto [scrive l'operazione, seguita dall'= e sotto scrive il risultato] sei per tre uguale [scrive quello che ha detto] ehm... diciotto. Quarantotto più 18 [completa la seconda riga con i simboli + e =] 66. Perché prima lo fai così e poi questo [cerchia la seconda riga] rimane...	Il bambino mette in evidenza ancora una volta di riconoscere la struttura dell'espressione ma preferisce una rappresentazione diversa in cui il simbolo di uguaglianza ha un ruolo procedurale (come input per il risultato) e non relazionale. Il simbolo di somma non viene inserito fra i prodotti ma fra i loro risultati. Sembra quindi che il bambino non abbia ancora reificato la moltiplicazione come possibile rappresentazione del suo risultato.
29	Quel piano lì sono i risultati del piano di sopra?	
30	Sì	
31	Ok. Qui però. Qui c'è 6×8 uguale 48 [scandisce le parole e tocca col dito ciascuno dei simboli corrispondenti a queste parole] quindi questo uguale è l'uguale di questo risultato qui [indica il 48]	
32	[disegna delle linee in obliquo che partono dal simbolo = e vanno al piano di sotto, verso il corrispondente risultato]	
33	Ho capito. Va bene, così funziona. Sembrerebbe. Senti, allora te ne faccio vedere anche altre. Dimmi se secondo te, queste qua... prendiamole una alla volta [mette il foglio sul tavolo e lo copre parzialmente in modo da mostrare solo la prima] Questa qua, che te ne pare? E' sempre la stessa storia, no?	
34	Sì, il risultato... farebbe 30 e 5 per... sì! Torna. Al massimo questa, se proprio... questi dovrebbero essere invertiti [indica i due membri dell'uguaglianza]	Il bambino manifesta l'esigenza di invertire i membri dell'uguaglianza come a volersi riportare a una struttura del tipo $A+B=C$ piuttosto che $C=A+B$. Il suo "se proprio.." sembra dire "se proprio devo, posso accettare che tu scriva una somma fra due prodotti ma almeno la somma deve stare a sinistra dell'uguale"
35	In che senso? Spiegami.	
36	Prima fai il calcolo uguale... cioè dovrete fare così $5 \times 2 + 5 \times 4$ uguale 5×6 [mentre lo dice, lo scrive]. Perché se sai già 5×6 , fai $5 \times 6 =$, sì un po' torna perché ti dice come è scomposto.	 La frase finale "un po' torna..." sembra suggerire che il bambino stia riflettendo sulle possibili interpretazioni della scrittura presentata e riesce a dare un significato anche a quella con la somma a destra: "ti dice come è scomposto". Non è chiaro chi sia l'oggetto della scomposizione; potrebbe essere il prodotto o il fattore 6. In questo senso l'uguale è ancora l'espressione di una procedura che non è di

		somma ma di scomposizione. Potrebbe essere interpretato come un primo passo verso una visione dell'uguale "bi-direzionale".
37	Però dici: se sai già il risultato, perché lo devi fare? Sembra quasi senza senso. Però, secondo te, se uno scrive così scrive una cosa sbagliata?	
38	Completamente sbagliata no. Un po' torna.	Il fatto che il bambino dica che non è completamente sbagliato, che un po' torni, potrebbe riferirsi alla possibilità di dare un significato alla scrittura piuttosto che alla sua correttezza in termini di risultati dei calcoli
39	Ok. Perché mi dicevi prima: così fai vedere come... Prima mi hai detto una parola che però mi sono già dimenticato. Hai detto: così si fa vedere come lo ha...?	
40	Ah! Come lo ha scomposto.	
41	Scomposto. Ok, era quella la parola. Ok. Senti, quindi anche in questo caso? [mostra la seconda]	
42	Ehm... no, il calcolo non torna qua. Questo è proprio per niente giusto perché 5×3 fa 15 [scrive tutta l'operazione in linea con l'uguale e il risultato] e 5×4 fa 20 [stavolta il risultato lo scrive sotto] e 15 più 20 [aggiunge $15 +$ a sinistra del 20] uguale 35 [lo scrive sulla stessa riga]	 Il bambino dice molto rapidamente che l'uguaglianza non è "per niente" corretta e poi esegue una verifica sui risultati. Dimostra ancora di interpretare correttamente la struttura [4] [6] [7] ma il modo in cui riscrive mostra sempre una visione procedurale dell'uguaglianza. Non viene espressa la relazione fra i fattori ($3+4=7$ e non 6), questo suggerisce che anche nel caso precedente la scomposizione era relativa al risultato e non al fattore.
43	Senti ma tu sei stato velocissimo. Secondo me hai usato qualche trucco. Come hai fatto a capire subito che non tornava? Avevi già fatto tutti i calcoli a mente?	
44	No va be', bastava guardare anche questa sopra, se questo qua [indica l'uguaglianza precedente] torna, questo non può tornare.	Il bambino riconosce la somiglianza fra le strutture delle due espressioni, si tratta proprio di una delle abilità che caratterizza il senso della struttura [5]. Inoltre è come se utilizzasse una sorta di transitività dell'uguaglianza: se la prima espressione è del tipo $A=B$ e la seconda è del tipo $A=C$ ma B e C sono sicuramente diversi, allora la seconda non può essere corretta. $ \begin{array}{l} (A = B) \cap (A = C) \rightarrow (B = C) \\ A = B \\ \neg(B = C) \\ \hline \neg(A = C) \end{array} $
45	Ah! Hai ragione, è vero, è vero. Perché sicuramente questo [indica la seconda uguaglianza] come sarà rispetto a questo [indica la prima] ? Il risultato... più grande o più piccolo.	
46	Più grande e più piccolo perché questo [indica la prima] usa numeri più piccoli.	
47	Hai perfettamente ragione. Non ci avevo fatto caso a questa cosa.	
48	Senti. Se invece scrivessi addirittura una cosa di questo	

	tipo [mostra la terza uguaglianza]	
49	Ehm... questo... ehm... allora... allora... [prende la penna in mano] 5×4 venti [scrive sopra l'operazione e sotto il risultato] più 5×3 ...ehm... mi sembra giusto. Aspetta. 5×4 venti, 5×3 quindici [lo scrive mettendo sempre il risultato sotto l'operazione] uguale 35 [completa la somma nella seconda riga inserendo + e =] uguale [scrive = dopo 35]... 5×2 uguale 10 [lo scrive allo stesso modo] 5×5 è uguale 25 [scrive l'operazione nella riga di sopra e il simbolo = e il risultato in quella di sotto]. Tornerebbe lo stesso risultato. Soltanto che qui sono un numero più piccolo e uno più grande [indica i vari fattori nella scrittura stampata, prima da un lato dell'uguale e poi dall'altro] e questo più grande e questo più piccolo. Quindi in un certo senso è giusto. Il ragionamento che ha fatto è giusto.	 Mir prosegue con un'interpretazione delle scritture che rivela senso della struttura [4] [6] [7] ma un'interpretazione dei simboli di uguaglianza ambigua. Infatti nelle scritture sopra, il simbolo di uguaglianza compare ogni volta che deve essere scritto un risultato, ha quindi una valenza procedurale. Però alla fine del suo intervento, Mir confronta i numeri nelle espressioni facendo notare che il fatto che si alternino numeri più grandi e più piccoli fa sì che i risultati si "compensino". Questa appare come una lettura relazionale del simbolo di uguaglianza. Resta però il fatto che non vengono uguagliate le somme $3+4$ e $2+5$
50	E' il modo in cui è scritto che non ti piace tanto?	
51	Sì.	
52	Senti. Fra l'altro, una cosa simile io ve l'avevo fatta vedere all'inizio dell'anno. Avevo dato alla maestra un foglio chiedendovi di scrivere la vostra opinione. [prende il test di Mirco] Vedi c'era un'immagine proprio come quella che ti ho fatto vedere prima [gliela mostra] e tu mi avevi dato delle risposte. Allora, qui avevi scritto, rispetto a 7×4 e 4×7 [ruota il foglio in modo che il bambino possa vedere la propria risposta]: "sì perché io faccio [man mano che legge segue le parole col dito indice] 4×7 e 7×4 , il risultato è uguale $7 \times 4 = 28$ e $4 \times 7 = 28$ ". Sei ancora d'accordo con quello che avevi scritto?	
53	Questo sì.	Mir concorda con l'interpretazione dell'uguale come richiesta di confronto fra due risultati. [1]
54	Nell'altro invece avevi scritto questa frase qui. Leggi un po'. Me la spieghi? Penso che sia simile a quello che mi stavi dicendo adesso.	
55	Sì, soltanto che... cioè la risposta più valida era [inizia a leggere seguendo la scrittura con la penna] "no, perché non puoi fare un'operazione con il più con due numeri della divisione"	
56	E se dovessi ridirmelo oggi, lo ridiresti con le stesse parole?	
57	No	
58	Come diresti adesso?	
59	No, perché... aspetta. Una per esempio. Qual era questa qua?	
60	Vediamo [torna alla pagina con l'immagine dei bambini alla lavagna] Andiamo a vedere l'immagine.	
61	È quella di prima	
62	Era quella di prima. Sì.	
63	Stiamo parlando di questa [indica l'espressione scritta nell'immagine] giusto?	
64	Sì	
65	Allora. Io direi che con la moltiplicazione, l'addizione non va bene però se proprio devi fare il calcolo, il risultato torna. Se proprio devi fare così.	Mir esplicita chiaramente la sua contrarietà a utilizzare insieme prodotti e somme, il che sembra confermare la sua visione non reificata della moltiplicazione come

		operazione che rappresenta il proprio risultato e quindi può essere inserita all'interno di un'altra procedura di calcolo (in un'espressione). Tuttavia riconosce che l'uguale può essere considerato come simbolo di confronto fra risultati [1] Mir continua a dare una risposta negativa rispetto all'uguaglianza presentata nel test a lungo termine, tuttavia riconosce l'uguaglianza fra i risultati ma forse non reputa che quella scrittura stia indicando quel tipo di confronto. Non individua la relazione data dalla proprietà distributiva
66	Ok. Questo può essere un modo per dirlo. Poi se devo scriverlo glielo faccio vedere in questo modo [indica la riscrittura che Mirco aveva fatto nella linea 32. Il bambino annuisce] Perfetto. Questa era una prima cosa che ti volevo chiedere. L'altra cosa che ti volevo chiedere è: ti ricordi che noi l'anno scorso abbiamo usato tante volte la tabella quella grande, con dentro tutte le mattonelle. Ecco: se io volessi farglielo vedere con le mattonelle che i risultati qui sono giusti [indica il foglio su cui sono scritte le uguaglianze commentate in precedenza] ci potrebbe essere un sistema?	
67	Ehm... sì. Se hai la tabella potresti fare così... ehm... scusa non ho capito.	
68	Allora, prendiamo la prima [copre le altre uguaglianze con un foglio] io gli voglio far vedere che i risultati sono giusti. E voglio farglielo vedere usando le mattonelle della tabella.	
69	La prima cosa da fargli vedere: 5×2 [lo scrive] Ora una non ce l'ho per farti capire ma va a cercare 5×2	
70	Come lo cerca 5×2 nella tabella?	
71	Nella tabella del cinque [fa cinque stanghette verticali] e poi va... va nella fila del 5 e la colonna del 2	
72	Ok.	
73	E gli fa vedere 5×2 fa 10 [scrive = e il risultato] Poi va nella fila del 5 e nella colonna del 4 e gli fa vedere 5×4 fa 20	Mir suggerisce di usare la tabella come "contenitore" di risultati da andare a ricercare nelle opportune righe e colonne, sembra far riferimento alla classica tavola pitagorica
74	Senti ma questi risultati dentro la tabella come fa a vederli? Sono già scritti dentro la tabella?	
75	Mi sembra sì. Perché c'era... aspetta. Questo [inizia a disegnare] fai conto è quella dell'uno perché ora non ce la faccio a fare tutto. L'uno, allora, uno e uno, uno. [completa il disegno dell'angolo in alto a sinistra della tavola pitagorica classica] Due e...	 Il disegno fatto da Mir suggerisce il riferimento alla tavola pitagorica già condensata, non alle tabelline geometriche. Il che può essere considerato coerente col fatto che l'incrocio riga/colonna rappresenta il risultato ma non l'operazione.
76	Ok. Ho capito. Ok, e così via. Quindi in ogni casella c'è	

	scritto il risultato. Ho capito. Ok, in questo modo trova tutti quanti i risultati. Son d'accordo. Senti, ma se invece io glielo facessi vedere con un disegno così [mostra solo il primo dei due disegni in cui compaiono rettangoli che rappresentano l'uguaglianza vista prima simbolicamente] con i rettangoli, con le mattonelle...	
77	Sì, potrebbe contare. Un, due, tre, quattro, cinque. Potrebbe contare.	Mir riconosce immediatamente la possibilità di contare i quadretti per determinare il risultato della moltiplicazione. Quindi, anche se il modello rettangolare non è stato proposto da lui, il bambino non ha difficoltà a ricordare come ricondurlo all'operazione di moltiplicazione di cui ha parlato fino a ora [1] (si noti che finora il bambino ha sempre richiamato i risultati a mente tranne nel caso di 66).
78	Ma è giusto un disegno così? Intanto, secondo te. Cioè, la domanda è: secondo te, scrivere questo [indica la prima fra le espressioni] o disegnare questo qua è la stessa cosa?	
79	Sì, soltanto che è invertito ma non cambierebbe niente.	Il bambino mette a confronto le diverse scritture notando che i membri delle uguaglianze hanno posizioni diverse, riesce quindi a confrontare le strutture rapidamente, dimostrano ancora un discreto senso della struttura [5]
80	Aspetta, che cos'è invertito? Fammelo vedere	
81	5×2 al posto di 5×4	
82	Ah, sì. Hai ragione.	
83	Non cambierebbe niente.	
84	Non cambia niente?	
85	No.	Il bambino sta quindi riconoscendo la riflessività dell'uguaglianza. Considerando che prima ne ha riconosciuto la transitività, questo bambino sembra dimostrare di riconoscere nell'uguaglianza le proprietà che caratterizzano una relazione di equivalenza.
86	E com'è che fanno a vederlo da questo disegno qui che i risultati sono giusti?	
87	O conta così: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8... [indica con la punta i quadratini all'interno di uno dei rettangoli più piccoli].	
88	Fino in fondo diciamo. Quindi facciamo così: lui conta tutti questi quadretti, poi cosa fa?	
89	Poi conta questi [indica l'altro rettangolo] e non c'è bisogno che conta anche questi [indica il rettangolo più grande dall'altro lato dell'=] basta che mette insieme i numeri, fa un'addizione.	Mir esplicita che nel caso del rettangolo più grande, la base è data dalla somma delle basi. La proprietà distributiva emerge quindi, in forma di teorema in atto [3], nel caso di rappresentazione della moltiplicazione col modello rettangolare, non era invece stata riconosciuta o applicata precedentemente nelle scritture simboliche. Pertanto sembra che questa proprietà sia legata alla particolare rappresentazione e non generalizzata all'operazione di moltiplicazione nella sua rappresentazione simbolica.
90	Come fa a essere sicuro che mettendo insieme questi quadretti [indica i due rettangoli con tutta la mano] vengono questi quadretti [indica l'altro rettangolo]? Come faccio a convincerlo? Perché tu hai detto che non importa raccontarli tutti.	

91	Allora. Se proprio lo vuoi convincere gli fai contare questi [indica uno a uno i quadretti del rettangolo grande] oppure gli fai fare questo... aspetta. Mettere... questo [fa 4 lineette verticali sul foglio] ho fatto a trattini, così.	
92	Ok. Facciamo uno schema.	
93	[fa una lunga linea e poi altre due lineette verticali] e conta 1, 2, 3, 4, 5, 6 e qui lo nota [conta i quadretti della base dei due rettangoli più piccoli] 1, 2, 3, 4, 5, 6.	 La schematizzazione usata dal bambino rivela una certa astrazione: i trattini rappresentano dei quadratini, Mir sembra formulare la proprietà in una forma più generale, ovvero con una rappresentazione diversa rispetto a quella dei rettangoli
94	Ah, ho capito.	
95	Poi gli fai vedere che qui... quant'è? Cinque. Allora, questo è sei [indica disegno che ha fatto con le lineette] Gli fai capire che mettendo questi due [indica ciascuno dei due rettangoli piccoli con gli indici e li sposta come se avvicinasse i due rettangoli] e cinque poi... se cinque non gli torna perché dovrebbe fare 10 ehm... aspetta ho perso il conto. Gli fai fare $2+4$ [indica ancora il suo disegno] sei. Poi gli fai notare che è la colonna del 5 e quindi per forza deve essere 5 e conta anche questo [indica il rettangolo più grande]	Mir completa l'enunciato della proprietà distributiva facendo notare che un fattore è sempre in comune. [3] Quando dice "non gli torna perché dovrebbe fare 10" sembra parlare di una misinterpretazione di tipo prettamente sintattico che si presenta nelle interviste successive da più bambini (si veda l'intervista a Lor e quella a Fra), ovvero sommare a due a due tutti i fattori.
96	E così vede che sono 5 anche quelli. Va bene, ho capito.	

Andando ad analizzare le diverse abilità che concorrono al pensiero relazionale, si nota che Mir ne dimostra alcune ma non tutte. Di fatto Mir mostra senso della struttura: nota relazioni che ci sono fra le parti della struttura suddividendo correttamente le espressioni nelle operazioni che le compongono (linee 10, 14, 42, 49); confronta strutture simili individuando gli elementi di differenza usandoli correttamente per i suoi scopi (linee 44 e 79). Tuttavia il simbolo di uguaglianza ha un significato operativo molto forte che non sembra conciliabile col significato di equivalenza fra espressioni. Alcune delle componenti di questo significato sono presenti (riconosce l'uguaglianza fra risultati nelle linee 6, 53 e 65) ma sembra che il bambino resista all'idea di dover dare un "doppio significato" allo stesso simbolo, ovvero sia quello di operatore sia quello di simbolo di equivalenza.

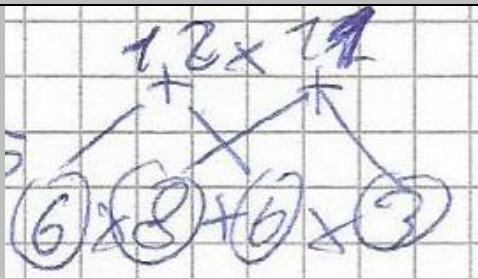
Mir fa anche uso della proprietà commutativa con sicurezza (linea 2). Si potrebbe descrivere il significato che Mir dà alla proprietà distributiva in termini di "significato situato" nel senso che la proprietà è utilizzata solo contesto dei rettangoli (linee 89 e 95) ma nel passaggio alla più comune rappresentazione simbolica non viene più notata la presenza di un fattore in comune fra i prodotti e la relazione additiva fra i fattori non in comune.

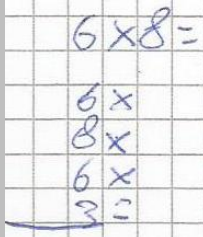
Seguendo le definizioni date all'inizio, si può dire che Mir sta sviluppando il suo pensiero relazionale anche se non ci sono istanze di pensiero relazionale vero e proprio. In particolare Mir mostra una difficoltà a interpretare la scritture simbolico-algebriche per le quali dimostra un'interpretazione fortemente procedurale senza riuscire a coordinarla con una visione relazionale. Nel caso della rappresentazione con i rettangoli, la complessità sembra diminuire dato che si hanno scritture diverse (il rettangoli e i simboli in esso contenuti) che è possibile

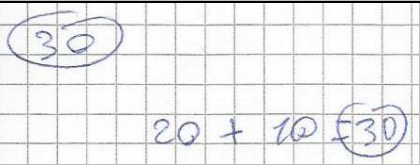
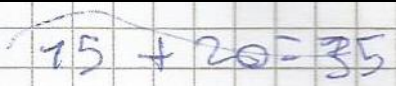
gestire separatamente. La differenza che si riscontra nelle due diverse rappresentazioni sembra rafforzare il fatto che Mir sia ad un livello intermedio di sviluppo del pensiero relazionale.

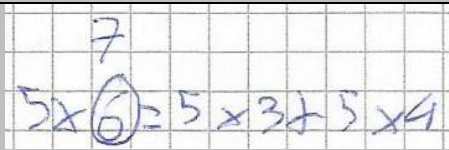
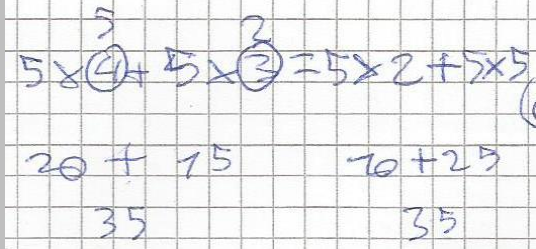
Intervista a Fra

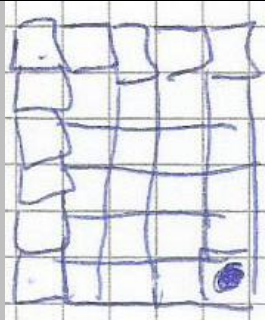
Anche Fra, così come Mir prima, risponde al test a lungo termine mettendo in evidenza la presenza di più operazioni nell'uguaglianza relativa alla proprietà distributiva. Nella sua risposta "non si può fare un'operazione con il per, il più e il per" non viene però messa in evidenza nessuna relazione fra le operazioni se non il fatto di comparire, nella lettura da sinistra verso destra, in un certo ordine. Fra non mostra quindi senso della struttura e non è possibile comprendere la sua interpretazione del simbolo di uguaglianza.

1	R: Allora, io c'ho questo disegno, che è il disegno di due bambini che stanno scrivendo alla lavagna. Ti volevo chiedere: secondo te, le cose che stanno scrivendo questi due bambini sono giuste?	
2	Fra: Ehm... questa sì [indica l'uguaglianza che rappresenta la proprietà commutativa]	
3	Come mai?	
4	Perché 4×7 è uguale a 7×4	
5	E come fai a essere così sicuro?	
6	4×7 , se cambi posizione al 7 e lo metti al posto del 4 viene 7×4 e fa lo stesso risultato.	Fra riporta una visione procedurale della proprietà, un'operazione è ottenuta dall'altra attraverso una trasformazione sintattica [3]. L'uguaglianza viene spiegata in termini di risultato. La sua visione dell'uguale quindi non è unidirezionale, ma questo simbolo viene interpretato come confronto fra i risultati [1]
7	Ho capito. E invece di quell'altra cosa ne pensi?	
8	Secondo me no.	
9	Come si potrebbe fare per controllare?	
10	Tornerebbe bene se sarebbe 12×12	
11	No aspetta. Spiegami da dove è uscito fuori 12 e 12.	
12	Sei per otto più sei per tre [mentre lo dice lo scrive] Avrei fatto sei più sei [cerchia i due 6 che ha scritto] che fa 12	Fra suggerisce che la trasformazione sintattica debba rispettare la simmetria tra i fattori: quello che faccio sui primi fattori lo faccio anche sugli altri.
13	Ho capito. E così è uscito il primo 12.	
14	E 8 più 3 [cerchia le cifre che nomina] che fa 12.	 Fra sembra cercare di dar significato alla relazione additiva fra i fattori delle moltiplicazioni che si trovano a sinistra dell'uguale e quella che si trova a destra. La struttura proposta dal ragazzo non è corretta dal punto di vista aritmetico e sembra essere un tentativo di dare una certa "simmetria" a una trasformazione sintattica (quella data dalla proprietà distributiva) che simmetrica non è.

15	Non sono d'accordo. $8+3$ quanto fa?	
16	$8+3$.. undici.	
17	11. Ok.	
18	Quindi sarebbe non 12×12 ma 12×11 .	Fra sembra riconoscere la possibilità di verificare l'equivalenza fra due espressioni numeriche attraverso una manipolazione sintattica. Applica però la proprietà distributiva come se agisse simmetricamente su entrambi i fattori. Un'interpretazione alternativa di questo fenomeno potrebbe essere la seguente: Fra cerca di interpretare il simbolo 'più' fra le due moltiplicazioni e seguendo un certo senso di "simmetria" o di "buona forma", ritiene che indichi che si devono sommare i fattori a due a due.
19	Senti una cosa: ma si potrebbero calcolare i risultati per controllare se è corretto?	
20	Sì	
21	Come si farebbe?	
22	Da quale inizio? Questo o questo? [indica i due bambini nel disegno]	
23	Questo [indica quello l'uguaglianza sulla proprietà commutativa] lasciamolo stare che abbiamo già capito che è corretto. Questo qui [indica l'altro].	
24	Ehm... 6×8 [scrive $6 \times 8 =$, poi scrive 6×8 e 6×3 come se fossero messi in colonna] Sei per otto 48.	 Fra dimostra difficoltà a gestire la sintassi, o quella dell'espressione o quella dell'incolonnamento
25	Scriviamocelo così non ce lo scordiamo	
26	[scrive 48 da una parte] 48 per 6 uguale...	Fra interpreta il calcolo da svolgere come una successione di moltiplicazioni
27	Aspetta, aspetta. Qui c'hai messo tutti per. Qua [indica l'espressione scritta dal bambino] ci sono per ma c'è anche un più. Come si fa per arrivare al risultato di questa cosa?	L'intervistatore focalizza l'attenzione dello studente sul simbolo di addizione e richiede quindi al bambino di re-interpretarlo.
28	Sì fa 48 più 6×3 [scrive 6×3 sul foglio] uguale... 18 [lo scrive accanto a 6×3 senza mettere un =] $48+18$ uguale... [mentre lo dice lo scrive, compreso il simbolo =] 6×11 uguale [lo scrive poco più in basso. Poi lo riscrive in colonna e inizia a fare il calcolo]. Quarantotto più 18 [lo scrive in colonna] uguale... [svolge il calcolo] Sessantasei. È giusta.	 Qui Fra sembra dimostrare che sia stato l'incolonnamento a rendergli difficile l'interpretazione della struttura. Una volta focalizzata l'attenzione sul simbolo di addizione nella scrittura 'in riga', la difficoltà precedentemente dimostrata viene superata. Lavorando con due numeri alla volta, il bambino porta avanti il calcolo correttamente.
29	È giusta? E allora che cosa c'era che non andava qui?	[6][7]

	[indica l'espressione in cui Fra aveva sommato tutti i fattori ottenendo 12×11] Nel controllo che avevi fatto all'inizio. Perché all'inizio mi avevi detto "non è giusta".	
30	Perché pensavo che bisognava fare 12×11	
31	E invece alla fine basta 6×11 ? [Fra annuisce e resta in silenzio] Ok senti. Però stavo pensando: non so se te lo ricordi, ma un po' di tempo fa ve l'avevo già chiesta questa cosa [mostra il test] e tu mi avevi risposto così: questo [indica la risposta alla prima domanda] era quello 4×7 e 7×4 e hai risposto "perché 4×7 è uguale a 7×4 ". Sei ancora d'accordo con quello che avevi scritto?	Fra annuisce e resta in silenzio di fronte alla prima domanda dell'intervistatore. Non porta altri elementi a favore del fatto che l'espressione sia equivalente a 6×11 , forse perché è convinto da questo particolare caso in cui a confrontato i risultati ma non vede la struttura generale data dalla proprietà distributiva
32	Sì	
33	Se lo dovessi ridire oggi, lo scriveresti così?	
34	Sì	
35	Invece su quest'altra [indica la risposta alla seconda domanda] che cosa mi diresti?	La risposta indicata è "non si può fare un'operazione con il per, il più e il per"
36	Mmm... Non lo scriverei come ho scritto qua	
37	E come scriveresti adesso?	
38	Sì, perché bisogna calcolare i risultati delle due moltiplicazioni, calcolare il risultato della terza [fa un cerchietto nell'aria sopra a 6×11 scritto sul foglio] e vedere se i primi due sono uguali a quello... il loro risultato.	Fra, adesso che ha individuato una procedura di controllo, non ha nessun dubbio e cambia la propria risposta. Tuttavia, la risposta data da Fra alla domanda "come scriveresti" è in realtà di tipo procedurale e sembra più una risposta alla domanda: "come controlleresti se una scrittura che contiene l'uguale è giusta?". Pertanto sembra che Fra sia convinto della procedura da adottare ma ancora non c'è nessun indizio sul fatto che apprezzi l'equivalenza data dalla proprietà distributiva ed espressa dalla scrittura proposta.
39	Ho capito. Senti: proviamo a fare un altro esempio? [prende il foglio con le altre espressioni, lo mostra lasciando scoperta solo la prima] Prendiamo questo qua. Questo qui secondo te è vero oppure no	
40	Non lo so. Guardo. [breve silenzio] Uno è trenta [scrive 30 sul foglio]. Uno è venti e uno è 10. Quindi va bene.	
41	Cosa hai controllato? Hai calcolato le moltiplicazioni e poi?	
42	Ho fatto $20 + 10$ che fa 30 [lo scrive] e questo è 30 [circonda i due 30 scritti sul foglio]	 Fra ripete la routine di controllo appena utilizzata, anche stavolta dimostra di avere controllo dell'ordine delle operazioni [6][7] da eseguire.
43	Perfetto. E quindi torna. E invece se ti faccio vedere questa? [scopre la seconda]	
44	Trenta [scrive 30 sul foglio]. Quindici [lo scrive], venti [lo scrive accanto e poi inserisce un + fra i due numeri. Fa il calcolo a mente e scrive =35]. Non torna.	
45	Potremmo cambiarla per farla tornare? [silenzio lungo] Se io volessi lasciare questo così [indica il membro dell'uguaglianza in cui compare la somma] di qua [indica l'altro membro] che cosa ci dovrei scrivere?	
46	Ehm... [avvicina la penna al foglio su cui sono stampate le espressioni]	

47	Riscriviamola sul foglio [indica il foglio su cui il bambino stava già scrivendo, Fra riscrive tutta l'uguaglianza] Ok. Diciamo che questo lo voglio così [indica come prima ma sul foglio del bambino] ma vorrei cambiare quest'altro [lo indica] per farlo essere giusto.	
48	Bisognerebbe cambiare il 6 [circonda la cifra] in un 7 [lo scrive sopra]	 Qui non è chiaro se Fra cambi il 6 in un 7 perché sa che il risultato deve fare 35 o perché applichi la distributiva. Vista la buona padronanza dei fatti aritmetici da parte di questo bambino, è probabile che valga la prima ipotesi.
49	Così funziona?	
50	Sì	
51	Perché avevi visto... questo quant'è che veniva tutto insieme? [indica la parte della somma]	
52	Tutto insieme 35	
53	Ok. 5×7 , trentacinque. Perfetto. Ora te ne faccio vedere una lunghissima. Di questa che ne pensi? [mostra l'ultima uguaglianza]	
54	[riscrive l'uguaglianza in cima al proprio foglio] È giusta!	
55	L'hai già fatto?	
56	Sì	
57	Raccontami un po'. Perché io non sono veloce come te.	
58	Aspetta lo scrivo. 5×4 , venti [scrive 20 sotto alla moltiplicazione 5×4 già scritta, continua così borbottando a scrivere i risultati delle prime due moltiplicazioni] Se avrei messo il 3 metto il 2 [fa un cerchietto intorno al 3 nel membro dell'uguaglianza e ci scrive sopra un 2] e qua metto il 5 [cerchia il 4 e sopra scrive un 5] sarebbe l'operazione uguale.	 Fra confronta direttamente le due scritture, [5] mostrando che modificando uno solo dei fattori di ciascuno dei prodotti di destra si può trasformare nell'espressione di sinistra è [2][8][9]. Fra dimostra un grande senso della struttura (confronta strutture simili) e inoltre confronto le espressioni senza passare dai risultati, quindi l'uguale è usato in senso relazionale [3]. Si tratta di un'istanza di pensiero relazionale. Interessante notare che Fra sembra più a suo agio nel confronto di due espressioni che presentano la stessa struttura – somma di due moltiplicazioni – rispetto al caso iniziale dove si doveva confrontare una somma di moltiplicazioni con una moltiplicazione da sola (dove mancava una “simmetria”).
59	[annuisce] Però lì ci sono il 4 e il 3. E com'è che tu sei sicuro che anche col 4 e il 3 fa uguale?	
60	Qui fa 20 e qui è uguale a 35 [mette un + fra i risultati delle prime due moltiplicazioni e sotto scrive 35] e qui 10 e 25 [scrive i risultati delle moltiplicazioni a destra dell'=] fa 35. E' giusta.	Fra riesce comunque a utilizzare il calcolo dei risultati come controllo della correttezza di quanto affermato [1]

61	È giustissimo. Perfetto. Senti però io queste cose vorrei spiegarle anche a bambini più piccolini e noi l'anno scorso avevamo, se ti ricordi, lavorato con la tabella quella con tutte le mattonelle dentro. Te la ricordi?	
62	Sì	
63	Ecco. Se io volessi spiegarglielo utilizzando la tabella. Metti che voglia spiegare questa qua [indica la prima uguaglianza] e gli voglio far vedere che è giusta. Con la tabella come glielo fo vedere?	
64	Gli faresti il 5 per il 6 e gli faresti vedere quanto farebbe.	
65	E come glielo faccio vedere? Spiegami	
66	[non si capisce cosa dica, inizia a disegnare un rettangolo 6×5. Disegna prima una fila di 5, poi una colonnina di 6 in cui è compreso il primo quadretto disegnato e poi completa tirando le righe] Qui ci sarebbe 5×6 [fa un pallino nel quadretto in basso a destra nel reticolo che ha disegnato]	 Fra sembra riferirsi alla tavola pitagorica già compressa, infatti afferma che il risultato si trova nel quadratino in basso a destra.
67	Lì ci dovrebbe essere il risultato. Io stavo pensando di provare a farglielo vedere così [mostra il disegno con i rettangoli] Noi l'anno scorso a volte avevamo ritagliato dei cartoncini. Ho pensato che magari in questo modo si poteva capire. Secondo te è la stessa cosa?	
68	Sì	
69	Dici che funziona?	
70	Sì	
71	Ma pensi che questo qui [indica il disegno] possa essere più utile?	
72	Sì	
73	Perché cosa c'è in più?	
74	Ci sono i quadrati. E gli basterebbe attaccarli [indica il simbolo +] togliendo il + e mettendoli insieme	Fra fa riferimento all'operazione di incollare i rettangoli per verificare l'equivalenza fra i due membri dell'uguaglianza, sembra quindi una reminiscenza dell'attività svolta con l'artefatto
75	Ah. E che cosa vedono in quel modo?	
76	In quel modo si può vedere che i quadrati sono uguali	
77	Aspetta. I quadrati, in che senso? Quali quadrati?	
78	Questo qua [indica il rettangolo di sinistra] verrebbe formato un altro quadrato uguale togliendo il + e mettendo questo [indica il 2×5] accanto a questo [indica il 5×4]	La parola quadrato sembra riferirsi ai "rettangoli". Fra spiega la procedura attraverso la quale è possibile ottenere il rettangolo a sinistra dell'uguale incollando insieme gli altri due lungo il lato di lunghezza comune
79	Ok. Però secondo me non sono quadrati. Secondo me son rettangoli	
80	Giusto.	
81	Perché... I lati sono uguali?	
82	No	
83	Quanto sono i lati?	
84	Qua è 5 [indica la prima colonna di quadretti nel rettangolo di sinistra] e questo è 6 [indica la prima fila di quadretti]	

85	E qui quando li metti insieme [mette indice e pollice sui due rettangoli e li avvicina] che cosa viene fuori?	
86	Cinque [fa un piccolo movimento verticale con la penna] per sei [piccolo movimento orizzontale]	
87	Quindi... quindi va bene?	
88	Sì	
89	Senti. Secondo te, se invece lo scrivessi così [mostra la figura in cui i membri dell'uguaglianza sono scambiati] andrebbe bene lo stesso?	
90	Sì	
91	E quale dei due pensi sia meglio?	
92	Questa qua [indica la seconda]	
93	Come mai pensi sia meglio?	
94	Questa qua [indica la prima] potrebbe essere anche al contrario	Fra sembra non avere una vera e propria predilezione per un senso o per l'altro il che sembra confermare la sua visione bidirezionale dell'uguaglianza
95	Però dici che sono comunque tutt'e due giuste?	
96	Sì	

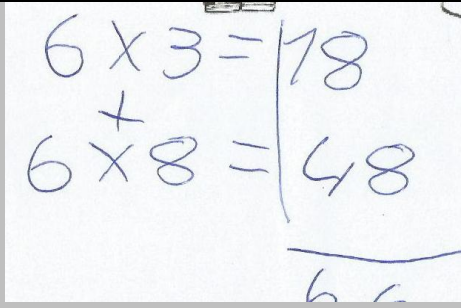
All'inizio dell'intervista Fra ha difficoltà a dare un significato relazionale alla struttura del tipo “prodotto+prodotto=prodotto” (linee 7-26) ma bastano pochi scambi di battute con l'intervistatore per arrivare a un'interpretazione aritmeticamente consistente in termini di relazione tra i risultati di procedure di calcolo (linee 27-28). Lo studente ripete più volte una routine di controllo della correttezza dell'uguaglianza basata sul confronto fra risultati per uguaglianza di questo tipo (linee 28, 40, 42, 44, 60) ma non per le altre: nel caso della proprietà commutativa spiega chiaramente che lo scambio dell'ordine dei fattori preserva l'equivalenza (linea 6) e nel caso dell'espressione del tipo “prodotto+prodotto=prodotto+prodotto” confronta i fattori senza sentire la necessità di svolgere i calcoli (linea 58) finché non gli viene richiesto dall'intervistatore (linee 59 e 60).

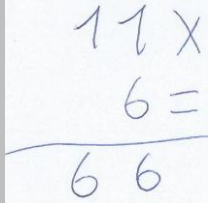
Fra dimostra una visione bidirezionale dell'uguaglianza (linea 94) e un buon senso della struttura (linee 28, 58) ma evidentemente non riesce a riconoscere la struttura caratteristica dalla proprietà distributiva sebbene la usi in forma di teorema in atto nel confronto fra le ultime due espressioni (di fatto la sua modalità di confronto alla linea 58 funziona perché un fattore è sempre in comune). Sembra che l'asimmetria della struttura della proprietà distributiva lo metta in difficoltà, infatti nota la relazione tra la somma di due prodotti, ma sembra non accettarla tra un prodotto e la somma di due prodotti.

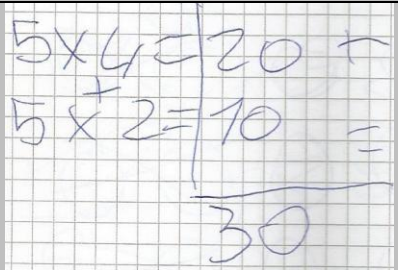
Intervista a Mel

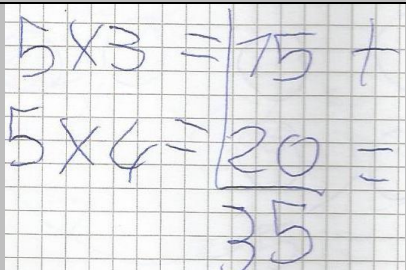
Il commento di Mel all'uguaglianza relativa alla proprietà distributiva è ancora una risposta in negativo. La bambina ritiene che “Non è così non si può fare” ma non motiva in nessun modo questa impossibilità di verificare la correttezza dell'uguaglianza proposta nel test a lungo termine.

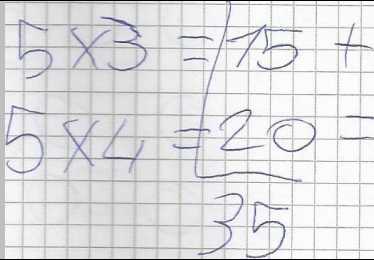
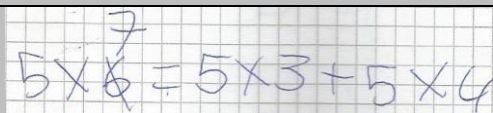
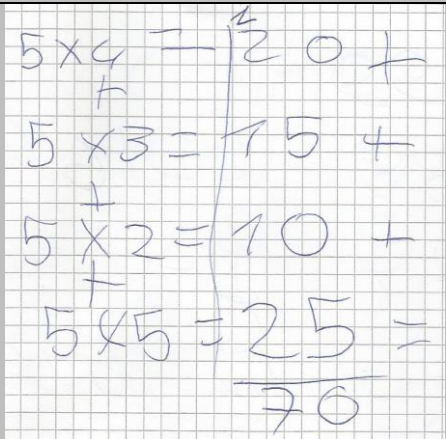
1	R: Ti volevo far vedere questo disegno qua. È il disegno di due bambini che stanno scrivendo su una lavagna. Secondo te quello che hanno scritto questi bambini è giusto?	
2	Mel: Questa è giusta [indica l'uguaglianza che rappresenta la proprietà commutativa]	
3	Spiegami un attimo perché però	

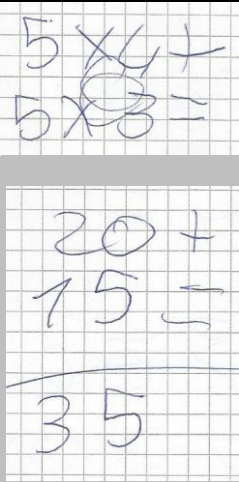
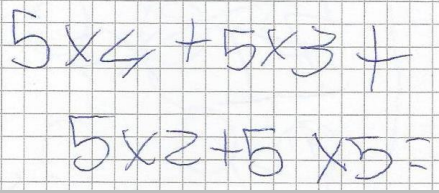
4	Praticamente qui c'è 4×7 dice che è uguale... non uguale per esempio il numero, il risultato, uguale perché sette per quattro è uguale 28 e anche quattro per sette fa ventotto solo che le cifre, per esempio il 4 e il 7 sono messe all'incontrario in 7×4	In questo intervento Mel chiarisce in modo molto esplicito che, a suo avviso, il simbolo uguale può avere due valenze. Una di queste è quella di indicare che deve essere dato il risultato e la bambina specifica che non è questo il caso. Viene enunciata la proprietà commutativa facendo riferimento al particolare caso di questa operazione. Il ruolo dato all'uguale [3], il riferimento alla posizione delle cifre [8] e quindi l'enunciato della proprietà [2] fanno classificare questo intervento come un'istanza di pensiero relazionale.
5	Ho capito.	
6	E questa... [indica l'altra uguaglianza, relativa alla proprietà distributiva]	
7	E quella invece... [silenzio per qualche istante come se Mel stesse facendo i calcoli a mente] Vuoi scriverti i risultati così te li ricordi?	
8	[scrive le moltiplicazioni con in fondo simbolo =, una sotto l'altra. Fa un + fra le due moltiplicazioni. Scrive il risultato di 6×8] Sei per tre... mi sembra 18	
9	Come si fa a esser sicuri? Che controllo possiamo fare?	
10	La tabellina del 6. Sei... [alza il pollice] 12 [alza l'indice] 18 [alza il medio]	Si tratta della routine A perché sembra elencare la cantilena dei risultati e tiene il controllo (con le dita) su quando deve fermarsi
11	Funziona? [Mel annuisce] Perfetto!	
12	Quindi faccio praticamente $18 + 48$	
13	E quanto viene?	
14	[fa una linea sotto il 48 e una verticale che separa i risultati dalle operazioni. Usa le dita per fare i conti] Sedici... Cinque più uno. Sessantasei	 Il modo in cui Mel scrive il calcolo è del tutto singolare e non è mai comparso nel lavoro di nessun altro bambino. La scrittura sembra avere una struttura bidimensionale, interpretabile in modi diversi a seconda della "dimensione" che si considera: in orizzontale viene rappresentata l'equivalenza del prodotto col suo risultato, in verticale si rappresenta la struttura additiva. L'allieva sembra interpretare l'uguale che compare in questa scrittura in senso procedurale; d'altra parte l'interpretazione complessa fornita mostra come la bambina abbia chiaro il senso della struttura. Infatti non sembra avere dubbi sull'ordine con cui devono essere eseguiti i calcoli e l'espressione è divisa nelle sue parti (due delle abilità che caratterizzano il senso della struttura [6][7]).

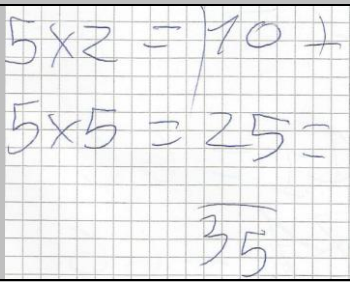
15	Ok.	
16	E ora devo fare 6×11 che fa 66.	
17	Come hai fatto a farlo così veloce 6×11 ? C'hai un trucchetto?	
18	No, perché ho ragionato che prima faccio $6 \times 8 = 48$ poi faccio 6×3 e poi faccio il più, questo [non si capisce a cosa si riferisca] lo levo e faccio l'operazione e i loro risultati.	
19	Ma qui però [indica il lato destro dell'uguaglianza] c'è scritto 6×11	
20	Devo calcolare 6×11 se fa...	
21	Ah! Se fa 66, quindi non lo sappiamo ancora. Però possiamo provare a vederlo.	
22	Non mi ricordo come si facevano in colonna... Ah!	
23	Sennò si può fare a mente?	
24	Si può fare 11×6 ?	In questo momento è chiaro che la bambina, non avendo un modo per calcolare 6×11 , ricorre alla conoscenza della proprietà commutativa (routine C). Tuttavia richiede il "permesso" dell'intervistatore. Si tratta proprio della situazione descritta nel commento alle routine: non trovando il fatto aritmetico in memoria, la bambina cerca una strada alternativa rifacendosi alle sue conoscenze sulle proprietà. Mel rivela qui di avere senso dell'operazione [2].
25	Sì, si può fare anche 11×6 tanto mi hai detto prima che se si scambiano non cambia niente.	
26	[imposta il calcolo in colonna] 6×1 , sei. 6×1 , sei.	
27	Quant'è venuto?	
28	Sessantasei	
29	Quindi è giusto quello che ha scritto? [Mel annuisce] Ok. Senti: sai una cosa... io in realtà questo tipo di cosa ve l'avevo chiesta un po' di tempo fa e tu mi avevi già risposto. Guarda un po' [mostra l'immagine, Mel ride] è la stessa immagine. Andiamo a vedere cosa avevi risposto. Luca era questo bambino qua [indica il bambino nel disegno che scrive l'uguaglianza relativa alla proprietà commutativa] Qui c'è scritto "è corretta, perché non cambia niente, solo le cifre sono messe all'incontrario". Sei ancora d'accordo? Se lo dovessi dire oggi lo ridiresti allo stesso modo?	Il nome "Luca" si riferisce al bambino rappresentato nell'immagine del test a lungo termine.
30	Questa no. [indica la risposta relativa alla proprietà distributiva]	Mel dimostra chiaramente di aver cambiato opinione rispetto alla risposta data nel test a lungo termine
31	Qui hai scritto "non corretta, perché non è così, non si può fare". Sei ancora d'accordo con questa cosa? Perché avevi scritto che non si può fare?	
32	Perché avevo sbagliato a farla	
33	Dici che avevi fatto qualche errore nel fare i calcoli? [Mel annuisce] Ok. E se dovessi rispondere oggi, che scriveresti?	
34	Corretta. Perché fa 66... perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ fa 6×11 e va bene.	Qui Mel usa il verbo "fare" nell'interpretare il simbolo di uguaglianza. Rivela quindi una visione procedurale ma il complemento oggetto della seconda frase è " 6×11 " come se questo prodotto

		fosse il risultato (e quindi come se fosse del tutto equivalente al 66 [4]). Il confronto si basa soltanto sull'equivalenza dei due risultati.
35	Ok. Perfetto. Allora questa l'abbiamo sistemata. Adesso però te ne volevo far vedere altre che mi sono capitate. Guardiamole una alla volta sennò poi ci confondiamo [copre parzialmente il foglio in modo da lasciar visibile solo la prima]. Allora partiamo da questa qui. Secondo te è giusta o sbagliata?	
36	Ah! È l'incontrario di quella che avevi messo prima praticamente	Anche Mel, così come Mir, riconosce che le strutture dei membri dell'uguaglianza sono invertite. Pertanto si può dire che la bambina ha messo a confronto le strutture [5]. A differenza di Mir, Mel esegue poi la stessa procedura di prima, senza nessun problema a trattare il simbolo di uguaglianza in modo bi-direzionale
37	Ma secondo te è giusto scriverlo così?	
38	Posso calcolarlo?	
39	Questo foglio è tutto tuo, lo puoi usare quanto vuoi.	
40	5×4... [scrive le operazioni come prima, incolonnando anche i risultati] 1 più 2, tre. 5×6 fa 30!	
41	Davvero? Come fai a essere così sicura?	
42	5, 10, 15 [man mano che le dice alza le dita della mano] 20, 25, 30. Sì perché mi ricordo di più 5×7 perché la tabellina fa 1 due volte...	Mel rivela di conoscere una regolarità nell'elenco dei prodotti del 5. Si noti che il tempo richiesto per l'elencazione è alto rispetto a quello in cui la bambina ha dato il risultato nella linea 40 quindi sembra improbabile che lei abbia effettivamente elencato la tabellina. Sembra piuttosto che lo stia facendo come controllo.
43	2 due volte, 3 tre volte e così via. Dieci, quindici. Venti, venticinque.	
44	Io mi ricordo però che fa il numero finale è 0 poi c'è 5 poi 0 e sempre 5. Mi sono ricordata che sette per cinque fa 35, ne levo 5 e fa 30.	Qui Mel rivela di aver fatto ricorso alla routine D richiamando un prodotto vicino più grande e poi sottraendo 5.
45	Ah! Ho capito. Questo è un trucco molto furbo, sai?! Senti, proviamo a vederne un'altra? Secondo te questa è vera?	
46	Se questa è vera [indica la prima] questa mi sa un po' di no.	Anche Mel, così come Mir, fa un confronto fra questa scrittura e quella precedente. Pertanto la bambina riconosce la somiglianza fra le due strutture e individua l'unico elemento di differenza [5]. Inoltre, applica la proprietà transitiva dell'uguaglianza nel senso spiegato prima nell'analisi dell'intervista di Mir
47	Perché? Raccontami un po' perché pensi di no, son curioso.	
48	Perché praticamente. Intanto qui [indica la prima] c'è tutti numeri pari	Mel aggiunge un'ulteriore controllo. Di fatto è vero che i fattori che moltiplicano il 5 e sono coinvolti nel caso corretto sono tutti pari mentre nel caso scorretto c'è un solo dispari che non può portare ad un

		risultato pari (dato che è poi sommato a un pari). [2]
49	Aha! Hai ragione. Mentre di là che succede?	
50	Che tutti sono numeri pari a parte 5×3 . Il 5 è dispari.	
51	Allora qui non erano tutti numeri pari [indicando la prima]	
52	Ma io dico questi. Il cinque sì, però il 3 cambia. Quindi per me no. Però aspetta vedo [prende la penna]	Mel è in grado di confrontare le espressioni senza i calcoli [3] ma facendo riferimento alle proprietà delle operazioni (ovvero al suo senso dell'operazione [2]). Pertanto si può parlare di pensiero relazionale. Si noti che però, nel momento in cui vuole effettuare un controllo, la bambina ricorre al calcolo dei risultati delle operazioni. [1]
53	Per sicurezza preferisci fare il calcolo, va bene vediamo.	
54	[inizia a fare i calcoli, scrive $3 \times 5 = 15$] Il 15 non mi torna.	
55	Perché non ti torna	
56	Perché qui [indica il calcolo sopra] c'è 10. Il 10 è pari. [torna a fare i suoi calcoli] Poi il 4. [incolonna i risultati che ha scritto] Cinque più zero, cinque. Uno più due, tre. Ecco! L'ho detto che non era giusto.	
57	Senti: come potremmo correggerlo? Facciamo la correzione di questo. Come lo potremmo correggere?	
58	Lo scrivo?	
59	Sì. Riscriviamo questa scrittura qua [la indica sul foglio stampato] però correggendola.	
60	Qui faccio una sbarretta [indica il membro destro dell'uguale]	
61	Correggiamola da quest'altro lato. Qui la voglio lasciare uguale. Correggiamo solo questa di qua.	
62	Dove?	
63	Vorrei cambiare il numero di qua [indica il 5×6 scritto dalla bambina] invece che cambiare i numeri di là.	
64	Quale numero?	
65	Non lo so, scegli te in maniera che alla fine venga giusta.	
66	Il 6.	
67	E che cosa ci metti al posto del 6?	
68	Ci metto il... [sbarra il 6] Che cosa posso metterci?	
69	Be', per diventare vera, quanto dovrebbe fare quella moltiplicazione? Per essere giusto, questa moltiplicazione qui [la indica] che risultato dovrebbe dare?	
70	Trenta	
71	Sicura? 5×6 fa 30, sarebbe già giusta. Però te avevi detto che non è giusta perché non faceva 30. Ma faceva...	
72	Trentacinque	
73	E allora qui [indica nuovamente 5×6] per poter essere giusta che cosa ci dovrebbe essere?	
74	Qua? [indica l'altro membro]	
75	Al posto del 6. Cosa ci possiamo mettere? [Mel inizia a calcolare nuovamente $5 \times 3 + 5 \times 4$] Hai già fatto quel calcolo.	

76	Lo faccio di nuovo. [svolge il calcolo] Fa 35. Qui ci sarebbe un numero e poi qui 35 [indica il membro sinistro dell'uguaglianza] Così farebbe...	
77	35 per 1 dici? Ci possiamo mettere un'altra moltiplicazione che faccia 35? Quale per esempio?	
78	5×1	
79	Ma 5×1 fa 5	
80	No, 35×1	Mel chiaramente non sta applicando la proprietà distributiva. Riconosce che i due membri dell'uguaglianza devono dare lo stesso risultato [1] e quindi inserisce la moltiplicazione più semplice che dà come risultato 35.
81	Invece di 35×1 ce ne possiamo mettere un'altra?	
82	Cinque per sette	Una volta che le viene chiesto lo sforzo di pensare a un'altra moltiplicazione richiama rapidamente 5×7 come prodotto associato al risultato 35.
83	E allora al posto del 6 che ci mettiamo?	
84	Sette	
85	Va bene. Si poteva scrivere anche 35×1 , era sempre giusto. Un'altra possibilità è 5×7 . Va bene. Senti: pronta per l'ultima? Vado? [la scopre]	
86	Ohioia! Non vedo quali son le moltiplicazioni	Qui Mel rivela una difficoltà nel leggere i simboli. Questa difficoltà sarà palesata di nuovo successivamente
87	Guarda i simbolini	
88	Devo fare un po' di conti	
89	Vediamo un po' che succede	
90	[Mel incolonna le moltiplicazioni come fatto precedentemente ma incolonna tutte e 4 le moltiplicazioni coinvolte in questa uguaglianza e ne somma i risultati ottenendo 70] Cinque più cinque fa 10, 0 e porto 1. Uno, due, tre, quattro, cinque e sei. Fa 7. Mi viene 70.	 Mel esegue il calcolo sommando tutti i prodotti coinvolti, probabilmente non notando la presenza del simbolo di uguaglianza
91	Quindi chi ha scritto quello ha scritto una cosa giusta oppure no? Da cosa lo capiamo?	
92	Se lui voleva scrivere che $5 \times 4 + 5 \times 3$ fa un risultato ...	Sollecitata dalla domanda del ricercatore la bambina cerca di dare un senso alla scrittura e nel cercarlo torna a riguardare

		il foglio stampato
93	Che risultato fa?	
94	No aspetta. Forse ho capito che vuole dire. Vuole dire che $5 \times 4 + 5 \times 3$ fa lo stesso risultato di $5 \times 2 + 5 \times 5$.	Sembra che, guardando nuovamente il foglio, la bambina abbia notato la presenza del simbolo di uguaglianza e quindi interpreta correttamente la scrittura. Si noti che Mel usa sempre il verbo “fare” e parla sempre di risultati. Qui l’uguale è visto come simbolo di confronto fra i risultati di due espressioni aritmetiche [1]
95	Vediamo se è vero? Proviamo a vedere se è vero? Dai, proviamoci	
96	[comincia a incolonnare come sempre, poi cancella] Scrivo direttamente i risultati. [incolonna $20+15$ e scrive il risultato] Poi qual’era? [guarda l’espressione scritta sul foglio stampato] Van bene tutti e due i modi [indica la lunga somma fatta precedentemente]	 L’espressione “scrivo direttamente i risultati” sembra indicare una tendenza ad andare rapidamente verso il risultato, come se fosse il fine ultimo dell’attività svolta.
97	Ma scritto così [indica la scrittura] secondo te che significa?	
98	Vorrà dire che questi due moltiplicati, questi $5 \times 4 + 5 \times 3$ è come un’addizione solo che devo fare i per.	Mel sembra esplicitare la struttura che lei legge nell’espressione: si tratta di un’addizione ma un’addizione fra numeri che vengono fuori “facendo i per”. [6][7]
99	Senti, e se invece avessi voluto scrivere questo [indica la lunga somma] come avrei potuto scrivere?	
100	Cinque per quattro più cinque per tre più cinque...	
101	Lo proviamo a scrivere [indica il foglio] qui accanto?	
102	Cosa?	
103	Cioè, se invece che scrivere questa cosa qui [indica la stampa] avessi voluto scrivere questa [indica la lunga somma sul foglio della bambina] com’è che l’avrebbe scritta in linea [fa una linea orizzontale sul foglio col dito]?	
104	[Mel inizia a scrivere $5 \times 4 + 5 \times 3$ ma arriva in fondo al foglio] vado sotto [mette un + accanto al 3 e continua sotto con $5 \times 2 + 5 \times 5 =$]	 La bambina dimostra di aver compreso la differenza fra le due scritture. Si noti che in fondo viene inserito un simbolo di uguaglianza come se stesse a significare che l’espressione deve essere calcolata.
105	Quindi qual è la differenza fra queste due?	
106	Che qui [indica la stampa] c’è l’uguale in mezzo. Qui [indica il	

	suo foglio] ci deve star qui l'uguale [indica il simbolo = scritto alla fine]	
107	Ok. Quindi c'è una piccola differenza. Proviamo a vedere se quindi quello che aveva scritto era giusto.	
108	Qua fra 35 [si riferisce al calcolo già fatto] Cinque per due... [inizia a incolonnare le moltiplicazioni come fatto nei casi precedenti, svolge i calcoli] È giusto!	
109	È giusto quindi? Perfetto. Allora poi senti, ti volevo chiedere un'altra cosa. Te ti ricordi che noi l'anno scorso abbiamo utilizzato tanto la tabella quella con tutte le mattonelline dentro. Io vorrei provare a utilizzare quella tabella per spiegare ad altri bambini come fare a scoprire che questa qui [indica la prima uguaglianza nella stampa] è giusta	
110	Non ce l'ho la tabella	
111	Va be', però ti ricordi più o meno com'era fatta?	
112	Sì, praticamente c'erano le tabelline in riga e in colonna	
113	Se io volessi usare quella per spiegare questo qua, come potrei fare? Cosa gli potrei dire?	
114	Potresti dirgli come ha fatto la maestra. Se non capirebbero gli potrei dire che $5 \times 4 + 5 \times 2$ è uguale a 5×6 , che vuol dire? Che dovete fare tutta la tabellina del 5 fino ad arrivare ai loro risultati	In questa frase Mel sembra suggerire la ricerca del risultato scorrendo la quinta riga della tavola pitagorica. Anche lei quindi non sembra parlare delle tabelline geometriche
115	E con la tabella come fanno a trovare i risultati?	
116	Praticamente cercano il 5, quando lo trovano guardano tutti i risultati. Poi quando li hanno trovati gli dico di fare un'addizione cioè $5 \times 2 + 5 \times 4$ di 5×2 e 5×4 trovano i risultati e fanno l'addizione. Poi ci aggiungono quello di 5×6 che fa 30. Loro trovano il 30 e poi è risolta.	
117	Senti io avevo pensato di farglielo vedere anche tipo i cartoncini. Ti ricordi che l'anno scorso noi a volte ritagliavamo i cartoncini [intanto mostra la prima immagine con i rettangoli, coprendo l'altra]. Pensavo di farglielo vedere in questo modo qui, con le mattonelle con i quadretti dentro. Secondo te se scrivo questo o se scrivo questo [indica prima l'espressione poi i rettangoli] è la stessa cosa?	
118	Sì	
119	E come faccio a spiegarglielo a loro?	
120	Perché qui [indicando l'espressione] è tutta in riga poi qui [indica la figura] ci sono soltanto i quadretti che la separano.	
121	Ok e secondo te questo [indicando i rettangoli] li può aiutare a capire meglio? Disegnarlo così con le mattonelle. Che vantaggio c'è a farlo così?	
122	Si vede praticamente che sono un po' più distanziate. Qui sono un po' più appiccate [indicando l'espressione]	Mel sembra riportare una riflessione sulla difficoltà che lei stessa ha avuto precedentemente nell'interpretare i simboli scritti tutti "attaccati". La bambina riconosce che i rettangoli fungono da separatori delle operazioni e quindi rendono il testo più chiaro.
123	Ah. Dici che si riesce a leggerlo meglio. E i quadratini li possono usare in qualche modo per aiutarsi?	
124	[conta col dito i quadretti per determinare le dimensioni di uno dei rettangoli] Sì	

125	In che modo?	
126	Perché qui hanno questo qui 5[percorre col dito l'altezza di tutti i rettangoli] questo ora che è per 4 è quattro [indica la larghezza del rettangolo 5×4 scorrendola col dito] qui 2 e qui 6 [indica gli altri rettangoli] e quindi possono contare quelli e arrivare al risultato.	
127	Aspetta. Com'è che lo trovano il risultato? Non ho capito.	
128	Che qui [scorre col dito l'altezza di 5×2] hanno tutta la colonna qui di 5.	
129	Quindi contano e fanno 5. E poi?	
130	Poi qui invece [scorre col dito sulla larghezza del rettangolo] il largo hanno tutto... hanno tutto lo spazio di due quadretti. Contano i quadretti: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 [col dito tocca uno ad uno i quadretti che conta] arrivano al risultato.	Fino a questo punto è poco chiaro il conteggio dei quadretti a cui Mel si riferisce. Qui però, contando tutti e 10 i quadretti del prodotto 5×2, la bambina chiarisce che si sta riferendo a tutti i quadretti contenuti in un rettangolo.
131	Ah ora ho capito.	
132	Quindi si possono sommare meglio.	
133	Ora ho capito. Be' certo: tu dici che contando i quadretti loro trovano i risultati e poi li sommano.	
134	Senti e se lo scrivo così è la stessa cosa [mostra l'altra immagine]?	
135	Sì, solo che questo [indica uno dei rettangoli] è rivolto all'incontrario.	
136	E secondo te qual è meglio? Te quale preferiresti fra queste due? [Mel indica la prima] Quella sopra?	
137	Perché di solito [mette il dito sulla seconda] No questa. Perché di solito per fare le moltiplicazioni si inizia da qui.	
138	In che senso? Spiegami	
139	Perché se io faccio una moltiplicazione rivolta a questo modo [indica la prima] è un pochino più difficile da capire perché è all'incontrario se la faccio rivolta normalmente allora questo vantaggio si può capire anche meglio.	La bambina usa la parola "normalmente" ad indicare che la struttura del tipo $A+B=C$ è più frequente nella sua esperienza rispetto al caso $C=A+B$. Sebbene riconosca l'equivalenza delle due, propende comunque per la versione più familiare.
140	Ma secondo te però son giuste tutt'e due?	
141	Sì	
142	Ok.	

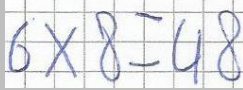
Mel mostra di avere un forte senso della struttura: interpreta correttamente le espressioni (linee 14, 40, 56, 76, 98) e, anche quando ha difficoltà nella lettura dei simboli stampati, riesce a comprendere la differenza fra la sua lettura errata e quello che è effettivamente scritto nella stampa (linea 106). Inoltre, in più occasioni confronta strutture simili senza svolgere i calcoli (linee 36 e 46).

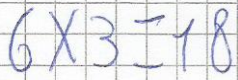
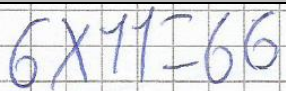
L'interpretazione dell'uguale cambia a seconda dei casi passando da una lettura più operativa al riconoscimento di un'equivalenza (linee 4, 34, 94) e la bambina è cosciente di questa differenza di significato (linea 4).

Per quanto riguarda le proprietà, applica ed enuncia la proprietà commutativa (linee 4 e 24) ma non fa nessun riferimento alla proprietà distributiva. La bambina mostra istanze di pensiero relazionale (linea 4) ma non relativamente a questa seconda proprietà. Usa invece altre proprietà legate al prodotto e alla somma di numeri pari/dispari (linee 48 e 52).

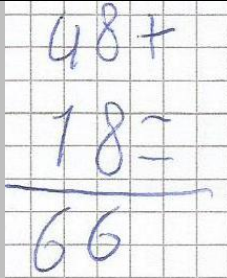
Intervista a NicG

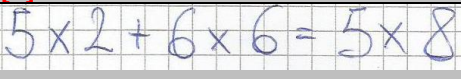
NicG, nel test a lungo termine, risponde negativamente per quanto riguarda la proprietà distributiva. Quando gli viene richiesto se l'uguaglianza è corretta risponde "No perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ non fanno 6×11 ". L'uso del termine 'fanno' suggerisce una visione procedurale del simbolo di uguaglianza. Una possibile interpretazione è che il fatto che a destra dell'uguale non sia presente un numero ma un'operazione renda la scrittura non interpretabile per il bambino. L'intervista è utile ad approfondire questo aspetto.

1	R: Questo è un disegno di due bambini che scrivono delle cose su una lavagna. Ti volevo chiedere: secondo te, le cose che scrivono questi bambini, sono giuste?	
2	NicG: Questo sì [indica l'uguaglianza che rappresenta la proprietà distributiva]	NicG sembra aver cambiato idea rispetto a quello che aveva scritto nel test
3	Spiegami perché	
4	Perché 6×8 ... No, basta fare $6 + 3$ e viene 11	
5	No aspetta, $6 + 3$ fa 9.	
6	Ehm... $8 + 3$ fa 11 [indica i numeri sul disegno] e quindi alla fine viene 6×11	Qui riconosce l'uguaglianza tra le due espressioni e prova a giustificarla in termini della proprietà distributiva [3]
7	Mi puoi fare un altro esempio con altri numeri per spiegarmi questa regola, perché...	
8	Ah no, perché poi devo fare anche $6 + 6$	NicG, diversamente da quello che aveva scritto nel test, riconosce l'uguaglianza delle due espressioni e prova a giustificarla in termini della proprietà distributiva [3] ma, come altri suoi compagni di classe, si sposta a livello puramente sintattico, ricordando la proprietà come relazione tra i numeri in gioco, piuttosto che il significato relativo ai risultati. Scatta una rielaborazione in termini di simmetria della relazione tra i numeri in gioco, che porto a coinvolgere anche i fattori in comune. Una possibile interpretazione è che la domanda del ricercatore gli abbia fatto supporre di aver sbagliato e quindi stia provando a cambiare il suo approccio
9	Non lo so. Aspetta un attimo. Rispiegami questa regola che mi stavi dicendo perché è interessante ma non son sicuro di aver capito bene	
10	Otto più tre fa 11 [ogni volta che nomina un numero lo indica sulla figura] sicché li metti insieme e poi torna 6×11	Qui NicG sta enunciando la proprietà distributiva in forma di teorema in atto [3]. Nel parlato non c'è riferimento al ruolo di 8 e 3 come fattori ma i gesti lo comunicano. Manca un riferimento al fatto che c'è un fattore in comune in tutti i prodotti.
11	Senti ma secondo te si può calcolare i risultati per controllarlo, anche, se è vera questa regola? Proviamo?	
12	[inizia a scrivere sul foglio] Sei per otto fa 48 [scrive il risultato accanto al prodotto]	 Riconosce che le moltiplicazioni hanno la priorità sulla somma, quindi riesce a dividere l'espressione nelle operazioni

		che la compongono [6]
13	Sì	
14	E 6×3 , diciotto [scrivere il calcolo su un'unica riga]	
15	Ok	
16	Sei per undici... [momento di silenzio] non ho capito se mettere il 6 sotto e l'undici sopra o l'11 sotto e il sei sopra.	Il bambino sembra riferirsi al modo in cui incolonnare il calcolo
17	Non ho capito cosa vuoi dire. Lo vuoi fare in colonna?	
18	Per fare l'operazione in colonna	
19	Per fare l'operazione in colonna è uguale, ma ci può essere un modo per farlo a mente 6×11 ?	
20	Sei per... dieci più...	
21	Sei per dieci quanto farebbe?	
22	Sessanta	
23	E quindi se voglio arrivare a 6×11 ?	
24	Più 1... no	Qui NicG dimostra di non essere padrone della routine D, che richiede di passare al modello additivo per la moltiplicazione. Il bambino di fatto non riesce a controllare quale sia il passo da fare per andare dal risultato di 6×10 a quello di 6×11
25	Sarebbe 61	
26	Sì	
27	Ti torna? Io non son convinto. Non mi torna mica tanto, sai. Sei per dieci, sessanta, ok. Poi però, per arrivare a 6×11 , quanto ci dovrò aggiungere?	
28	Uno... o undici...	
29	Se te fai 6×5 , quanto fa?	Qui l'intervistatore riporta il bambino a ripetere la stessa routine in un contesto in cui il bambino, probabilmente, già conosce i risultati da ottenere
30	Fa 71 forse. Perché se ci aggiungi 11	
31	Stavamo facendo 6×11 , e abbiamo calcolato 6×10 , e siamo arrivati quindi a 60, dobbiamo arrivare a 6×11	
32	O aggiungi 1 o aggiungi 11	
33	Facciamolo su un caso più semplice per capire meglio. Se fosse 6×5 sarebbe	L'intervistatore esplicita le proprie intenzioni
34	Trenta	
35	E per arrivare a 6×6	
36	Trentasei... aggiungo 6	
37	E se devi fare 6×7 ? [fa un gesto col dito, come un saltino, quasi a indicare una ripetizione del "salto" di 6]	
38	Aggiungo altri 6	
39	Un altro 6. Quindi se fai 6×10 ? Sessanta e...	
40	Ah 66	Qui il bambino mostra di aver compreso la regolarità tanto da tornare al problema che stava affrontando per applicarla a quel contesto. Il fatto che il bambino tenda occasionalmente a rielaborare le regole (ovvero relazioni tra numeri che diano risultati) potrebbe essere indice della "fragilità" del significato di moltiplicazione come relazione tra i due numeri in gioco.
41	...se devi arrivare a sei per undici?	
42	Sessantasei [lo scrive]	

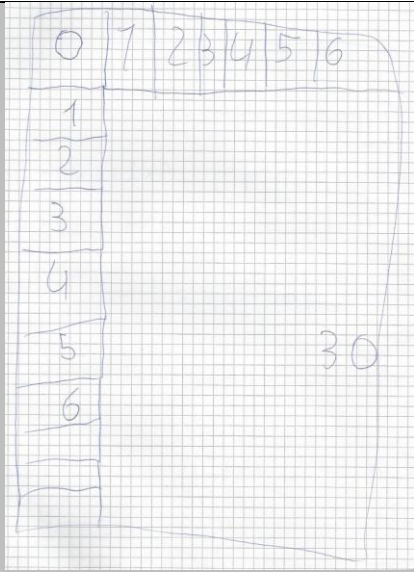
43	Così mi torna. Se lo provavi a fare in colonna è uguale, puoi scrivere sopra o l'11 o il 6, io di solito sono abituato a scrivere sopra il numero più lungo.	
44	Quindi undici	
45	Però è uguale. Perché se io faccio 6×11 o 11×6 , secondo te, cosa succede? Cambierebbe qualcosa? Che risultato avrà 11×6 ?	
46	Sessantasei	
47	Sei sicuro al 100%? Come fai a essere così sicuro? L'hai calcolato?	
48	No, però se scambi i numeri, poi li moltiplichi lo stesso per ognuno	Qui NicG sta dando una formulazione della proprietà commutativa [2] che però appare un po' confusa rispetto a quelle date dai suoi compagni
49	Che succede al risultato?	
50	Cioè non cambia	
51	Non cambia, ok, perfetto. A questo punto allora abbiamo fatto le moltiplicazioni. Adesso che dobbiamo fare per controllare se quello che ha scritto è giusto?	
52	Sei...sei e sei...tre più otto	Qui il bambino sembra star mettendo in evidenza la struttura dell'uguaglianza. In particolare la continua ripetizione del numero 6 sembra indicare che ha notato la ripetizione di quel fattore. La somma può indicare invece la relazione additiva fra i fattori non in comune
53	Aspetta un attimo. Lei ha scritto...	
54	No, non può essere 6×11 , perché se qui c'è il più deve essere anche $6+6$, sennò dovrebbe essere 12×11 .	L'interpretazione "simmetrica" sul ruolo dei fattori non era stata esclusa ancora da NicG che continua a riproporla.
55	Aspetta un attimo. Noi abbiamo calcolato questi risultati [indica il foglio su cui il bambino ha fatto i suoi conti] con questi risultati qui, per controllare se l'operazione che ha scritto è giusta, cosa ci possiamo fare? Ci possiamo far qualcosa? [segue silenzio] Lì c'è scritto sei per otto più sei per tre uguale sei per undici.	
56	Non torna	
57	Non ti torna, dimmi cosa c'è che non ti torna.	
58	Perché se deve fare con il più deve fare il più anche con il 6	Il bambino sta confrontando le scritture e non risultati, ed è probabilmente per questo che il richiamo ai risultati trovati (51) cade nel vuoto. Nel confronto tra scritture, NicG cerca una regola che rispetti la simmetria tra i diversi fattori: se sommo i secondi devo sommare anche i primi.
59	Ma secondo te, scrivere in quel modo lì, che cosa significa?	L'intervistatore cerca di far passare al livello dei significati
60	Moltiplic...cioè somma solo $l'8+3$	
61	Ma... è vero che quello che c'è scritto di qua [indica un membro dell'uguaglianza] è uguale a quello che c'è scritto di qua [indica l'altro]	L'intervistatore si sta riferendo ai risultati (livello significati), ma l'allievo interpreta "quello che c'è scritto" riferendosi alle scritture (livello sintattico). Si ha un conflitto (comognitivo, cfr sez 5.2.3) fra i due livelli dei discorsi.
62	Dovrebbe fare $8+3$ e $6+6$	Lo studente interpreta a livello sintattico e formula la sua regola.
63	Se io ti domandassi, il risultato [copre con un foglio il 6×11]	L'intervistatore cerca ancora di spostare

	soltanto di questa cosa qua quant'è?	l'attenzione al livello dei risultati
64	Dodici per undici	NicG resta al livello sintattico
65	Ok. Se invece ti chiedessi il risultato di questa cosa qua [sposta il foglio scoprendo solo l'altro membro] quale è ?	Int. prosegue livello risultati
66	Sessantasei	NicG si sposta livello risultati. Il conflitto si risolve nel momento in cui l'autorità dell'intervistatore viene riconosciuta dal bambino che accetta la domanda dell'intervistatore che fa esplicitamente riferimento al risultato.
67	Ok. Se il risultato di questa cosa qua [torna a coprire il 6×11 e scoprire l'altro membro] torna 12×11 , allora 12×11 quanto fa? Un numerone grosso	Int resta al livello risultati
68	Cen...toventi?	NicG segue
69	Più di 120, centoventi sarebbe 12×10 , no? Secondo te, $6 \times 8 + 6 \times 3$ fa più di 120?	
70	Centotrentuno	Il fatto che questo calcolo fosse difficile, spieherebbe come mai non poteva esserci un controllo immediato a livello risultati. L'immediatezza della relazione tra procedura e risultato sembra essere un elemento chiave per permettere la doppia lettura della scrittura $a \times b$ come rappresentante di una procedura e di un risultato.
71	Centotrentadue perché sarebbe 12. Secondo te, $6 \times 8 + 6 \times 3$ fa 132	
72	Basta fare $48 + 18$ [nel dirlo indica i risultati scritti prima sul foglio]	Qui NicG dimostra di interpretare correttamente l'espressione come somma di prodotti [6][7], l'interpretazione dell'uguaglianza è invece guidata dall'intervistatore in termini di confronto fra i due risultati invece che fra scritture.
73	Proviamo a farlo, vediamo quanto ci viene.	
74	Otto più otto fa 16, metto 6 e porto 1 [lo scrive] Viene 66	
75	[a questo punto scopre nuovamente il 6×11] ok.	
76	Ah! È giusto questo [indica il 6×11 sulla stampa]	NicG, ritratta l'interpretazione "simmetrica" a favore della proprietà distributiva. In questo momento il bambino ha avuto l'opportunità di mettere in relazione le due interpretazioni (a livello semantico e a livello sintattico) e di metterle in relazione. Questo sembra portarlo a riconsiderare la propria posizione.
77	Perché è giusto?	
78	Perché 6×11 fa 66 e 48 più 18 fa 66	Qui NicG esplicita di star interpretando l'uguale come confronto fra i risultati [1]
79	Quindi ha scritto una cosa giusta? [NicG annuisce] Ok. Prendiamo il secondo bambino invece.	
80	Anche lui è giusto perché 4×7 è uguale a 7×4 perché il risultato	Qui NicG esplicita la proprietà

	non cambia	commutativa in forma di teorema in atto [3]
81	Perché praticamente lì che cosa ha scritto? Ha scritto due operazioni uguali?	
82	Sì	
83	Proprio uguali, uguali, uguali?	
84	Sì, solo che ha scambiato [fa un gesto dondolando la punta della penna da destra a sinistra e viceversa] i numeri, le cifre.	La risposta è “sì” quindi per NicG scambiando l’ordine delle operazioni si ha “la stessa” operazione. Si tratta di un processo di stessizzazione
85	Ha scambiato le cifre, è vero. Però te dici che il risultato rimane uguale? [NicG annuisce] Ok. Ti faccio vedere altri simili al primo. Anzi no! Prima di farti vedere quelli vorrei farti vedere un’altra cosa. Perché, forse non te lo ricordi, ma tanto tempo fa io ve l’avevo già fatta vedere un’immagine come quella [mostra il foglio] Questo foglio qui l’hai scritto te. Ti avevo chiesto di scrivere se le cose scritte dai bambini erano giuste o non erano giuste. Te avevi scritto <<no, perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ non fanno 6×11 >> Sei ancora d’accordo con quello che avevi scritto? [NicG fa cenno di no] Come risponderesti adesso?	
86	Sì perché 6×8 e 6×3 ...cioè 6×8 fa 48 e 6×3 fa 18 e se fai $48 + 18$ ti torna 66 e 6×11 torna 66.	Qui NicG esplicita di star interpretando l’uguale come confronto fra i risultati [1]
87	Ok. Quest’altro [indica la risposta alla domanda sulla proprietà commutativa] è come avevi risposto per quell’altro.	
88	E canno!	
89	Mi sa che volevi scrivere “c’hanno”	
90	Sì	
91	Com’è che si scrive c’hanno?	
92	Ci hanno	
93	Cos’è che manca?	
94	La i	
95	No, manca un apostrofo e manca una h perché questo è “hanno”, verbo avere. Qui manca una h... comunque...	
96	Lo stesso risultato...	
97	Sei ancora d’accordo con quello che avevi scritto? [NicG annuisce] Ok. Su questo siamo d’accordo.	
98	Ma poi non ce n’era un altro? Perché qui [indica la domanda successiva nel test a lungo termine che gli viene mostrato] c’è scritto...	
99	Ce n’era un altro nell’immagine dell’altra volta [gliela mostra] c’era uno lì di fianco	
100	Qui l’hai tagliato? [indicando la nuova immagine]	
101	Sì, sennò vi prendevo troppo tempo. Allora: va bene, questo lo abbiamo discusso. Ti volevo far vedere che ne avevo provate a scrivere anche altre. Vediamole una alla volta [mostra la prima] questa qua, secondo te è giusta?	
102	[breve silenzio] Sì	
103	Come hai fatto a controllare?	
104	Perché ho calcolato come in quest’altra [indica il foglio con scritti i calcoli] perché ho fatto $6 + 2$ che fa 4... no! Cioè ho fatto $2 + 4$ che fa 6, però poi ho provato a fare 5×2 e... che fa 10, più 5×4 che fa 20, ho fatto 30 e 5×6 fa 30.	Qui NicG esplicita l’uso della proprietà distributiva [2], stavolta la usa correttamente senza avere dubbi, inoltre fa anche il controllo sui risultati [1]
105	Hai controllato due cose [NicG annuisce] Ma se io invece te ne scrivo una così: metti... [scrive $5 \times 2 + 6 \times 6 = 5 \times 8$] secondo te questa è giusta?	
106	[qualche istante di silenzio, le labbra del bambino si muovono come se stesse facendo dei calcoli] No.	

107	Che controllo hai fatto?	
108	Perché 10, cinque per due fa 10 [indica l'operazione scritta da R] e 36 fa 46. Non fa 40, sicché non è giusta	
109	Però vedi, se tu fai il controllo che avevi fatto prima, se tu fai $2+6$ fa 8.	
110	Sì, però se il risultato di un altro non torna, non può tornare neanche questo.	
111	Ma questo controllo qui, di controllare se questo [indica il 2 nell'ultima espressione scritta] più questo [indica il 6 nel prodotto successivo] fa questo [indica l'8] si può fare sempre quindi?	
112	No	
113	Quand'è che si può fare?	
114	Quando il risultato di questo [indica il primo prodotto] e di questo [indica il secondo prodotto] insieme fanno il risultato di questo [indica l'ultimo prodotto]	Qui NicG piuttosto che dare la risposta attesa dal R (che forse desiderava che il bambino notasse la presenza di un fattore in comune) sembra esplicitare una gerarchia dei controlli: il controllo sui risultati viene prima della proprietà distributiva. Del resto i bambini non hanno a disposizione una formulazione "a parole" della proprietà distributiva e quindi si può ipotizzare che questo non abbia generato un controllo sulla struttura sintattica nel suo complesso. Diverso il caso della proprietà commutativa in cui la relazione fra le due espressioni ai lati dell'uguale è facilmente esprimibile dal punto di vista sintattico.
115	Però senti, e se io invece ne scrivessi una così [scrive $5 \times 4 + 4 \times 3 = 8 \times 4$]	
116	Così questo non si può fare perché $4+3$ non fa 4 sicché questo non torna	Qui si nota che il bambino non considera la presenza di fattori in comune ma piuttosto valuta l'ordine con cui le cifre sono presentate: controlla che la somma delle seconde cifre sia uguale alla seconda cifra del prodotto oltre l'uguale. L'allievo riconosce le parti dell'espressione e alcune relazioni tra le parti dell'espressione stessa ma l'interpretazione non è corretta da un punto di vista semantico. Pertanto si può dire che il bambino dimostra un certo senso della struttura apparentemente "incompleto" perché il riconoscimento sintattico non è collegato al riconoscimento semantico dei significati assegnati alle parti.
117	Questo è sicuramente sbagliato?	
118	No, però...questo è sbagliato [indica il secondo prodotto presente in quest'ultima uguaglianza] perché se faccio questo più questo non fa questo [non si capisce se indichi i fattori o i prodotti]	Qui NicG afferma che è scorretta ma non si capisce se si riferisca al "fallimento" del suo controllo sui fattori oppure all'uguaglianza fra i risultati dei due membri
119	Proviamo?	
120	Cinque per quattro fa 20, quattro per tre fa 12, fa 32. E 8×4 fa 32. Sicché torna.	Il bambino dimostra di interpretare correttamente la struttura dell'espressione [6][7]
121	Sicché torna, però te prima mi hai detto che non tornava.	

122	Ho detto che non tornava questo [indica il secondo prodotto] perché se lo volevi fare questo più questo [sembra che indichi i secondi fattori nelle due moltiplicazioni a sinistra dell'uguale] non poteva tornare con questi due	
123	Ma com'è che alcune volte torna e alcune volte no?	
124	Perché se questo e questo [indica i primi due prodotti] il loro risultato insieme forma questo [indica il prodotto dopo l'uguale] è corretta perché ... Non lo so spiegare tanto bene. Perché se questo fa 32 e il loro [indica i due prodotti a sinistra dell'=] risultato viene 32, viene. Il risultato va bene.	Il controllo procedurale viene usato come vera garanzia.
125	Se sono uguali. Qui c'è l'uguale, quindi vuol dire che sono uguali.	
126	Sì	
127	Senti, se invece ti facessi vedere questa qua [mostra l'ultima uguaglianza] cosa ne pensi di quella?	
128	Due...quattro... cinque per quattro... fa 20 più cinque... cinque per tre fa 15. Venti e 15 fa 35. E 10 più 25 fa 35. Sì, sono uguali.	Dopo la serie di "contro-esempi" forniti dall'intervistatore, il bambino non si affida più al controllo sulla somma dei fattori ma passa ai risultati.
129	Funziona?	
130	Sì.	
131	Ok. Poi ti volevo chiedere un'altra cosa. Senti: ritorniamo un attimo su questa [copre l'ultima uguaglianza e scopre la prima] se io... ti ricordi che l'anno scorso abbiamo usato tante volte la tabella con dentro tutte le mattonelle, no? Ecco, se io volessi far usare a un bambino la tabella, per capire che quella lì è giusta... come potrei dirgli di fare?	
132	Posso scrivere?	
133	Sì	
134	Qui fai la tabella [disegna un grande quadrato] non la ricordo tanto bene	
135	Dimmi quello che ti ricordi	
136	Qui c'è uno [disegna una prima casella, molto grande, nell'angolo in alto a sinistra] due [ne disegna un'altra, uguale, sotto] tre [continua allo stesso modo fino ad arrivare alla fine del foglio, fa 9 caselle] c'era anche il dieci... aspetta... non mi ricordo.	
137	Va be', tanto adesso son tutti numeri più piccolini. Poi?	
138	Poi ... [scrive dentro a ciascuna casella un numero da 1 a 9] e qui c'era un due [tira una lunga linea orizzontale formando così la prima riga. Comincia a inserire altre caselle nella riga e scrive dentro i numeri] se io volessi... se devo fare 5×6 devo fare questo [indica la quinta casella della prima colonna] per questo [indica la sesta casella della prima riga]	
139	E quindi cosa vado a vedere?	

140	Se io vado a vedere 5×6 devo mettere il risultato qui [indica un punto nello spazio bianco in quello che potrebbe essere l'incontro fra la quinta riga e la sesta colonna] nella casella e si fa cinque per sei fa... [segue breve silenzio] cinque per sei fa 30	 Anche lui si riferisce alla tavola pitagorica “condensata”. Lo mostra il fatto che le caselle hanno tutte la stessa dimensione
141	Come hai fatto a capire che 5×6 fa 30?	
142	Perché ho fatto 5×1 , $5 \dots 5 \times 2$.. [fa un gesto con la mano come per dire “e così via”]	Si tratta di una routine che assomiglia alla A, ma non vengono elencati solo i risultati ma anche i prodotti a cui i risultati enunciati corrispondono
143	Ti sei fatto la tabellina?	
144	Sì	
145	Ho capito.	
146	Qui fa 30 e scrivo il 30. Sicché se il bambino vuole scoprire quanto è e se poi non se la ricorda deve fare la tabellina	In questo momento, la tabella non è uno strumento per trovare i risultati, ma è una struttura vuota da riempire.
147	Senti io poi avevo pensato di provare a scriverglielo in questo modo qua [mostra la prima immagine] per spiegargli che quella cosa lì [indica l'espressione] era vera. Perché pensavo a quando noi abbiamo ritagliato i cartoncini	
148	Ah è vero	
149	Secondo te potrebbe funzionare?	
150	Sì. Perché questo grande [indica il rettangolo 5×6] fa 30. Questo [indica il 5×4] fa 20... ma non è... sì... aspetta! [breve silenzio] Perché questo fa 10 [indica il 5×2] questo fa 20 [indica il 5×4] e se li unisci [fa un gesto come se volesse avvicinare un rettangolo all'altro] fa 30.	Quando dice “unisci” potrebbe riferirsi all'operazione di addizione ma il gesto richiama l'attività con l'artefatto
151	E come fa lui a capire che fanno 30, 20 e 10?	
152	Perché quando noi s'era fatto quello [indica il rettangolo 5×6] c'erano 30 mattonelle qui dentro	
153	Aspetta, spiegami, qui c'è 5×6 [indica il prodotto scritto nel rettangolo] per scoprire che fa 30 cosa fa?	
154	Se non ci fosse scritto dovrebbe contare i quadretti qui [indica la prima colonna di quadretti nel rettangolo] e qui [indica i quadretti della prima riga] per così. Così trova 5×6 e 5×6 fa 30	Riconosce il modello rettangolare della moltiplicazione almeno per quel che riguarda il fatto che le dimensioni del rettangolo rappresentano i fattori [1]
155	Eh, ma tu lo sai a memoria, se lui non lo sa a memoria come fa a scoprirlo guardando quello?	
156	Contando i quadretti	
157	Quali quadretti deve contare?	
158	Tutti quelli che intorno	
159	Cioè questi qua intorno? [percorre il perimetro del rettangolo]	

160	No, tutti quanti	
161	Anche quelli dentro quindi?	
162	Sì, perché i quadretti [fa un gesto circolare sopra al rettangolo] sono 30.	Qui riconosce anche che i quadretti contenuti nell'intero rettangolo rappresentano il risultato [1]
163	Ho capito. Quindi lui conta questi [indica il rettangolo 5×6] e ne trova 30. Conta questi [indica il 5×4] e sono venti quadretti, conta questi [indica 5×2] e sono 10. E quindi poi che cosa fa? Qui c'ha 20 e qui c'ha 10	
164	Li unisce insieme [avvicina le due mani fra loro]	Ancora una volta il gesto richiama l'incollaggio dei rettangoli
165	In che senso li unisce insieme?	
166	Cioè fa tipo... li somma e fa [indica il rettangolo 5×6] e poi gli torna 30	A parole però dice che "li somma", quindi viene messo in relazione il termine matematico con l'attività fatta con l'artefatto
167	Ok. E secondo te se scrivo questo [riferendosi al disegno] o scrivo quello [indica la scrittura simbolico-algebrica] è la stessa cosa?	
168	Sì	
169	Secondo te però qual è meglio che scriva?	
170	Questa [indica il disegno] perché gli torna meglio. Quella invece deve tutto ricontare	Forse "ricontare" sta per "calcolare"?
171	Senti, e se invece che scriverlo così lo scrivo così [mostra la seconda immagine] è la stessa cosa?	
172	Sì perché 5×4 più 5×2 torna lo stesso risultato di sempre, 5×6 sempre. Il risultato non cambia.	
173	Ho capito. E secondo te fra queste due qual è meglio che gli scriva?	
174	Questo [indica la seconda immagine] perché se bisogna farle gli torna meglio questa, bisogna fare 20+10 [quando nomina i numeri indica i corrispondenti rettangoli]	L'espressione "bisogna farle" sembra indicare la richiesta di calcolare le operazione. Anche lui sembra riconoscere come più familiare la struttura del tipo $A+B=C$
175	Però vanno bene tutt'e due?	
176	Sì	
177	Però secondo te questa [indica la seconda] si capisce meglio	
178	Sì perché è un po' difficile farlo all'incontrario	Tant'è che dice che l'altra struttura ($C=B+A$) è all'incontrario
179	Ho capito	
180	Fare 10 più 20, scriverlo di qua [fa un movimento della mano da destra verso sinistra]	
181	Ho capito	

NicG ha sia un'interpretazione procedurale del simbolo di uguaglianza (linee 78 e 86) sia una relazionale e passa da una all'altra (linea 104). Interpreta correttamente la struttura delle espressioni riconoscendo le operazioni in cui sono divise (linea 12) e svolgendo i calcoli nell'ordine corretto (linee 72 e 120). In sintesi, ci sono istanze di pensiero relazionale.

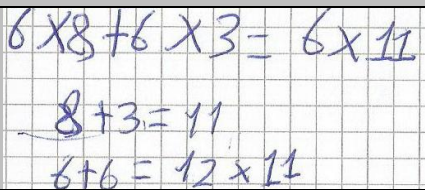
Tuttavia la comprensione della proprietà distributiva è scorretta: inizialmente il bambino ha dei dubbi sul fatto che vadano sommati anche i fattori in comune, richiamando una sorta di struttura "simmetrica" (linee 54-64) così come succede nei casi di Lor e Fra. Successivamente dimostra di basare l'applicazione della proprietà distributiva sulla posizione dei numeri (somma sempre il secondo fattore) e non sul fatto che si tratti di fattori in comune o non in comune fra i due prodotti che vengono sommati (linea 116). Probabilmente, nell'assenza di un

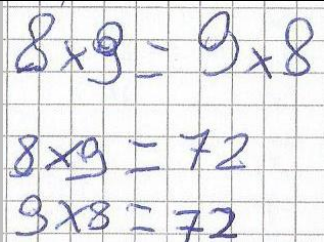
enunciato della proprietà distributiva (come invece si ha per la proprietà commutativa) il bambino ha difficoltà a coordinare gli aspetti sintattici con quelli semantici e quindi si affida prevalentemente ai primi.

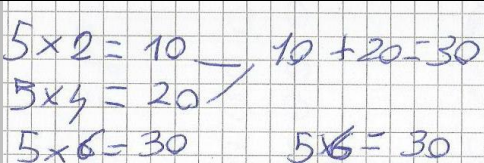
Per quel che riguarda la proprietà commutativa, la enuncia correttamente in due casi (linee 48 e 80). Riesce a gestire senza difficoltà il modello rettangolare (linee 154 e 162) della moltiplicazione ma presenta delle difficoltà col modello additivo (linee 23-42). In particolare, il bambino sembra avere memorizzato una procedura per il calcolo per i prodotti che coinvolgono il numero 11 della quale non è sicuro. Riesce a ricostruirla tornando al modello dell'addizione ripetuta. Questo mostra la fragilità di un processo di memorizzazione in cui non viene attribuito un significato alle procedure memorizzate.

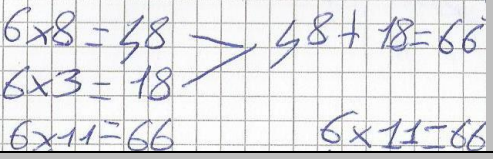
Intervista a Lor

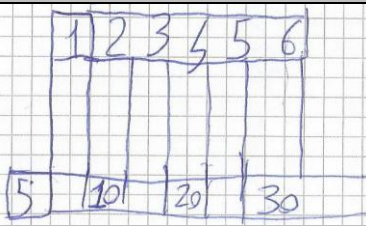
Lor ha commentato l'uguaglianza relativa alla proprietà distributiva del test a lungo termine dicendo "perché $6 \times 8 + 6 \times 3$ è come fare 6×11 ". Sembra quindi trattarsi di una risposta affermativa, tuttavia non giustificata. Il verbo "fare" utilizzato dal bambino sembra indicare che lui è in grado di vedere l'equivalenza fra due procedure. L'intervista è utile a chiarire se questa interpretazione sia corretta o meno.

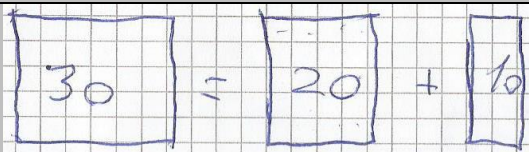
1	R: [mostra l'immagine] Questi sono dei bambini che stanno scrivendo delle cose alla lavagna. Mi diresti se secondo te quello che stanno scrivendo è giusto o sbagliato e perché?	
2	Lorenzo: Questa è sbagliata [indica l'uguaglianza relativa alla proprietà distributiva]	
3	Come mai?	
4	Perché qui c'è $6 \times 8 + 6 \times 3$ che è uguale a 6×11 , invece sarebbe uguale 12×11 perché non hanno contato il 6 e il 6.	Anche Lor, così come Fra, sembra cercare una simmetria nella struttura e ritiene che nel calcolo di una somma di prodotti, si possa calcolare il prodotto delle somme dei fattori presi a due a due.
5	E come si fa a controllarla questa cosa? Dimmi un po'	
6	Tipo se... dove lo faccio?	
7	Sul foglio, guarda il foglio lo puoi usare come credi.	
8	[riscrive l'uguaglianza] Faccio prima $8+3$ che fa 11 [lo scrive] poi $6+6$ [lo scrive] uguale a 12 [lo scrive]. Poi 12×11 [lo scrive]	
9	Senti... Mi spieghi perché si può fare in questo modo?	
10	In che senso?	
11	Nel senso... perché proprio $8+3$ e $6+6$?	
12	Perché questa [indica l'espressione sul foglio stampato] è... come si dice?	
13	Dimmelo a parole tue	
14	Questo [indica ancora il foglio stampato] combacia con questo qui [sembra indicare le ultime operazioni scritte sul foglio] e il 6 con il 6 [indica i due fattori 6 nella prima espressione dell'uguaglianza stampata sul foglio]	Lor rende evidente la simmetria che lui vede nelle diverse operazioni scritte. L'interpretazione tuttavia ha senso solo sul piano sintattico, come possibile trasformazione di un'espressione in un'altra. Non ha senso matematicamente perché non è coerente con l'interpretazione procedurale, ovvero non è coerente sul piano semantico.

15	Ho capito. Ci potrebbe essere un altro modo per controllare se è giusto o sbagliato? [segue lungo silenzio] Senti, e invece rispetto a quello che scrive l'altro bambino lì?	Il ricercatore insiste nel richiedere al bambino un controllo semantico, Lor però non sembra comprendere la richiesta del ricercatore e resta in silenzio. R pensa quindi di passare intanto all'altra uguaglianza.
16	Va bene [indica l'immagine]	
17	Quello sei sicuro che va bene?	
18	Sì.	
19	Come mai?	
20	Perché 4×7 e 7×4 è la stessa cosa.	Il bambino afferma subito che i due prodotti sono la stessa cosa anche se non è chiaro il riferimento al significato procedurale dato alle espressioni.
21	In che senso è la stessa cosa?	
22	Che cambiare le cifre, tipo il... come si chiama?	Anche in questo caso, così come nella linea 12, Lor sembra voler far ricorso a termini tecnici che però gli sfuggono. A giudicare dall'inizio della frase, stava enunciando la proprietà commutativa
23	Lasciali perdere i nomi	
24	Tipo se è 7×4 , va bene anche 7×4 . 4×7 e 7×4 è la stessa cosa perché il risultato è lo stesso.	Questa "stessità" viene qui spiegata in termini del risultato, quindi il bambino sembra spiegare il fatto di poter porre un uguale fra i due prodotti, ovvero la correttezza dell'operazione sintattica di scambio, facendo riferimento al fatto che i due prodotti hanno lo stesso risultato. L'uguale è qui interpretato rispetto al confronto di risultati [1]. Si noti però che il riferimento ai risultati non arriva immediatamente (come in alcune interviste precedenti) ma solo dopo l'insistenza dell'intervistatore.
25	Mi potresti fare un altro esempio? Con altri numeri, per esempio. Altre operazioni che sono lo stesso.	
26	Ma con questi numeri? [indica il foglio stampato]	
27	Anche con altri.	
28	[scrive $8 \times 9 = 9 \times 8$] è la stessa cosa perché, guarda, 8×9 è uguale a [mentre lo dice lo scrive] settantadue. Nove per otto è uguale a [silenzio, come se stesse facendo il conto] settantadue.	 L'aspetto interessante di questo punto è che il bambino scrive l'uguaglianza rapidamente ma poi verifica i calcoli con tempi e modi diversi proprio a dimostrare il fatto che in un caso sta calcolando 8×9 e nell'altro 9×8. Sembra quindi che Lor sia convinto dell'uguaglianza sin dall'inizio [3] (dato che la scrive) e che usi poi i calcoli per verificarla tramite i risultati [1].
29	Senti mi puoi spiegare: ora, quando stavi facendo 8×9 e 9×8 hai fatto dei calcoli a mente.	
30	Sì	
31	Mi spieghi che calcoli hai fatto?	
32	Qui [indica il foglio] per 8×9 ho fatto 8×10 , ottanta, e poi ho tolto 8.	
33	E per fare 9×8 invece?	

34	Ho fatto 9×9 che fa 81 e poi 81 meno 9.	Lor spiega chiaramente di aver applicato la routine D in senso sottrattivo. Nel secondo caso le sottrazioni sono due e infatti il tempo di calcolo mentale è stato più lungo.
35	Ah. Ho capito. Ok, va bene. Questo mi torna. Senti: se invece te ne facessi vedere altre? Per esempio [mostra il foglio delle uguaglianze lasciando scoperta solo la prima] di questa qua che cosa ne pensi?	
36	[breve silenzio] No.	
37	No... secondo te è sbagliata?	
38	Sì.	
39	E come dovrebbe essere per essere giusta?	
40	5×6 è uguale a... [silenzio, ha gli occhi puntati sulla stampa. Le labbra si muovono come se stesse dicendo le operazioni ma non fa suono] Ma va bene se tipo metto... il 5 lo divido in 3 e 2?	
41	Aspetta. Scrivilo un po' [indica il foglio]. Allora, te dici: ho 5×6 [Lor scrive $5 \times 6 =$] e poi che cosa vuoi fare? [Lor scrive $3 \times 2 + 2 \times$] Senti ma si potrebbero fare i calcoli delle moltiplicazioni per vedere se funziona?	 Anche in questo caso il bambino sembra scomporre entrambi i fattori. Appare evidente che questa "misconcezione" della proprietà distributiva è ben radicata. Inoltre, in questo caso la sta usando nel senso "inverso" rispetto a prima (qui si scompone, prima si sommavano due prodotti) il che dimostra una visione bidirezionale dell'uguaglianza
42	Eh?	
43	Cioè, per esempio, tu prima qui [indica la scritta $8 \times 9 = 9 \times 8$] mi hai detto che 8×9 è uguale a 9×8 perché fanno lo stesso risultato.	
44	Eh	
45	Potremmo controllare anche in questo caso se fanno lo stesso risultato? Per vedere se è giusto	Il ricercatore in questo momento richiede al bambino di fare un "passo indietro" passando dalla sola manipolazione sintattica a una visione più procedurale.
46	[Lor fa solo due segni sul foglio] sì, fanno lo stesso risultato perché 5×2 fa 10, più 5×4 fa 20, fa 30. 5×6 fa 30.	Qui Lor dimostra di interpretare correttamente la struttura dell'espressione [6][7]
47	Aspetta. Scrivilo, perché tu vai molto veloce però io sono un po' raffreddato oggi e ho un po' di difficoltà a seguirti.	
48	5×2 uguale 10 [lo scrive] poi: 5×4 è uguale a 20 [lo scrive] 5×6 è uguale a 30 [lo scrive]	
49	Ok	
50	Poi $10 + 20$ uguale a 30 [lo scrive] e 5×6 fa 30.	 In questa rappresentazione, come altre che ci sono state nel corso delle lezioni (e come altre documentate in letteratura) vengono utilizzate delle frecce per rappresentare la struttura. Il bambino dimostra di conoscere le convenzioni per l'ordine delle operazioni [6][7] e verifica l'uguaglianza [1].
51	Ah ok. Sì, sì, sì. Hai ragione. Mi torna perfettamente. E senti: questa cosa qui potremmo utilizzarla anche per quella di prima [indica la parte del foglio in cui è riportata la prima equivalenza discussa]	

52	Sì, però bisognerebbe vedere se il risultato è lo stesso.	
53	Ok, proviamo un po' a vedere.	
54	[scrive i calcoli sul foglio] Sì è giusta.	
55	Allora era giusta anche quella di prima. Mi avevi detto di no però prima. Cos'è che non andava forse prima? Abbiamo sbagliato a far qualcosa nel controllo forse.	Qui il ricercatore sta mettendo a confronto due discorsi nati con regole diverse: quello più procedurale emerso qui e quello prettamente sintattico di prima. C'è un conflitto.
56	Sì, perché non andava fatto 6+6 uguale 12 sennò qui verrebbe...	
57	Dodici per undici	
58	Dodici per undici che fa...	
59	Una bella moltiplicazione! È più di 12×10, quindi più di 120, è un numero parecchio grosso. Sarà cento...	
60	Trentadue	
61	Centotrentadue, sì è vero. Che è poi il doppio di 66 [indica il 66 che il bambino ha scritto sul foglio]. Proviamo a vederne un'altra, così ci risistemiamo [mostra la seconda uguaglianza] questa secondo te come va? Funziona o non funziona?	
62	No	
63	Come hai fatto a capire che non funziona?	
64	Perché 5×... perché qui fa 5×6 e lo smontaggio è 3 e 4 e invece dovrebbe essere 3 e 3.	La concezione di proprietà distributiva elaborata dal bambino era scorretta, ma ci ha mostrato che il bambino è pronto a lavorare in termini sintattici e infatti qui lo dimostra subito. Parla di "smontaggio" quando spiega come la proprietà distributiva può operare su 5×6. Sembra quindi che la proprietà distributiva (almeno in forma di teorema in atto[2][3]) si trovasse proprio nella zona di sviluppo prossimale di questo bambino che qui la apprende (o eventualmente la riapprende) e la impiega subito.
65	Perché 3 e 4 cosa verrebbe invece?	
66	Sette	
67	Quindi se noi facciamo tutto questo calcolo qui [passa l'indice introno a 5×3+5×4] che risultato ci dovrebbe venire alla fine?	
68	Trentacinque	
69	Perché tu hai fatto...che moltiplicazione?	
70	5×3... ah no. 5×7.	
71	Che fa 35, ok. E quindi questa è 15 [indica 5×3] e 20 [indica 5×4] fa 35. Ok. L'ultima per essere sicuri [la mostra] e se scrivo una cosa così funziona?	
72	Sì, perché...	
73	Come hai fatto a controllare?	
74	Perché il 4... perché se tipo il 3... allora: perché 2+5 fa 7 e anche 4+3. [mette la penna sul primo 5 dell'uguaglianza] 5 e 5 [sposta la punta sul secondo 5], 5 e 5 [indica i 5 oltre l'uguale].	Qui si ha la certezza del fatto che il bambino stia applicando la proprietà distributiva [2][3]. Di fatto, non solo mette in evidenza la somma dei fattori ma anche il fatto che tutti i prodotti debbano avere un fattore in comune. Questo viene fatto senza far ricorso ai risultati delle moltiplicazioni [1], è un'istanza di pensiero relazionale.

75	Ok. Perfetto. Ho capito perfettamente quello che intendevi. Così funziona. Senti ti vorrei fare una domanda però: te ti ricordi la tabella che usavamo noi l'anno scorso? Quella con tutte le mattonelle	
76	Sì	
77	Se noi volessimo usare quelle mattonelle lì per far vedere che una di queste, che ne so... la prima, per esempio, è giusta. Com'è che lo potremmo fare? Si possono usare quelle per far vedere che è giusta?	
78	Sì, facendo la tabellina del 5.	
79	Spiegami un po'	
80	Tipo, te fai tutta la tabella. Vai a guardare 5×3 quanto fa [il dito si muove sul banco come se si stesse muovendo lungo una riga della tavola pitagorica] tipo 5×3 [quando dice la prima cifra il dito si muove in verticale, poi in orizzontale] fa 15 [batte sul tavolo] e 5×4 [stessi movimento orizzontale/verticale] fa 20	I gesti sembrano suggerire ancora una volta il riferimento alla tavola pitagorica. La parola "tabella" richiama nella memoria quella più recentemente vista che è intesa dai bambini come contenitore dei risultati delle moltiplicazioni.
81	E poi metti insieme i risultati. Ma per vedere quanto fa, dov'è che lo vede nella tabella?	
82	Tipo [fa un disegno che sembra rappresentare una riga della tavola pitagorica] bho... [aggiunge un disegno che sembra rappresentare una colonna della tavola che interseca la riga]	
83	Ok. La tabella è fatta in questo modo [Lor comincia a scrivere i risultati completando la riga] arriviamo fino a... quant'era? Sei [lo dice in contemporanea anche il bambino]	
84	[aggiunge al disegno altre linee che rappresentano altre righe e colonne della tabella] Cinque per sei fa 30 [lo indica con la penna]	 Il disegno chiarisce il fatto che Lor si riferisca alla tavola pitagorica. Si noti che non tutte le caselle sono completate. Lor forse qui sfrutta il fatto che i multipli pari di 5 finiscono tutti con zero.
85	Quindi uno, per cercarlo, che cosa deve andare a controllare?	
86	Il cinque [passa con la penna sulla riga disegnata] e va a controllare il sei [muove la penna in verticale, dall'alto verso il basso, lungo la colonna]	
87	E poi lì ci trova il 30.	
88	E poi il 5 [scorre la riga] con il 2 [scorre la colonna] che si trova qui [mette la penna sulla casella] e fa 10 [lo scrive dentro la casella che era vuota.	
89	Ok. Poi per ultimo gli rimane il cinque per quattro	
90	Fa 20 [scrive il risultato nella tabella disegnata]	
91	Perfetto. Senti, se invece uno lo rappresentasse... noi l'anno scorso usavamo anche i rettangoli, no?	
92	Sì	
93	Se uno lo rappresentasse in questo modo qui [mostra solo il primo disegno, coprendo il secondo], secondo te è la stessa cosa?	
94	Sì	
95	Cos'è che hai controllato? Vedevo che contavi qualche cosa.	

96	Perché bastava contare i mattoni.	Lor qui usa la parola mattoni per riferirsi ai quadretti contenuti in ciascuna casella
97	Spiegami quali hai contato.	
98	Qui sono 4 [indica la prima fila di quadretti del 5×4] e qui 5 [indica la colonna] è 5×4 che va bene. Poi qui [indica il 5×2] ce n'è 2 moltiplicato per questo 5 [col dito percorre la prima colonna di quadretti] così	
99	Ok	
100	E qui [indica il 5×6] questi 5 [scorre con la penna in verticale] moltiplicati per questi 6 [scorre in orizzontale]	
101	Perfetto. E secondo te, scrivere questo [indica il disegno] o scrivere questo [indica l'espressione stampata] è la stessa cosa?	
102	Sì, soltanto che qui [indicando il disegno] fai i quadretti.	
103	Ok. E si può vedere anche da qui [indica il disegno] se è corretta l'uguaglianza? C'è un modo per controllare se è corretta?	
104	Sì	
105	E come si fa?	
106	Basta che conti i quadretti di questo [indica 5×6] che sono 30 [ridisegna sul foglio il rettangolo 5×6] Questi sono 30 [scrive il numero in cifre all'interno del rettangolo] poi [disegna il rettangolo 5×4] sono 20 [lo scrive] perché 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 [continua a contare in silenzio i quadretti, poi disegna l'ultimo rettangolo] Dieci.	 Qui Lor afferma esplicitamente che i quadretti contenuti rappresentano il risultato, ricostruisce quindi la rappresentazione sostituendo le moltiplicazioni con i loro risultati, come se fossero equivalenti [4]. Lor sembra aver assunto che i prodotti sono modi diversi per rappresentare i risultati e quindi gli uni sono intercambiabili (almeno in una direzione) con gli altri.
107	Ok e quindi poi uno che operazione fa alla fine? [Lor scrive 20+10=30] Ovviamente fa 30. Ok ho capito. E secondo te se lo disegno invece così [mostra l'altra immagine] è sempre la stessa storia?	
108	Sì	
109	Come faccio a spiegare che è la stessa cosa scrivere questo, questo o questo [indica prima le due immagini e poi l'espressione]	
110	Perché qui [indica l'ultima figura] prendi questo e questo insieme [sembra riferirsi ai due rettangoli più piccoli] e fanno 5×6 e qui invece [indica l'immagine precedente] lo smonti quello e poi qui [indica di nuovo la seconda immagine] lo rimonti.	Lor, nel leggere i due disegni, dà un'interpretazione simile a quella di Mir: in un senso si mettono insieme i rettangoli (raccolgimento a fattor comune) mentre nell'altro senso si "smonta" (prodotto per un binomio)
111	Ah, ho capito. Certo: da una parte lo smonto e da una parte lo rimetto.	

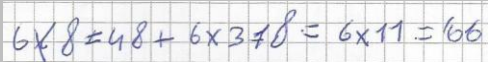
Il comportamento di Lor durante l'intervista cambia, come se l'intervista fosse per lui un momento di apprendimento. Di fatto inizialmente ritiene che il + fra due prodotti indichi che i fattori debbano essere sommati a due a due (linee 4-14 e 40-41); così come aveva fatto anche Fra prima. Successivamente, il confronto fra i risultati crea un conflitto (linee 54-60) a seguito del quale Lor inferisce (o re-inferisce) la struttura data dalla proprietà distributiva che poi applica in più di una situazione con successo (linee 64 e 74).

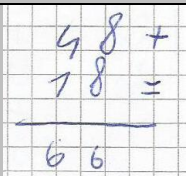
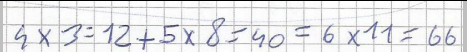
Sembra quindi che il conflitto generato dall'intervistatore abbia permesso a Lor di muoversi nella direzione della sua *zona di sviluppo prossimale* acquisendo il significato della proprietà distributiva che riesce a rappresentare sia simbolicamente sia verbalmente (con l'uso di parole come "smontare" e "rimontare", linea 64 e linea 110).

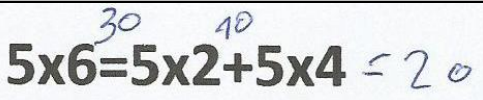
Il bambino mostra di usare il pensiero relazionale in modo piuttosto chiaro: confronta espressioni senza calcolare nessun risultato, lo fa applicando le proprietà delle operazioni e confrontando strutture simili (linee 24, 28, 64, 74).

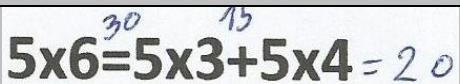
Intervista a Zen

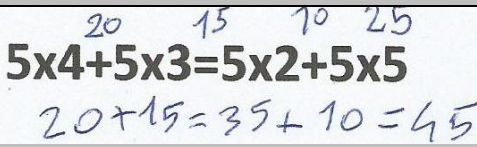
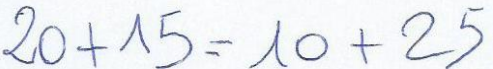
Zen è l'unico bambino che nel test a lungo termine sembra applicare la proprietà distributiva. Di fatto la sua risposta è "Perché $8+3$ fa 11" in cui appare esplicitata la relazione fra i fattori non in comune delle due moltiplicazioni. Tuttavia non viene fatto nessun riferimento ai fattori in comune, pertanto non è chiaro se il significato che il bambino dà all'uguaglianza sia corretto dal punto di vista matematico. Per esempio ci si può chiedere: cosa accadrebbe se dovesse valutare un'uguaglianza del tipo $5 \times 8 + 6 \times 3 = 6 \times 11$?

1	R: C'avevo questa figura che erano dei bambini che scrivevano delle cose alla lavagna. Secondo te, queste cose che stanno scrivendo questi bambini della figura, sono giuste? Sì, no, perché?	
2	Zeno: [osserva la figura in silenzio] Quarantotto... più sei per tre...	
3	Vuoi scrivertelo? [indica il foglio bianco di fronte al bambino]	
4	[comincia a scrivere. Mentre scrive fa dei conti sulle dita. La scrittura è di tipo procedurale, da sinistra verso destra]	  L'uso dell'uguale è di tipo procedurale, ciascun uguale indica che il numero successivo è il risultato dell'operazione che lo precede, tranne l'uguale che segue dopo il 18 che rappresenta l'uguale che si trova nell'uguaglianza originale. L'interpretazione dell'ordine con cui le operazioni dell'espressione devono essere svolte è tuttavia corretta, infatti vengono risolti prima i prodotti
5	[quando Zen smette di scrivere] Come hai fatto a fare questo conto?	
6	Ho fatto 6×8 faceva 48 [con le dita indica i calcoli sul foglio] più... sei per tre, diciotto; uguale 6×11 , sessantasei.	
7	E come hai fatto a capire che sei per undici faceva 66?	
8	Perché 6×10 fa 60 più... fa 60, però nella tabellina il numero iniziale è 6, quindi sessanta più sei fa 66.	Sta applicando la routine D
9	Hai ragione. Senti ma quindi quella cosa che hai scritto è vera o non è vera?	
10	Ehm...	
11	Cioè, è giusta o non è giusta?	

12	Non è giusta	
13	Come si fa a capire se è giusta oppure no?	
14	Perché qui [non indica niente, segue qualche secondo di silenzio] sei per otto fa 48 però...	
15	Sei per tre fa 18, hai scritto. Com'è che si fa a capire...	
16	Ah perché 48... Posso provare a fare una cosa?	
17	Tutte le cose che vuoi. Anch'io non sono molto sicuro, vediamo di capirlo insieme	
18	[intanto svolge il calcolo in colonna] Perché 48+18 fa 66.	 Sembra che Zen non fosse sicuro sin da subito su come interpretare il ruolo del simbolo di addizione nella scrittura, però continua a osservare la scrittura quasi come se stesse cercando possibili diverse interpretazioni e decide di testarne una, dice "posso provare a fare una cosa?"
19	Ok. Quindi che cosa hai fatto? Hai fatto l'addizione fra che cosa? Da dove uscivano quei due numeri?	
20	Fra i risultati [con i due indici indica le moltiplicazioni]	
21	E ti è tornato...	
22	Sessantasei	
23	Lì però c'è scritto 6×11 . È la stessa cosa?	
24	Sì	Qui il bambino afferma chiaramente che 66 e 6×11 sono la stessa cosa, si tratta quindi di un processo di stessizzazione fra moltiplicazione e suo risultato [4]
25	Perché abbiamo visto.. che cosa?	
26	Fa 66 [indica il prodotto]	
27	Ah l'abbiamo visto prima. 6×11 fa come risultato 66. Va bene, hai ragione. Funziona. Senti: io una cosa simile te l'avevo fatta vedere tanto tempo fa e tu mi avevi scritto... [prende il foglio] guarda: c'era questa immagine qua che praticamente è uguale a quella lì. Tu avevi scritto che era giusta perché $8+3$ fa 11. Mi spiegheresti che cosa volevi dire?	
28	Questo 8 [indica il fattore in 6×8 , poi indica il 3 in 6×3]	
29	E quel 3...	
30	Lo prendo e... otto più tre faceva 11 e 6×11 dava come risultato 66	Il bambino riconosce una relazione fra i fattori, chiaramente si riferisce ai fattori nelle moltiplicazioni dato che li indica
31	Senti, però se io ne scrivessi una diversa [prende il foglio e scrive] Questa sarebbe vera?	 R cerca di testare se il bambino sa che ci deve essere anche un primo fattore in comune
32	[riscrive le moltiplicazioni una a una e svolge i calcoli aiutandosi con le dita] No	 Zen non effettua il controllo che gli è stato richiesto ma calcola i risultati usando ancora una scrittura in cui l'uguale è di tipo procedurale. Interpreta correttamente l'ordine delle operazioni [4] e alla fine fa un confronto fra i risultati [1]
33	Ok. Perché qui i risultati non tornano. Però anche qui tre + otto fa 11 [man mano che nomina i numeri indica i fattori]	

	nei prodotti scritti] Quindi questa tua risposta [indica il test fatto l'anno precedente] andava bene, non andava bene o che ne so: possiamo... perché qui [indica l'immagine coi bambini alla lavagna] qui funzionava e qui [indica il foglio su cui Zen ha appena fatto i calcoli] no insomma?	
34	Perché... non lo so.	
35	Però perché hai dato quella risposta? Te lo ricordi? Se dovessi dirlo adesso, come risponderesti? La domanda era: quella bambina ha scritto una cosa corretta? Tu adesso cosa risponderesti? [segue breve silenzio] la bambina era questa qui [indica il disegno] la domanda era se quello che ha scritto lei è corretto: te ora cosa risponderesti? Sì o no?	
36	Sì	
37	E se dovesse spiegare perché?	
38	Ma sempre con $8+3$?	Zen sembra qui richiedere di non utilizzare più lo stesso "warrant" di prima, quasi come se non fosse più convinto della sua veridicità dopo che R gli ha mostrato un "controesempio"
39	O anche no. Cioè, se tu dovessi spiegarlo a qualcun altro se quella cosa lì è corretta, che cosa gli diresti?	
40	Perché $48 + 18$ [indica i numeri scritti sul foglio quando li nomina] fa 66 e sei per undici fa lo stesso risultato.	Qui Zen esplicita chiaramente il fatto che sta interpretando l'uguale scritto sulla stampa come confronto fra i risultati [1] . Apparentemente il conflitto presentato dall'intervistatore non ha fatto emergere l'importanza del fattore in comune ma ha fatto tornare il bambino su un'altra strategia di controllo che ha visto essere efficace
41	Ok. Mi sembra convincente come spiegazione. Proviamo a vederne altre simili? Vediamo se riusciamo a raccapezzarci. Vediamo... [mostra il foglio con scoperta solo la prima uguaglianza] questa qua per esempio. [Zen toglie il foglio che copre le altre] Parti dalla prima che quelle lì son più difficili.	
42	Cinque per sei... cosa...?	
43	La domanda è sempre quella: secondo te, chi ha scritto quella cosa, ha scritto una cosa giusta o una cosa sbagliata?	
44	[fa i calcoli aiutandosi con le dita] No, è sbagliata.	
45	Perché? Come dovrebbe essere?	
46	[controlla ancora i conti aiutandosi con le dita] cinque per due va bene. È 5×6 che non va bene.	
47	Come mai?	
48	Perché deve tornare 20.	
49	Aspetta. Chi deve tornare 20?	
50	Questo 5×4	
51	Sì, allora scriviamocelo almeno ce lo ricordiamo	
52	[scrive il risultato direttamente sul foglio stampato] 5×6 fa 30 più 5×2 fa 10 e $30+10$ fa 40. Non fa 20.	 Zen sembra ritenere che alla fine entrambi i membri dell'uguaglianza debbano fare 20, come se stesse interpretando questa scrittura come se avesse esattamente la stessa struttura di quella di prima, ovvero il più fra i primi due prodotti e il simbolo di uguaglianza prima dell'ultimo prodotto. Il

		bambino sembra rifarsi alla struttura prototipo $A+B=C$ e non riconosce la forma $C=A+B$. Sembra quindi che la difficoltà sia legata soprattutto al simbolo di uguaglianza che è ancora visto in modo procedurale
53	Ti faccio una domanda: dov'è che sta il + lì?	
54	Qui [indica il simbolo]	
55	E quindi chi è che va addizionato?	
56	Ah! $10+20$	Dopo che R focalizza l'attenzione del bambino, allora si rende conto dell'ordine con cui effettuare le operazioni
57	E quindi alla fine che cosa ci torna	
58	Trenta! [indica il numero con la penna]	
59	Va bene quindi?	
60	Sì	
61	Funziona?	
62	Sì	
63	Proviamo a guardare anche quella sotto allora.	
64	[inizia a fare i calcoli e scrive i risultati parziali sul foglio] È sbagliata	
65	È sbagliata? Quanto dovrebbe venire?	
66	Trenta	
67	Invece quanto viene?	
68	Trentaquattro	A parte l'errore di calcolo, qui Zen sta interpretando la scrittura correttamente [4] (in accordo a quanto fatto con quella precedente)
69	E allora che operaz... trentaquattro viene?	
70	[ricontrolla i calcoli a mente, stavolta non usa le dita] Trentacinque	
71	Mi sembra che quando li fai a mente fai meglio che a farli con le dita. Come hai fatto a vedere che veniva 35? Che hai fatto?	
72	Ho fatto $1+2$ [indica le decine nei due addendi da lui scritti] fa 3 e $5+0$ [indica prima una e poi l'altra cifra] fa 5.	Qui Zen dimostra di avere interiorizzato la struttura posizionale tanto da poterla usare per svolgere i calcoli a mente.
73	Doveva venire 35. Quindi lì non ci dovrebbe essere 5×6 , ma che cosa?	
74	Cinque per cinque [inizia a muovere le dita come se stesse facendo un calcolo]	Questa sembra essere un'interferenza nella memoria.
75	Non sono d'accordo. Secondo me 5×5 è più piccolo di 30	
76	Ah sì!	
77	Deve venire invece quanto?	
78	[un istante di silenzio] cinque per sette!	
79	Così mi torna, perché è più grande. E con 5×7 funzionerebbe?	
80	Sì	
81	Allora scriviamocelo così me lo ricordo, anche sopra, facciamo una correzione [Zen scrive il prodotto corretto a parte, non sulla stessa espressione] Senti guarda quella in fondo, come ti sembra? Chi ha scritto quella cosa lì, secondo te, ha scritto una cosa giusta?	
82	Cinque per quattro [fa il conto con le dita, ne alza 4] fa 20. 5×3 fa 15. 5×2 , 10 e cinque per cinque, venticinque	
83	Funziona?	
84	No	
85	No? Controlliamo: che calcolo bisogna fare per controllare?	

86	Venti più quindici [quando nomina i numeri li indica con la penna] fa 35.	
87	Ce lo scriviamo da qualche parte che così ce lo ricordiamo?	
88	[scrive il 35, poi prosegue con i calcoli] ... più 10 uguale 45 ma qui [indica l'ultimo prodotto] non viene 45.	 Zen torna a riutilizzare il simbolo di uguaglianza in modo procedurale, infatti scrive concatenazioni di uguaglianze
89	Però ti posso far notare una cosa: dov'è che stanno i più e dov'è che sta l'uguale?	
90	[indica il primo più e l'uguale] questo e questo.	
91	E poi?	
92	E quaggiù [indica il secondo +]	
93	Cosa vorranno dire? [segue silenzio] Guarda: se io lo scrivessi in questo modo qua [inizia a scrivere l'uguaglianza fra le somme dei soli risultati] Se scrivessi questa cosa qui, secondo te, è giusta o sbagliata?	
94	Settanta...	Anche di fronte all'espressione riscritta solo in termini di somme, Zen continua a interpretare il simbolo di uguaglianza in modo procedurale e somma tutti i numeri scritti insieme
95	Ok. Ti faccio vedere poi un'altra cosa. Se io voglio scrivere questa qua [copre nuovamente tutte le uguaglianze tranne la prima] ti ricordi che l'anno scorso abbiamo lavorato con la tabella, quella con tutte le mattonelle dentro. Se io volessi usare quella tabella lì, per far vedere a un bambino che questa cosa qui [indica la stampa] è giusta. C'hai qualche suggerimento su come potrei fare?	
96	Devi fare tutta la tabella, poi trovi i risultati di 5×6 [quando dice 5 muove la punta della penna in verticale, quando dice sei la muove in orizzontale] trenta. E tiene in mente 30. Poi guarda quanto fa 5×2 [muove di nuovo la penna come prima, il tratto del 5 è più lungo di quello del due] e fa 10. 10+30 fa 40, poi tiene a mente 40, poi 5×4 [usa le dita per richiamarlo] fa 20+40 fa 60	Quando parla della tabella, sembra parli della tavola pitagorica perché cerca i risultati come incroci di righe e colonne [lo si intuisce dai gesti] e non fa riferimento ai quadretti. Quando deve discutere l'uguaglianza che aveva già calcolato prima (correttamente) torna a rifare i calcoli in modo del tutto procedurale
97	Ok. Però io avevo pensato di fargli un disegno in questo modo [mostra il disegno] come i cartoncini ritagliati, ricordi che l'anno scorso a volte ritagliavamo i cartoncini. Secondo te potrebbe funzionare? Cioè scrivere questi [indica l'espressione simbolica] o scrivere questo [puntando il disegno] è la stessa cosa?	
98	Sì	
99	E come faccio a convincerlo che è la stessa cosa?	
100	Perché sono messi in modo diverso, però sono sempre gli stessi.	
101	E secondo te con questo [indica il disegno] si può convincere che quella scrittura lì è giusta? Cioè per spiegargli che questa cosa scritta qui [indica l'uguaglianza in simboli] è corretta, io vorrei fargliela vedere così [indica il disegno] Secondo te si capisce qui?	
102	Sì, 5×2 fa 10, 5×4 [alza le dita] trenta e 5×6 [alza sei dita] sessanta. Questa [indica il 5×4] avevo detto 30?	
103	Sì	
104	[indicando il 5×6] sessanta! Perché 3+3 fa 6, aggiungo uno	Zen sembra continuare nell'interpretazione

	zero ai due tre e viene 30. 30+30 fa 60.	del tipo "somma tutto" già presente nelle linee 93-94
105	Ok, però senti: lì dov'è che stava il più e dov'è che stava l'uguale?	Ancora una volta l'intervistatore richiama l'attenzione del bambino sui diversi simboli per forzarlo a interpretarli diversamente
106	Qui [indica il più] e qui [indica l'uguale]	
107	Quindi cos'è che bisogna controllare per vedere se la cosa scritta è giusta? [segue silenzio] Tu hai fatto questo [indica un rettangolo] l'hai calcolato, poi ci hai aggiunto questo [indica l'altro rettangolo] e poi ci hai aggiunto anche questo [indica il terzo]. Però qui in mezzo c'era un uguale. Che vuol dire quell'uguale?	
108	Prima di passare al risultato di questa operazione [non si capisce bene quale indichi] devo fare il risultato di questa	
109	E poi?	
110	Poi quando c'ho il risultato, trovo il risultato di questo, 30+10 fa 40... più 20... 20+40 fa 60	Nonostante la richiesta dell'intervistatore, Zen non focalizza sulla struttura dell'espressione, o più probabilmente non interpreta il simbolo di uguaglianza come previsto.
111	Ok. Senti, se invece lo scrivessi in quest'altro modo [mostra l'altra parte dell'immagine] secondo te funzionerebbe lo stesso?	
112	Sì	
113	Funziona lo stesso? Ok. E secondo te questo o questo [indica prima l'uno e poi l'altro] è la stessa cosa? Quale preferiresti te?	
114	In che senso?	
115	Nel senso... secondo te ce n'è uno dei due che capisci meglio?	
116	No	
117	No, sono uguali? Ok.	

Zen rivela una visione dell'uguale decisamente procedurale (linee 32, 52, 64, 88). Solo con l'insistenza dell'intervistatore va a confrontare i risultati dei due membri (linee 53-66) e anche dopo questa insistenza torna al comportamento precedente, ovvero sommare tutti i numeri coinvolti (linee 93, 94, 104).

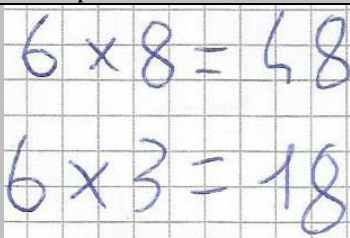
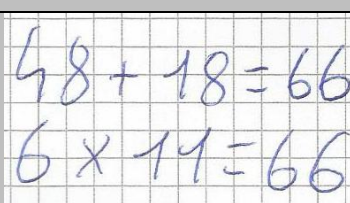
Solo in pochi casi l'uguale viene interpretato come confronto fra i risultati (linea 40). Il bambino dimostra di comprendere che le operazioni di moltiplicazione hanno precedenza rispetto alle altre (linee 32, 52, 64, 88) ma non riesce a interpretare i simboli in modo da metterle in relazione così come ci si aspetterebbe (linea 93).

Zen, in questa intervista, non mostra di aver impiegato pensiero relazionale.

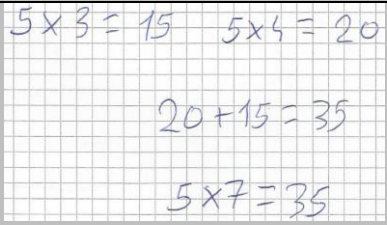
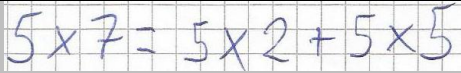
Intervista a Sim

Sim fornisce una risposta particolarmente interessante nel commentare l'uguaglianza relativa alla proprietà commutativa che viene proposta nel test a lungo termine. Di fatto lui dice che si tratta di "due operazioni uguali". Sembra quindi che per questo bambino 7×4 e 4×7 rappresentino lo stesso oggetto matematico. L'intervista viene effettuata anche per approfondire questo aspetto.

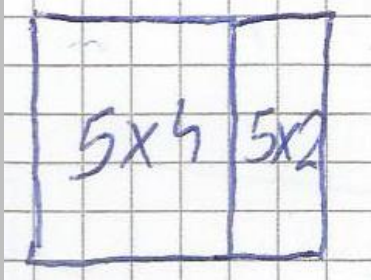
1	R: Io qui c'ho un disegno di due bambino che scrivono delle cose alla lavagna. Secondo te, le cose che stanno scrivendo	

	questi due bambini disegnati, sono giuste?	
2	Sim: Questo sì [indica subito l'uguaglianza relativa alla proprietà commutativa] Questo no [indica l'altra]	
3	Spiegami perché. Partiamo da uno dei due.	
4	Perché... cominciamo da questa [quella sulla proprietà commutativa] è fatto bene perché 4×7 fa 28 e 7×4 è uguale solo che si scambiano le cifre [da un gesto scambiando la posizione delle due mani]	
5	In che senso 7×4 è uguale?	
6	Cioè 4×7 è uguale a 7×4	
7	Ok. E come si fa a saperlo?	
8	Perché fanno tutti e due lo stesso risultato e hanno due cifre uguali solo scambiate di posto	Qui Sim sta enunciando la proprietà commutativa [2]. Non si tratta di un teorema in atto perché non fa riferimento ai numeri, ha un carattere più generale
9	Ho capito. Ok, certo. Mi torna. Mentre in quell'altro cosa c'è che non va?	
10	Perché lui sta cercando di fare un'addizione fra queste due [indica i prodotti]. $8+3$ ha fatto bene, undici. Ma il 6 e il 6 no.	Qui Sim sembra ripetere lo stesso tipo di generalizzazione che veniva fatto da Lor, NicG e Fra, ovvero: $a \times b + a \times c = (a+a) \times (b+c)$
11	Senti ma secondo te, si potrebbero calcolare i risultati per vedere se ha fatto bene?	
12	Sì [prende il foglio bianco] No, aspetta... [guarda il foglio, resta in silenzio]	
13	Lì ci sono delle moltiplicazioni scritte, è c'è anche il simbolo di addizione. Si potrebbero calcolare queste operazioni, fare dei calcoli per vedere se i risultati tornano.	Qui R sta dando un suggerimento su come interpretare la struttura dell'espressione anche se molto vago
14	Sei per otto [scrive la singola moltiplicazione] è 48 [scrive il simbolo di uguaglianza seguito dal risultato]. E il 6×3 fa 18 [scrive anche questo]	
15	Ok	
16	Quarantotto più diciotto [lo scrive poco più a destra, a metà altezza fra le altre due operazioni] uguale 66. Allora ci deve tornare 66.	Qui Sim esplicita il modo in cui lui interpreta l'uguale scritto sulla stampa, dicendo "ci deve tornare" dice chiaramente che le due operazioni devono avere lo stesso risultato [1]
17	Ok. Controlliamo.	
18	[scrive $6 \times 11 = 66$] Allora torna.	
19	Torna	
20	[annuisce] Perché 6×10 fa 60, è facile farlo. Poi gli manca un altro 6 e fa 66.	Qui riferisce di aver usato la routine D per calcolare il prodotto
21	E fa 66. Allora torna. Ha fatto bene quindi?	
22	Sì	
23	Guarda: in realtà, io vi avevo già fatto vedere un po' di tempo fa una cosa simile. Non simile, proprio uguale [gli mostra il foglio] e tu mi avevi dato delle risposte. Per questa qua [indica quella sulla proprietà commutativa] avevi scritto così [indica il foglio]	
24	Quale?	

25	Questa qui [indica ancora la stessa uguaglianza]	
26	Non avevo scritto sì o no	Qui Sim sta notando che la domanda richiedeva di rispondere “sì” o “no” mentre lui ha fornito la giustificazione senza specificare quale fosse la risposta scelta
27	Immagino che volessi dire sì. O no? Dimmi te, volevi dire sì qui?	
28	Sì	
29	Qui hai scritto: <<perché ha scritto due operazioni uguali 4×7 è uguale a 7×4 è giusta>>. Se lo dovessi dire oggi, lo ridiresti allo stesso modo?	
30	No	
31	Come diresti oggi?	
32	Direi perché le cifre son sempre le stesse però si scambiano di posto [fa un gesto col dito, una sorta di rotazione nell’aria] però il risultato è lo stesso.	Ancora una volta dà una formulazione generale della proprietà commutativa [2], tuttavia è una visione “procedurale” perché parla di scambiare di posto come se venisse eseguita un’azione sulla moltiplicazione. Pertanto Sim sta parlando sempre di una procedura il cui oggetto però è un’operazione e non un numero.
33	Mi sembra effettivamente che così sia più dettagliata. Mentre per quell’altra avevi scritto così [gli indica il foglio con su scritta la risposta] ed era questa qui [indica quella sulla proprietà distributiva nel disegno], la seconda.	La risposta che Sim aveva dato era: “Perché ha fatto $8 \times 6 = 48$ mentre $6 \times 3 = 18$ $48 + 18 = 66$ e $6 \times 11 = 66$ sicché ha fatto una cosa giusta”
34	Eh sì, avevo scritto giusto.	
35	Ok. Quindi sei d’accordo con quello che avevi scritto? Però manca l’accento su sicché [il bambino corregge la vecchia scrittura] così è perfetta.	
36	Quasi non sapevo scrivere!	
37	Però adesso sì. Ok quindi dai, voglio dire, sei rimasto della stessa opinione. Era giusta prima ed è giusta adesso. Senti però proviamo a vederne altre? Perché mica ho avuto solo quella sai, me ne son trovate anche altre. Vediamole una alla volta [mostra il foglio lasciando scoperta solo la prima uguaglianza] Questa qua, secondo te? Che te ne pare?	
38	È giusta	
39	Come fai a essere così sicuro? Perché tu sei velocissimo ma non capisco se tu lo vedi, c’hai un trucchetto. Come fai a farlo così veloce?	
40	Cinque per sei, trenta. Cinque per due, dieci. Cinque per quattro, venti e venti più dieci, trenta.	Qui il bambino rivela di interpretare correttamente anche la struttura di questa espressione [6][7], nonostante la struttura dei due membri dell’uguaglianza sia “invertita” rispetto al caso analizzato prima
41	Quindi avevi controllato i risultati?	
42	Sì, perché avevo controllato anche che $4 + 2$ fa 6. In quella di prima, io pensavo fosse sbagliata perché si doveva addizionare anche questo [indica il primo fattore in uno dei prodotti scritti precedentemente] e invece no. Sicché ho controllato anche qui [indica l’uguaglianza sulla stampa]	Qui Sim sembra aver preso consapevolezza del fatto che il controllo è solo sui fattori non in comune. Sta quindi confrontando i due membri dell’uguaglianza senza passare dai risultati [3], il che è confermato dal fatto che il tempo di risposta è stato molto breve. Si tratta di un’istanza di pensiero relazionale
43	Ah ho capito. Ridimmi un attimo però: quindi, in questo caso qui qual è l’addizione che hai controllato?	
44	Quattro più due	

45	Senti ma allora se ti faccio vedere questa [mostra la seconda], questa è giusta o sbagliata?	
46	Sbagliata [risponde immediatamente]	
47	E come hai fatto? Che controllo hai fatto?	
48	Se qui era 2 e qui 3 [indica prima l'uguaglianza precedente, poi quella appena mostrata] se qui era giusto, qui è sbagliato.	Sim fa un confronto fra le due uguaglianze [5]
49	Ok. E quindi questo [indica l'espressione nella seconda uguaglianza] avrà un risultato più grande o più piccolo?	
50	Più grande	
51	Ok. E senti: quella cosa che mi dicevi prima, avevi detto 2+4, qua vale per controllare se è giusto?	
52	Sì, 4+3, sette e qui [indica l'altro membro dell'uguaglianza] ci dovrà essere 7.	Sim afferma con sicurezza quale dovrà essere il numero da sostituire e non lo fa passando per i risultati ma usando la proprietà distributiva [3][8][9] (in forma di teorema in atto)
53	Quindi se io ci metto 7 questa diventa giusta?	
54	No perché diventa 35, questa era 30	
55	Ma questa qui [indica la seconda uguaglianza] se io la riscrivo da capo e al posto di sei ci metto 7	
56	È giusta	
57	Proviamo a scriverla? Cioè sarebbe 5×7 ...	
58	Aspetta. Cinque per 3 [scrive il singolo prodotto] uguale 15. Poi $5 \times 4 = 20$ [lo scrive]. Venti più quindici uguale 35 [scrive anche questo, nella riga sotto] Trentacinque e... 5×7 fa 35 [lo scrive]. Quindi andrebbe bene.	 Sim dimostra comunque di riuscire a passare da un tipo di interpretazione dell'uguale all'altra, infatti riesce anche a verificare l'equivalenza dei risultati delle operazioni ai due membri. [1] Una possibile interpretazione di questo intervento è che Sim comunque non fosse così tanto sicuro del fatto che la sostituzione del 6 con un 7 rendesse vera l'uguaglianza e abbia quindi voluto svolgere i calcoli per assicurarsene
59	Ah ok. Perfetto. Senti, se invece prendessi questa scritta così [mostra la terza uguaglianza].	
60	[qualche istante di silenzio] Va bene.	
61	Come fai a essere così sicuro?	
62	Perché 5×4 fa 20 più 5×3 che fa 15, venti più quindici fa 35. Poi 5×2 fa 10 e 5×5 fa 25. Dieci.. aspetta... dieci più 25 fa 35.	Sim interpreta correttamente la struttura delle espressioni [6][7]
63	Ed è lo stesso risultato. E qui si poteva fare quel controllo che dicevi prima? Quello dei numeri.	
64	No, perché qua... cioè qua c'è il 2 e qua c'è il 3.	
65	È difficile farlo quel controllo? Come dovrebbe essere per poterlo fare il controllo?	
66	Questo numero [non si capisce bene cosa indichi] dovrebbe essere tutto insieme	
67	Proviamo a fare un esempio? A scriverne una... per esempio, se io volessi tenere questo pezzo qua [indica l'espressione $5 \times 2 + 5 \times 5$] a cosa dovrei metterlo uguale?	
68	Era [inizia a scrivere]	 Sim riconosce la proprietà distributiva

		solo quando la struttura dell'uguaglianza prevede una sola operazione da un lato, forse fatica a pensare al simbolo di uguaglianza in senso transitivo o nell'espressione data non riesce a determinare quali siano i numeri da sommare
69	Tu come hai fatto a capire che poteva starci 5×7 lì?	
70	Perché $5+2$ fa 7 e questi due [indica i 5] come ho detto prima, devono rimanere uguali	Qui Sim esplicita la proprietà distributiva facendo notare che ci sono dei fattori che sono in comune [3]
71	E quelli devono rimanere, certo, hai ragione. Senti io stavo pensando una cosa però. Ti ricordi che noi l'anno scorso abbiamo usato tante volte la tabella, quella con tutte le mattonelle dentro. Se io volessi far capire a un bambino che questa qui [indica la prima delle uguaglianze] è corretta, e glielo volessi far capire utilizzando la tabella, come potrei fare? Ci potrebbe essere un modo?	
72	Sì	
73	Dammi un suggerimento	
74	Sinceramente la tabella che s'era fatta l'anno scorso non me la ricordo molto	
75	Allora guarda, io avevo pensato di fare una cosa di questo tipo [mostra la prima immagine] perché non so se te lo ricordi ma l'anno scorso alcune volte ritagliavamo dei cartoncini con i quadretti e poi li mettevamo insieme. Allora pensavo di fare una cosa così, in maniera che questi [indica i rettangoli disegnati] rappresentassero i cartoncini. Secondo te può funzionare questa cosa? Cioè, scrivere questo o scrivere questo [indica la scrittura simbolica e il disegno] è la stessa cosa?	
76	Sì, solo che qua capisci meglio perché c'è anche la dimostrazione	Qui Sim usa la parola dimostrazione che però non era mai stata introdotto in classe (per quanto noto). Potrebbe usarla nel senso comune del termine, ovvero come "mostrare" o "far vedere" ma forse anche come "spiegazione del perché"
77	In che senso la dimostrazione? Spiegami.	
78	Che qui capisci... [indica l'immagine] cioè... [segue un momento di silenzio] Non lo so.	
79	Secondo te, intanto, è meglio se gli faccio vedere questo o questo [indica nuovamente la scrittura simbolica e il disegno] di partenza? [segue breve silenzio] In qualche modo questo [indica il disegno] potrebbe aiutare a capire? Cos'è che potrebbero vedere qua che qui [indica le espressioni] non si riesce a vedere?	
80	I quadretti. Qua almeno possono capire il risultato senza stare... tipo se lo dai a un bambino di prima, qui comincia a contare.	Qui Sim mette in evidenza che il risultato, nel caso del modello rettangolare, è dato dal totale dei quadretti contenuti nel rettangolo [1]
81	Ma conta i quadretti per scoprire che cosa?	
82	I risultati.	
83	Ah ok. Ho capito. Quindi per esempio, lui conta questi e vede che sono 30 [indicando il rettangolo 5×6] conta questi e vede che sono 20 [passa all'altro rettangolo] conta questi e vede che sono 10. E poi cosa gli dico di fare? Per vedere che questa cosa è giusta...	
84	Di fare un'addizione.	Sim interpreta la struttura anche in questa diversa rappresentazione [1]
85	Ok, gli dico di fare l'addizione fra chi e chi?	

86	Fra questi due [indica i rettangoli più piccoli] e scoprire se fa il risultato come questo [indica l'altro] e tipo basta fare che questo pezzo [passa con la penna lungo la base del rettangolo 5×2] lo aggiungi a questo [scorre lungo la base di 5×4]	
87	In che senso?	
88	[guarda il foglio su cui ha scritto finora] qui c'è i quadretti...	
89	Va be', fallo come se i quadretti fossero rimpiccioliti.	L'intervistatore interpreta la frase del bambino come se si stesse lamentando del fatto che la dimensione dei quadretti del foglio è diversa rispetto a quella dei quadretti nell'immagine
90	[inizia a disegnare il rettangolo 5×4] Questo era il pezzo cinque per quattro [scrive il prodotto all'interno] e cinque per due lo aggiungo qua [disegna l'altro rettangolo affiancato e ci scrive dentro il prodotto] e cominci a contare che qui sono uno, due... tipo un bambino di prima comincia a contare tutto insieme e poi conta anche questi [indica la stampa del rettangolo 5×6] e controlla se va bene.	 Questo disegno richiama fortemente una delle tipologie di disegno che in classe hanno preceduto il tipo di rappresentazione che l'intervistatore sta mostrando al bambino. È come se Sim, durante questa intervista, stesse ripercorrendo la Catena Semiotica al contrario.
91	Vede che dentro ci sono gli stessi quadretti? Ok, va bene. E invece quel trucchetto che dicevi te, di fare 2+4 [indica i numeri nell'espressione scritta in simboli] si potrebbe vedere qui?	
92	Sì	
93	Come potrei fare a spiegargli quel trucchetto usando questi?	
94	Mmm... Bo! Non lo so.	
95	Va be', lascia stare. Invece ti volevo chiedere: secondo te, se glielo scrivo in quest'altro modo [mostra l'altra immagine] va bene lo stesso?	
96	Sì però così si capisce di più di così [indica prima la seconda immagine e poi la prima]	
97	Perché? Spiegami.	
98	Perché i bambini sono abituati a farle per così [fa un gesto con la mano, muovendola da sinistra verso destra] le operazioni e forse ci capiscono un po' di più	Qui Sim sembra esplicitare il modello prototipico di operazione come $A+B=C$ e quindi la lettura dell'uguale da sinistra verso destra (rappresentata anche con i gesti)
99	Però secondo te son giuste tutt'e due?	
100	Sì	
101	Però dici che questo [indica il secondo] si capisce meglio. Ho capito, grazie. Questo è un buon consiglio.	

In questa intervista ci sono più istanze di pensiero relazionale legate alla proprietà distributiva (linee 42 e 52) che però viene vista soprattutto come procedura di unione di due moltiplicazioni per formarne una terza, tant'è che nel caso dell'uguaglianza del tipo "prodotto+prodotto=prodotto+prodotto" Sim non applica più la proprietà ma comunque interpreta in modo corretto la struttura delle espressioni (linee 63-70).

Anche in questo caso viene presentata la visione “simmetrica” della proprietà distributiva (linea 10) ma Sim verifica rapidamente quale delle due interpretazioni è valida passando a una visione del simbolo di uguaglianza come confronto fra risultati (linee 13-18). Pertanto il bambino è anche in grado di “armonizzare” le diverse interpretazioni del simbolo.

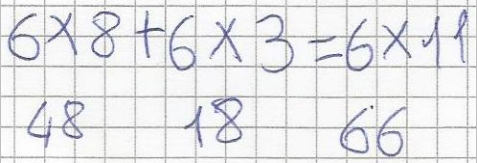
Per quel che riguarda la proprietà commutativa, viene enunciata più volte, anche in forma generale (linee 8 e 32).

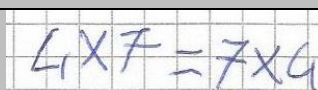
Intervista a SofB

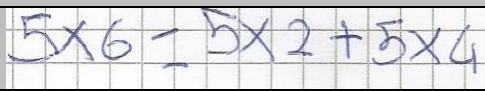
SofB ha una visione opposta rispetto a quella di Sim riguardo all’uguaglianza relativa alla proprietà commutativa. La bambina infatti afferma che si tratta di due moltiplicazioni diverse con gli stessi numeri. Sembra quindi che riconosca la proprietà commutativa ma non stessizzi le due operazioni.

La risposta che fornisce per la proprietà distributiva è di difficile interpretazione dato che parla di un numero di moltiplicazioni più alto di quelle che appaiono nella scrittura. Di fatto dice: “Perché ha fatto tre moltiplicazioni diverse e poi ha scritto = e poi ha fatto questa moltiplicazione (6×11)”. Non è chiaro quali siano le tre moltiplicazioni a cui si riferisce dato che dice “e poi ha fatto questa moltiplicazione” il che sembra aggiungere una quarta moltiplicazione a quelle già considerate.

1	R: È un disegno di due bambini che stanno scrivendo alla lavagna. Ti volevo chiedere: secondo te, le cose che stanno scrivendo questi bambini sono giuste?	
2	SofB: Ma... Aspetta [segue silenzio, SofB osserva l'immagine] Questo qui l'ha fatto al contrario [indica l'uguaglianza relativa alla proprietà commutativa]	
3	E secondo te è giusto scrivere in quel modo?	
4	No	
5	Perché no?	
6	Ma lo devono fare... lo devono mettere... [fa un gesto con la mano girandola in modo da scambiare la posizione dell'indice e del pollice nell'aria]	
7	Loro hanno scritto quelle cose. Secondo te, se uno scrive una cosa del genere, ha scritto una cosa che è giusta – che è vera – o ha scritto una cosa che è sbagliata? [segue lungo silenzio] Allora, scegliamone una delle due da cui partire. Quale ti piace di più? Scegliamone una, poi le discutiamo tutt'e due. Scegli da quale vuoi partire.	
8	Questa [indica quella relativa all proprietà distributiva]	
9	Quella lunga? Vai! Allora, come si fa a capire se quello che ha scritto quella bambina è giusto oppure no?	
10	Si potrebbe anche fare sei per...no.	
11	Possiamo fare qualche calcolo per scoprire se è corretto.	
12	Sì... forse.	
13	Dai, decidiamo quali calcoli ci serve fare	
14	Tipo si potrebbe fare 6×2 e 6×3	
15	Aspetta un attimo, leggiamo che c'è scritto lì intanto	
16	C'è scritto sei per otto più sei per tre uguale sei per undici	
17	Ok. Secondo te sarà vero che sei per otto più sei per tre è uguale a sei per undici? Proviamo a scoprirlo	
18	Ehm... in che senso scoprirlo?	Qui sembra che la bambina non abbia affatto chiaro il significato delle scritture o quantomeno non in riferimento alla

		richiesta che le viene fatta dall'intervistatore.
19	Cosa inizieresti a fare te? [segue silenzio] Qui ci sono tante operazioni nel mezzo, proviamo a farne qualcuna.	
20	Non si può fare tipo... sei e poi... [indica l'espressione]	
21	Non ho capito cosa vuoi dire.	
22	No, no... ehm...	
23	Allora: proviamo a riscrivercela intanto [indica il foglio bianco. SofB riscrive l'espressione sul foglio] Ok. Si vuol capire se questa cosa è giusta. Intanto da dove possiamo partire? Quale operazione ti viene voglia di fare per prima?	
24	Questa [sembra indicare 6×8]	
25	Vai! Allora facciamola!	
26	[comincia a toccarsi le dita di una mano usando l'altra, arrivata al terzo dito si ferma] oppure si può fare 6×3	Qui la bambina esplicita il fatto che all'interno dell'espressione lei vede due moltiplicazioni [6].
27	E quant'è?	
28	[continua a toccarsi le dita sussurrando qualcosa] Quaranta... aspetta no. [momento di silenzio] Quarantotto.	
29	Sei per otto	
30	Quarantotto	
31	Ce lo scriviamo da qualche parte? Così ce lo ricordiamo	
32	Lo metto sotto [scrive il risultato sotto il prodotto corrispondente]	
33	Per esempio. Poi che vorresti fare subito dopo?	
34	Questa [fa una specie di cerchietto con la punta della penna intorno al 6×3] Questa fa 18 [lo scrive sotto] e questa [indica col dito il 6×11 , breve momento di silenzio] va be' questa 66 [lo scrive]	
35	E a questo punto?	
36	Ehm... [con la punta della penna fa una specie di grosso cerchio intorno al 48 e al 18, sfiorando appena il foglio]	La bambina mostra, con i gesti e la scrittura, di interpretare correttamente le parti delle espressioni numeriche ai membri dell'uguaglianza [6]
37	Una volta fatte queste moltiplicazioni, possiamo dirlo se quello che ha scritto è corretto oppure no?	
38	Forse sì	
39	Forse sì? Come si fa?	
40	Ehm...	Sembra invece avere più difficoltà a comprendere cosa l'intervistatore intenda con "corretto" o "giusto"
41	Non ti preoccupare, spara le tue idee	
42	Non lo so...	
43	Che senso hanno quegli'altri simboli che ci sono fra le moltiplicazioni? [segue lungo silenzio] Ce la rileggiamo da capo? Rileggiamola tutta: cos'è che diceva questa scrittura?	
44	Questi qui [indica la seconda riga scritta da lei] sono i risultati delle operazioni	
45	Cioè delle moltiplicazioni	
46	Eh sì. Però è come se dici la stessa cosa, perché se... aspetta [continua a far scorrere la penna fra il 48 e il 18]	La bambina continua a mostrare attenzione ai due numeri, lo si evince dai suoi gesti. A parole parla di "la stessa cosa", forse riferendosi ai due membri dell'uguaglianza
47	Se ti serve di fare qualche calcolo, puoi farlo lì [indica una parte bianca sul foglio in cui SofB sta scrivendo] da un lato	

48	[dopo un lungo silenzio] è vero. se te fai 8+8 fa 16 e porto 1 [alza un pollice] e 4+1 fa 5 più uno, sei.	Qui esplicita la somma fra i risultati dei due prodotti [7]
49	Quindi è vero?	
50	Sì, è vero. È come dire, se fai queste operazioni [sottolinea col retro della penna l'espressione]	I lunghi momenti di pausa suggeriscono che SofB, piuttosto che avere chiara l'interpretazione della scrittura fin dall'inizio, ci abbia riflettuto e abbia re-interpretato nuovamente la scrittura (in modo corretto)
51	Quindi è vero? È una cosa giusta quella che ha scritto? Ok. [indica l'immagine] Passiamo a quella dell'altro bambino? Allora: scriviamocela.	
52	[la scrive] Fanno tutt'e due ventotto	 Qui esplicita di aver interpretato l'uguale come confronto fra i risultati [1]
53	Come fai a sapere che fanno tutt'e due ventotto?	
54	Perché ho scritto quattro per sette e sette per quattro hanno lo stesso risultato.	
55	Come mai hanno lo stesso risultato?	
56	Ma forse..	
57	Sì o no? Quattro per sette e sette per quattro hanno lo stesso risultato sì o no?	
58	Sì	
59	Perché hanno lo stesso risultato? Sono due moltiplicazioni diverse...	
60	Sì ma sono messi diversi però hanno gli stessi numeri	Qui la bambina sta esplicitando la proprietà commutativa (forse in forma di teorema in atto [3])
61	Il quattro e il sette	
62	Sì, hanno tutti e due il quattro e il sette anche se sono invertiti	
63	E il risultato com'è?	
64	Uguale!	
65	Quindi è vero quello che ha scritto quel bambino?	
66	Sì, è vero	
67	Allora senti: non so se tu te lo ricordi ma un bel po' di tempo fa io ve l'avevo già fatta fare una domanda così e tu avevi anche risposto	
68	Io? [R le mostra il foglio] Ah è vero!	
69	C'è il tuo nome, questa è la domanda e ci sono le tue risposte [SofB ride] Andiamo a vedere che cosa avevi risposto? Rispetto a quello di questo bambino avevi risposto così [le indica la scritta sul foglio del test] Sei ancora d'accordo con quello che avevi scritto? Sei ancora d'accordo?	
70	Aspetta...	
71	Puoi anche dire di sì se sei ancora d'accordo. Non succede mica niente.	
72	Questo qui [indica la risposta relativa alla proprietà distributiva]	
73	Dimmi di questo adesso [le indica di nuovo quella sulla proprietà commutativa]	
74	Sono d'accordo	
75	Sei d'accordo. Ha fatto due moltiplicazioni diverse [legge quello che lei aveva scritto] è vero che c'hanno gli stessi numeri. Però qui potresti specificare una cosa: perché il fatto che siano due moltiplicazioni diverse con gli stessi numeri vuol dire che questo è giusto? Se le moltiplicazioni sono diverse...	

76	Eh, sono diverse, però hanno gli stessi numeri e hanno anche lo stesso risultato	Questa è una riformulazione della proprietà commutativa anche se non si fa esplicito riferimento alla posizione dei fattori [3]
77	Questa è una cosa che potevi dire in più. Va be', comunque. Quello che hai scritto sotto invece [indica la risposta sulla proprietà distributiva]. Se te lo richiedessero oggi: se ti dicessero "secondo te questa bambina ha scritto una cosa corretta?" te cosa diresti oggi?	
78	Sì	
79	E se dovessi spiegare il perché come lo spiegheresti?	
80	Perché... perché questo... se te tipo fai queste operazioni... aspetta, non so come spiegarlo.	
81	A parole tue	
82	Se calcoli le operazioni e poi calcoli i risultati di queste due operazioni [indica i primi due prodotti con due dita] il risultato è uguale di questo [indica l'altro membro dell'uguaglianza]	Qui SofB spiega la struttura dell'espressione [4][6][7]: il primo "calcoli" indica la determinazione del risultato delle moltiplicazioni, il secondo si riferisce alla somma dei prodotti. L'uguale è inteso come confronto fra i risultati [1]
83	Ok. Senti: proviamo a vederne anche qualche altro esempio? Ti faccio vedere, ce n'avevo alcune... vediamone una alla volta [mostra la prima uguaglianza] secondo te questa qua è giusta?	
84	Ehm... [fissa il foglio]	
85	Puoi anche scrivertele se vuoi	
86	[dopo un lungo silenzio] No	
87	Mi racconti un po' che cosa hai controllato?	
88	Aspetta	
89	Te la vuoi riscrivere qui? [le porge il foglio su cui aveva scritto prima]	
90	Ok	
91	Così non ti dimentichi le cose	
92	[riscrive l'uguaglianza sul foglio, poi c'è un momento di silenzio] Sì è giusta	
93	Spiegami che calcoli hai fatto, hai fatto tutto nella tua testa, io non so cosa pensi [SofB ride] mi devi dare dei suggerimenti, sennò io non so come spiegarlo	
94	Allora, se calcoli queste operazioni [indica il primo membro dell'uguaglianza facendo dei cerchi intorno] 5×6 fa 30 è come se fai... è come questa [indica l'uguaglianza precedente] solo che fai prima il risultato e poi ci sono... [fa un gesto con la penna, come se fosse un salto oltre l'uguale] questa qui fa 20 [indica il 5×4]	SofB non fa ricorso alla proprietà distributiva ma calcola i risultati e li confronta [1], ancora una volta quindi l'uguale è inteso come confronto fra risultati
95	Sì	
96	E questa qui fa 10 [indica il 5×2]	
97	Ho capito	
98	Se fai $0+0$ è 0 e $1+2$ fa 3 sicché il risultato viene 30	Le somme proposte sembrano essere quelle fra le decine e le unità dei due numeri sommati, come se stesse svolgendo il calcolo "in colonna" ma nella sua mente.
99	Quindi quella cosa lì è giusta?	
100	Sì	
101	Ok. Senti, se ti facessi vedere questa qui [mostra la seconda] secondo te è giusta?	
102	Allora... no.	
103	Come mai?	

104	Allora... questa qui [non si vede dove indichi, esce dall'inquadratura della videocamera] fa 15 e questa, va be', fa 30, 15 e 20 e fai 0+5 fa 5 e poi se fai 1+2 fa trenta... trentacinque e non è uguale.	La giustificazione fornita è ancora in termini dei risultati [1]
105	Non è uguale. Senti, te ne faccio vedere un'altra lunghissima. Secondo te, questa?	
106	Aspetta... [segue silenzio] È vera!	
107	Raccontami	
108	Perché questa qui [ancora fuori dall'inquadratura] fa.. aspetta... questa fa 20, questa fa 15 e se moltiplichi i risultati viene 35 e se invece moltiplichi questi due risultati viene lo stesso 35 ed è uguale.	La giustificazione fornita è ancora in termini dei risultati [1] , il fatto che prima di dire "è vera" sia passato del silenzio fa pensare che anche fra sé e sé, la bambina abbia fatto tutti calcoli. Si noti che alle volte viene usata la parola "moltiplichi" sebbene SofB stia facendo riferimento a delle somme.
109	Perfetto. Senti, però, questa cosa qui io vorrei spiegargliela anche ai bambini più piccolini. Diciamo: metti che io gli voglio spiegare [indica la prima uguaglianza] questa qua per fargli capire come funziona se io lo volessi spiegare usando la tabella... ti ricordi che noi l'anno scorso usavamo la tabella, con tutte le mattonelle... come potrei fare?	
110	Ehm... puoi fargli colorare i risultati delle operazioni e poi gli puoi dire di metterli in colonna e calcolare per vedere se sono uguali	Quando parla di colorare i risultati potrebbe far riferimento alle attività fatte in classe in cui si coloravano alcune caselle, però poi suggerisce di lavorare sul calcolo in colonna e quindi non sembra star facendo riferimento al modello rettangolare
111	Senti: io avevo provato a fare un disegno, ti faccio vedere [mostra la prima immagine] guarda, questo qua. Secondo te, se faccio questo disegno è la stessa cosa di questo [indica la scrittura simbolica sull'altro foglio]	
112	Sì	
113	Sicura?	
114	No, aspetta	Qui come in alcuni casi precedenti, sembra che la bambina sia soggetta a un contratto didattico per cui "se l'insegnante dubita, allora hai sbagliato" tant'è che dopo il "sicura?" ritratta subito la sua posizione per poi però ritornarci e giustificarla anche
115	No, non lo so. A me sembrava un disegno appropriato, però dimmi se secondo te va bene.	
116	Sì	
117	E secondo te può aiutarli questo disegno a capirlo?	
118	Sì	
119	Com'è che potrebbe aiutarli?	
120	Perché se tipo devono guardare se sono uguali può contare i quadratini e guardare quanti sono, contare... oppure... può contare questi quadratini [indica il rettangolo 5×6] e poi contare questi altri [usa il fondo della penna per fare un cerchio intorno agli altri due rettangoli] guardare questi [indica 5×4] e poi aggiunge questi [indica il 5×2] e guardare se sono uguali	Qui SofB sembra di riconoscere che i quadratini contenuti in un rettangolo rappresentano il risultato della moltiplicazione, tuttavia dopo (linea 124) questo verrà messo in dubbio
121	E gli verrà fuori che sono uguali?	
122	Boh	
123	Questa te avevi detto che era giusta [indica la scrittura simbolica] disegnati in questo modo, secondo te, se vanno a contare i quadratini gli verrà fuori che sono uguali?	Qui l'intervistatore richiede alla bambina di mettere in relazione le due diverse scritture

124	Se i quadratini sono de... se i quadratini sono il numero del risultato...	
125	Come si fa a controllare? Controlliamo se i quadratini sono del numero del risultato. Che controllo dobbiamo fare?	
126	Aspe...	
127	Per essere sicuro di averlo disegnato bene, che cosa devo controllare?	
128	Che i quadratini sono... sono lo stesso numero di qua [indica la scritta 5×4 al centro del rettangolo]	
129	Quindi che cosa devo contare per controllare?	
130	I quadratini?	
131	Li devo contare tutti quanti? Questi quanti dovrebbero essere per essere giusti? [indica il 5×4]	
132	Venti	
133	E c'è bisogno che li conti tutti per scoprire se sono 20? O posso fare più veloce? Posso contare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 fino a 20 [SofB ride] e va bene. Ma ci può essere un modo più veloce per vedere se ce n'ho messi dentro per davvero 20 quadratini? [segue lungo silenzio] Cioè, la domanda è: secondo te, questo cartoncino qui [con la punta della penna percorre il perimetro del 5×4], questa mattonella qui va bene per rappresentare 5×4? O dovrei farla diversa?	Qui l'intervistatore desidera che la bambina metta in luce la relazione fra le dimensioni del rettangolo e i fattori della moltiplicazione che rappresenta. Tuttavia la richiesta non sembra essere chiara per la SofB.
134	[dopo breve silenzio] Va bene	
135	E cosa dovevi controllare per vedere se va bene per 5×4?	
136	I quadretti	
137	Quali quadretti? Tutti quelli che ci sono dentro?	
138	No	
139	Spiegami che cosa hai controllato te [segue silenzio] Per esempio, questo l'ho fatto per 5×4 [percorre il perimetro del rettangolo] e questo l'ho fatto per 5×2 [percorre il perimetro dell'altro]	
140	Potrebbe contare una fila e contarle per altre tre volte	
141	In quale questo?	
142	In questo [indica il 5×4] se tipo conta una fila e poi lo ripete per 4 volte	Qui non è chiaro se la bambina abbia voluto mettere in evidenza il fatto che ciascuna fila è composta da 5 quadretti. L'unica cosa che è chiara è che lei associ il numero di quadretti nel rettangolo al risultato ma non è evidente se associ anche le dimensioni del rettangolo ai fattori. In quest'ultimo intervento sembra far riferimento a un'interpretazione della moltiplicazione come operazione unaria: 5 (il numero di quadretti per fila) è l'operando e 4 (il numero di volte che si ripete) è l'operatore.
143	Per quattro volte, ho capito. Senti, e secondo te, se lo disegno così [mostra l'altra immagine] o così, va bene uguale?	
144	[breve silenzio] sì	
145	Però qual è secondo te che funziona meglio?	
146	Il secondo	
147	Perché ti piace di più quello	
148	No	
149	Non lo so, dimmi te. Io li ho fatti tutt'e due, dimmi secondo te qual è quello migliore	
150	Per loro forse questa è un po' più semplice e questa è un po' più difficile [indica fuori dall'inquadratura]	Anche lei riconosce la struttura più familiare e la reputa più "semplice" rispetto all'altra che quindi risulta più "difficile"

151	Però pensi siano giuste tutt'e due [SofB annuisce] ok.	

SofB interpreta correttamente la struttura delle espressioni riconoscendo l'ordine con cui devono essere svolte le operazioni (linee 26 e 36) e le relazioni che fra esse intercorrono (linee 48, 82, 94, 98).

La proprietà commutativa viene enunciata più volte con formulazioni diverse (linee 60 e 76). Per quel che riguarda la proprietà distributiva non si ha nessuna evidenza del fatto che la bambina la riconosca, neanche nel caso dei rettangoli.

L'uguale è sicuramente bidirezionale dato che la bambina non solleva nessun problema nell'operare il confronto con qualsiasi tipologia di uguaglianza proposta (linee 94, 108 e 110). Viene visto come simbolo che indica il confronto fra i risultati delle operazioni ai due membri (linee 52, 85, 94, 104). Non ci sono istanze di pensiero relazionale ma le abilità dimostrate indicano che SofB sta sviluppando il suo pensiero relazionale.

Bibliografia

- Acerbi, F. (2007). *Euclide: Tutte le opere*. Milano: Bompiani.
- Adler, I. (1958). *The New Mathematics*. New York: J. Day Company.
- Anderson, M. C., Bjork, R. A., & Bjork, E. L. (1994). Remembering can cause forgetting: Retrieval dynamics in long-term memory. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 20, 1063-1087.
- Anghilleri, J. (1989). An Investigation of Young Children's Understanding of Multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 367-385.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267-300.
- Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M. G. (1998). Italian trends of research in mathematics education: A national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick, & A. Sierpinska, *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (p. 243-262). Kluwer Academic Publishers.
- Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiappini, G. (2001). A model for analysing algebraic process of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins, *Perspectives on school algebra* (p. 61-81). Netherlands: Kluwer.
- Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.
- Ashcraft, M. H. (1982). The development of mental arithmetic: A chronometric approach. *Developmental Review*, 2(3), 213-236.
- Ashcraft, M. H. (1983). Procedural knowledge versus fact retrieval in mental arithmetic: A reply to Baroody. *Developmental Review*, 3(2), 231-235.
- Ashcraft, M. H. (1985). Is It Farfetched That Some of Us Remember Our Arithmetic Facts? *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 99-105.
- Ashcraft, M. H. (1987). Children's knowledge of simple arithmetic: A developmental model and simulation. In J. Bisanz, C. J. Brainer, & R. Kail, *Formal methods in developmental psychology* (pp. 302-338). New York: Springer.

- Ashcraft, M. H., & Battaglia, J. (1978). Cognitive arithmetic: Evidence for retrieval and decision processes in mental addition. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 4(5), 527-538.
- Ashcraft, M. H., Fierman, B. A., & Bartolotta, R. (1984). The production and verification tasks in mental addition: An empirical comparison. *Developmental Review*, 4(2), 157-170.
- Baccaglini-Frank, A. E., & Bartolini Bussi, M. G. (2016). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: il progetto "PerContare". *Form@re-Open Journal per la Formazione in Rete*, 15(3), 170-184.
- Bachelard, G. (1980). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Librairie Philosophique.
- Baddeley, A. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in cognitive sciences*, 4(11), 417-423.
- Baddeley, A. D., & Hitch, G. J. (1974). Working Memory. In G. H. Bower, *The psychology of learning and motivation*, vol. 8 (pp. 47-89). New York: Academic Press.
- Bahrnick, H. P. (1984). Semantic memory content in permastore: Fifty years of memory for Spanish learned in school. *Journal of Experimental Psychology: General*, 113, 1-29.
- Bahrnick, H. P., & Hall, L. K. (1991). Lifetime maintenance of high school mathematics content. *Journal of Experimental Psychology: General*, 120(1), 20-33.
- Bahrnick, H. P., & Phelps, E. (1994). La conservazione della conoscenza marginale. In U. Neisser, & E. Winograd, *La memoria, nuove prospettive secondo gli approcci ecologici e tradizionali* (pp. 221-237). CEDAM.
- Bakhtin, M. M. (1984). *Problems of Dostoevsky's poetics*. . Austin, TX: University of Texas Press.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm, *Mathematics, teachers and children* (p. 216-235). London: Hodder & Stoughton.
- Banerjee, R., & Subramaniam, K. (2005). Developing procedure and structure sense of arithmetic expressions. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 121-128). Melbourne: PME.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009) The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational studies in mathematics*, 70(3), 217-241.
- Barnett, S. M., & Ceci, S. J. (2002). Where and when do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128, 612-637.
- Baroody, A. J. (1983). The development of procedural knowledge: An alternative explanation for chronometric trends of mental arithmetic. *Developmental Review*, 3(2), 225-230.
- Baroody, A. J. (1984). A reexamination of mental arithmetic models and data: A reply to Ashcraft. *Developmental Review*, 4(2), 148-156.

- Baroody, A. J. (1985). Mastery of Basic Number Combinations: Internalization of Relationships or Facts? *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 83-98.
- Baroody, A. J. (1993). Early mental multiplication performance and the role of relational knowledge in mastering combinations involving "two". *Learning and Instruction*, 3(2), 93-111.
- Bartlett, F. C. (1974). *La memoria. Studio di psicologia sperimentale e sociale*. Milano: Angeli.
- Bartolini Bussi, M. G. (1991). Social interaction and mathematical knowledge. In F. Furinghetti, *Proceedings of the 15th International PME Conference, vol. 1* (p. 1-16). Assisi: IGPME.
- Bartolini Bussi, M. G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational studies in mathematics*, 31(1-2), 11-41.
- Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM*, 47, 391- 405.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, *Handbook of international research in mathematics education* (p. 750-787). Mahwah, NJ: LEA.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 32, 269-294.
- Bartolini Bussi, M. G., & Martignone, F. (2014). Manipulatives in Mathematics Education. In S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 365-372). Springer.
- Bartolini Bussi, M. G., & Maschietto, M. (2009). Working with Artefacts: Gestures, Drawings and Speech in the Construction of the Mathematical Meaning of the Visual Pyramid. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 143-157.
- Behr, M. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Biancardi, A., & Nicoletti, C. (2004). *Batteria per la discalculia evolutiva*. Turin: Omega.
- Bidwell, J. K. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *The Mathematics Teacher*, 86(6), 461-464.
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. Coxford, *The Ideas of Algebra. K-12* (pp. 20-32). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Brousseau, G. (2006). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990 (Vol. 19)*. Springer Science & Business Media.
- Bruscaglioni, L., Ferri, F. & Mattiassich, M. (2000). *Matematica che passione. Per la scuola elementare*. Milano: Piccoli.

- Butera, F., & Darnon, C. (2010). Socio-cognitive conflict and learning: past and present. . In *Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences-Volume 2* (p. 212-213)). International Society of the Learning Sciences.
- Butterworth, B., Marchesini, N., & Girelli, L. (2003). Multiplication facts: Passive storage or dynamic reorganization? In A. J. Baroody, & A. Dowker, *The development of arithmetical concepts and skills* (pp. 189-202). Mahwah: Erlbaum.
- Byers, V., & Erlwanger, S. (1985). Memory in mathematical understanding,. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 259-281.
- Byers, V., & Herscovics, N. (1977). Understanding School Mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27.
- Campbell, J. I. (1987). Production, verification, and priming of multiplication facts. *Memory & Cognition*, 15(4), 349-364.
- Campbell, J. I. (1997). Reading-based interference in cognitive arithmetic. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 51, 74-81.
- Campbell, J. I., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology/Revue canadienne de psychologie*, 39(2), 338-366.
- Cao, Y., Li, X., & Zuo, H. (2015). Characteristics of multiplication teaching of whole numbers in China: the application of nine times table. In X. Sun, B. Kaur, & J. Novotná, *Primary Mathematics Study on Whole Numbers - ICMI-Study 23* (p. 423-430). Macao: ICMI.
- Carpenter, T. P., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: generalization and proof. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent, *The future of the teaching and learning of algebra. Proc.s of the 12th ICMI study conference* (pp. 155-162). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M., & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(1), 53-59.
- Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to algebra* (p. 15-37). Springer Netherlands.
- Chassapis, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: The compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), 275-293.
- Chavannes, D. A. (1809). *Exposé de la méthode élémentaire de H. Pestalozzi, suivi d'une notice sur les travaux de cet homme célèbre, son institut et ses principaux collaborateurs*. Paris: Levrault-Schoell.

- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cohen., L., & Dehaene, S. (1994). Amnesia for arithmetic facts: a single case study. *Brain and Language*, 47(2), 214-232.
- Colapietro, V. M. (1993). *Glossary of semiotics*. New York, NY: Paragon House.
- Collins, A. M., & Loftus, E. (1975). A spreading activation theory of semantic memory. *Psychological Review*, 82, 407-428.
- Collins, A. M., & Quillian, M. R. (1969). Retrieval time from semantic memory. *Journal of verbal learning and verbal behavior*, 8(2), 240-247.
- Collins, K. F. (1974). Cognitive development and mathematics learning. *Psychology of Mathematics Education Workshop*. London: Chelsea College.
- Conrad, C. (1972). Cognitive economy in semantic memory. *Journal of Experimental Psychology*, 92(2), 149-154.
- Conway, M. A., Cohen, G., & Stanhope, N. (1991). On the very long-term retention of knowledge acquired through formal education: Twelve years of cognitive psychology. *Journal of Experimental Psychology: General*, 120(4), 395-409.
- Cooney, J., Swanson, H., & Ladd, S. (1988). Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition & Instruction*, 5, 323-345.
- Costa, D. A. (2014). The conceptions and contributions of Pestalozzi, Grube, Parker and Dewey for teaching arithmetic in elementary level: the concept of number. *História da Educação*, 18(42), 37-59.
- Craik, F. I., & Lockhart, R. (1972). Levels of processing. A framework for memory research. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 11, 671-684.
- Craik, F. I., & Tulving, E. (1975). Depth of processing and the retention of words in episodic memory. *Journal of experimental Psychology: general*, 104(3), 268-294.
- Cybriwsky, C. A., & Schuster, J. W. (1990). Using constant time delay procedures to teach multiplication facts. *Remedial and Special Education*, 11(1), 54-59.
- David, M. M., Tomaz, V. S., & Costa Ferreira, M. C. (2014). How visual representations participate in algebra classes' mathematical activity. *ZDM*, 46, 95-107.
- de Saussure, F. (1959). *Course in general linguistics*. New York, NY: McGraw-Hill.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1-2), 1-42.
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1991). Two mental calculation systems: A case study of severe acalculia with preserved approximation. *Neuropsychologia*, 29(11), 1045-1074.

- Dehaene, S., & Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition*, 1(1), 83-120.
- Dehaene, S., Dupoux, E., & Mehler, J. (1990). Is numerical comparison digital? Analogical and symbolic effects in two-digit number comparison. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 16(3), 626-641.
- Dentella, L., & Marzocchi, G. M. (2012). Quale componente della memoria influenza l'apprendimento delle tabelline?. *Psicologia clinica dello sviluppo*, 16(1), 155-173.
- Di Nuovo, S., & Rispoli, L. (2011). *L'analisi funzionale dello stress. Dalla clinica alla psicologia applicata: Dalla clinica alla psicologia applicata*. FrancoAngeli.
- Douglass, H. R. (1936). Permanency of retention of learning in secondary school mathematics. *The Mathematics Teacher*, 29(6), 287-288.
- Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2011). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna, & M. de Viller, *Proof and proving in mathematics education* (p. 191-213). Springer Netherlands.
- Duval, R. (2000). Basic Issues for Research in Mathematics Education. In T. Nakahara, & M. Koyama, *Proceedings of the 24th conference of PME, Vol. 1* (p. 55-69). Hiroshima.
- Ebbinghaus, H. (1975). *La memoria*. Bologna: Zanichelli.
- Eco, U. (1973). *Il segno*. Milano: ISEDI.
- Empson, S. B., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2011). The Algebraic Nature of Fractions: Developing Relational Thinking in Elementary School. In E. Knuth, & J. Cai, *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 409-428). Springer.
- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching children mathematics* 6(4), 232.
- Falkner, K., Levi, L., & Carpenter, T. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching children mathematics* 6(4), 232.
- Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 16(1), 3-17.
- Fremont, H. (1967). New mathematics and old dilemmas. *The Mathematics Teacher*, 60(7), 715-719.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1977). What is Algebra and What has it been in History? *Archive for history of exact sciences*, 16(3), 189-200.

- Fried, M. N. (2007). Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 203–223.
- Fuson, K. C., & Brinko, K. T. (1985). The comparative effectiveness of microcomputers and flash cards in the drill and practice of basic mathematics facts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 225-232.
- Gabrielli, G., & Guerrini, M. (2011). *I Problemi del fascismo: numeri come strumento di propaganda*. Istituto Alcide Cervi.
- Geary, D. C., & Hoard, M. K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: Theoretical and empirical perspectives. In J. I. Campbell, *Handbook of mathematical cognition* (pp. 253-267). New York: Psychology Press .
- Geary, D. C., Widaman, K. F., & Little, T. D. (1986). Cognitive addition and multiplication: Evidence for a single memory network. *Memory & Cognition*, 14(6), 478-487.
- Gillings, R. J. (1972). *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Courier Corporation.
- Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing Gesture. How Our Hands Help Us Think*. Cambridge, MA: The Belknap Press.
- Greene, G. (1999). Mnemonic multiplication fact instruction for students with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 14(3), 141-148.
- Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws, *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: Macmillan Publishing Co.
- Gunnarsson, R., Sönnnerhed, W., & Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations? *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 91-105.
- Hall, M. (2000). *Bridging the gap between everyday and classroom mathematics: An investigation of two teachers' intentional use of semiotic chains*. Unpublished doctoral dissertation. The Florida State University.
- Harel, G. (2002). The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. R. Campbell, & R. Zazkis, *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction (Vol.2)* (p. 185-212). Greenwood Publishing Group.
- Harries, A., & Barmby, P. W. (2007). Representing and understanding multiplication. *Research in mathematics education*, 9(1), 33-46.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* 27(1), 59-78.

- Hittmair-Delazer, M., Semenza, C., & Denes, G. (1994). Concepts and facts in calculation. *Brain*, 117(4), 715-728.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3)*, (pp. 49-56). Bergen, Norway.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3)*, (pp. 305-312). Prague, Czech Republic.
- Hoch, M., & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics*, (pp. 436-445). Larnaca, Cyprus.
- Huang, H. M. (2014). Third-to fourth-grade students' conceptions of multiplication and area measurement. *ZDM*, 46(3), 449-463.
- Huang, H. M., & Witz, K. G. (2013). Children's conceptions of area measurement and their strategies for solving area measurement problems. *Journal of Curriculum and Teaching*, 2(1), 10-26.
- ISS. (2010). *Disturbi specifici dell'apprendimento, Consensus Conference 3*. Roma: Ministero della Salute.
- Izsak, A. (2004). Teaching and learning two-digit multiplication: Coordinating analyses of classroom practices and individual student learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(1), 37-79.
- Izsak, A. (2005). "You Have to Count the Squares": Applying Knowledge in Pieces to Learning Rectangular Area. *The Journal of the Learning Sciences*, 14(3), 361-403.
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, 38(3), 258-288.
- Kapur, N. (1999). Syndromes of retrograde amnesia: a conceptual and empirical synthesis. *Psychological bulletin*, 125(6), 800-825.
- Kaput, J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response (Technical report 85-19)*. Cambridge: Harvard University, Educational Technology Center.
- Karagiannakis, G. N., & Cooreman, A. (2014). Focused MLD intervention based on the classification of MLD subtypes. In G. N. Karagiannakis, & A. Cooreman, *The Routledge international handbook of dyscalculia and mathematical learning difficulties* (p. 265-275). Routledge.

- Karagiannakis, G. N., Baccaglioni-Frank, A. E., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in human neuroscience*, 8, 57.
- Karsenty, R. (2002). What do adults remember from their high school mathematics? The case of linear functions. *Educational Studies in Mathematics*, 51(1-2), 117-144.
- Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 185-201.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
- Kieran, C. (1988). Two different approaches among algebra learners. In A. Coxford, *The Ideas of Algebra. K-12* (pp. 91-96). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Kita, S. (2000). How representational gestures help speaking. In D. McNeill, *Language and Gesture: Window into thought and action* (p. 162-185). Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Koehler, J. (2004). *Learning to Think Relationally: Thinking Relationally to Learn*. Unpublished dissertation. University of Wisconsin Madison.
- Koile, K., & Rubin, A. (2014). Animated Mathematical Proofs in Elementary Education. *Proceedings of the Workshop on the Impact of Pen and Touch Technology on Education (WIPTTE)*. College Station, TX.
- Kouba, V. (1989). Children's Solution Strategies for Equivalent Set Multiplication and Division Word Problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 147-158.
- Laisant, C. A. (1915). *Initiation mathématique: ouvrage étranger à tout programme, dédié aux amis de l'enfance*. Hachette & cie.
- Larsson, K. (2015). Sixth grade students' explanations and justifications of distributivity. In(Eds.),. In K. Krainer, & N. Vondrová, *Proceedings of the ninth conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 295-301). Praha, CZ: ERME.
- LeFevre, J., Bisanz, J., Daley, K., Buffone, L., Greenham, S., & Sadesky, G. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General*, 125, 284-306.
- Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of mathematics education*. SpringerReference.
- Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational studies in mathematics*, 40(2), 173-196.
- Linchevski, L., & Vinner, S. (1990). Embedded figures and structures of algebraic expressions. In G. Booker, P. Cobb, & T. Mendicuti, *Proceedings of the Fourteenth International*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2 (pp. 85-93). Mexico City, MExico.

- Lo, J. J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2008). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(1), 5–22.
- Maffei, L., & Mariotti, M. A. (2011). The role of discursive artefacts in making the structure of an algebraic expression emerge. In M. Pytlak, E. Swoboda, & T. Rowland, *Proceedings of CERME 7* (p. 511-520). Rzeszów, PL: ERME.
- Maffei, L., Sabena, C., & Mariotti, M. A. (2009). Exploiting the feedback of the Aplusix CAS to mediate the equivalence between algebraic expressions. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & C. Sakonidis, *Proceedings of PME 33, vol. 4* (p. 65-72). Thessaloniki, GR : IGPME.
- Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2015). Introduction to arithmetical expressions: a semiotic perspective. *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 1947-1953). Praha: ERME.
- Maffia, A., & Mariotti, M. A. (2016). Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete*, 16(1), 4-19.
- Maffia, A., & Mariotti, M. A. (in press). Adults' conception of multiplication: Investigating changes along studies. *Proceedings of the 13th ICME Congress – TSG06*.
- Maffia, A., & Mariotti, M. A. (in press). Seeking symmetry in distributive property: children developing structure sense in arithmetic. *Proceedings CERME 10*.
- Maffia, A., & Sabena, C. (2016). Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains. In C. Csikos, A. Rausch, & J. Sztànyi, *Proceedings of 40th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (p. 235-242). Szeged: PME.
- Malara, N., & Navarra, G. (2009). Approaching the distributive law with young pupils. *PNA*, 3(2), 73-85.
- Mannes, S. M., & Kintsch, W. (1987). Knowledge organization and text organization. *Cognition and Instruction*, 4, 252-271.
- Marchini, C., & Papadopoulos, I. (2011). Are useless brackets useful for teaching? *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 185-192). Ankara: PME.
- Mariotti, M. A. (2013). Introducing students to geometric theorems: how the teacher can exploit the semiotic potential of a DGS. *ZDM*, 45(3), 441-452.
- Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2014). Chi non impara a memoria le tabelline? *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n.28* (pp. 145-148). Bologna: Pitagora.

- Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2015). Cosa ricordano gli adulti sulle tabelline? *Pedagogia più didattica*, 1(1).
- Mariotti, M. A., & Maracci, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique: une ressource pour le professeur. In L. Trouche, & G. Gueudet, *Ressources vives, le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (p. 91-107). Presses Universitaires de Rennes et Institut National de Recherche Pédagogique.
- Mason, J., & Waywood, A. (1996). The role of theory in mathematics education and research. In A. Bishop et al., *International handbook of mathematics education* (p. 1055-1089). Dordrecht: Kluwer.
- Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 10-32.
- McCloskey, M., Harley, W., & Sokol, S. M. (1991). Models of arithmetic fact retrieval: an evaluation in light of findings from normal and brain-damaged subjects. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 17(3), 377-397.
- McGowen, M. A., & Tall, D. O. (2010). Metaphor or Met-Before? The effects of previous experience on practice and theory of learning mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(3), 169-179.
- McLean, J. F., & Hitch, G. J. (1999). Working memory impairments in children with specific arithmetic learning difficulties. *Journal of Experimental Child Psychology*, 74(3), 240-260.
- Mcneill, D. (1992). *Hand and mind: what gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.
- Millan Gasca, A. (2016). *Numeri e forme: didattica della matematica con i bambini*. Bologna: Zanichelli.
- Miller, G. A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information. *Psychological review*, 63(2), 81-97.
- MIUR (2012). *Indicazioni Nazionali della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*.
- Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. In M. Martinho, R. Ferreira, & J. da Ponte, *EIEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matematica* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim: EIEM 2011.
- Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Molina, M., Castro, E., & Ambrose, R. (2005). Enriching Arithmetic Learning by Promoting Relational Thinking. *The International Journal of Learning*, 12(5), 265-270.

- Molina, M., Castro, E., & Mason, J. (2008). Elementary school students' approaches to solving true/false number sentences. *PNA* 2(2), 75-86.
- Monaghan, J., & Ozmantar, M. F. (2006). Abstraction and consolidation. *Educational Studies in Mathematics*, 62(3), 233-258.
- Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 309-330.
- Mwangi, T. M. (2013). *Software Tools for Elementary Math Education: Animated Mathematical Proofs*. Master of Engineering Thesis. Cambridge: EECS Department, MIT.
- Neisser, U. (1978). *Conoscenza e realtà*. Bologna: il Mulino.
- Neisser, U. (1984). Interpreting Harry Bahrick's discovery: What confers immunity against forgetting? *Journal of Experimental Psychology: General*, 113(1), 32-35.
- Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert, & M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-41). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Noice, H. (1992). Elaborative memory strategies of professional actors. *Applied Cognitive Psychology*, 6(5), 417-427.
- Norman, D. A. (1995). *Le cose che ci fanno intelligenti*. Feltrinelli.
- Nunes, T., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics*. Cambridge Univ. Press.
- Ohmer, M., & Aucoin, C. (1966). *Modern Mathematics for Elementary Teachers*. Waltham: Blaisdell.
- Parkman, J. M. (1972). Temporal aspects of simple multiplication and comparison. *Journal of Experimental Psychology*, 95(2), 437-444.
- Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo*. Fratres Bocca.
- Peirce, C. S. (1998). *The essential Peirce*. . Bloomington: Indiana University Press.
- Pellerey, M. (2005). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-Based Research). *Orientamenti Pedagogici*, 52(5), 721-737.
- Piaget, J. (1985). *The equilibration of cognitive structures: The central problem of intellectual development*. University of Chicago Press.
- Pirie, S. E., & Schwarzenberger, R. L. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in mathematics*, 19(4), 459-470.
- Poli, S., Molin, A., Lucangeli, D., & Cornoldi, C. (2006). *Memocalcolo. Programma per l'apprendimento delle tabelline e di altri fatti aritmetici*. Trento: Erickson.

- Poli, S., Molin, A., Lucangeli, D., Cornoldi, C., & Cretti, F. (2007). Memocalcolo: un programma per l'apprendimento e l'automatizzazione di tabelline e altri fatti aritmetici. *Difficoltà di apprendimento*, 12(4), 607-616.
- Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 405-435.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM*, 40(2), 165-178.
- Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 163-182.
- Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., & Kadunz, G. (2016). Semiotics in Theory and Practice in Mathematics Education. In N. Presmeg, L. Radford, W. M. Roth, & G. Kadunz, *Semiotics in Mathematics Education* (p. 5-29). Springer International Publishing.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Parigi: A. Colin.
- Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, 14-23.
- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 51(1), 37-70.
- Radford, L. (2008). Connecting theories in mathematics education: challenges and possibilities. *ZDM*, 40 (2), 317-327.
- Ridha Asy-Syifaa, I. (2013). Using array representations to show the commutative property of multiplication. In Zulkardi, *The First South East Asia Design/ Development Research (SEA-DR) International Conference* (p. 188-196). Unsri, Palemb.
- Rosch, E., & Mervis, C. B. (1975). Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. *Cognitive psychology*, 7(4), 573-605.
- Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the context of arithmetic. In J. Cai, & E. Knuth, *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 43-69). Springer Science & Business Media.
- Sabena, C., Krause, C., & Maffia, A. (2016). L'analisi semiotica in ottica multimodale: dalla costruzione di un quadro teorico al networking con altre teorie. *XXXIII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica*. Rimini: AIRDM.
- Schank, R. C., & Abelson, R. P. (1977). *Scripts, plans, goals and understanding*. Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum Ass.

- Scherer, P., Beswick, K., DeBlois, L., Healy, L., & Moser Opitz, E. (2016). Assistance of students with mathematical learning difficulties: how can research support practice? *ZDM*, 1-17.
- Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth, *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 Perspective* (pp. 71-86). New York: Routledge.
- Schneider, E., Muruyama, M., Dehaene, S., & Sigman, M. (2012). Eye gaze reveals a fast, parallel extraction of the syntax of arithmetic formulas. *Cognition*, 125, 475-490.
- Schwartz, J. (1988). Intensive quantities and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert, & M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41-52). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. In G. Harel, & E. Dubinsky, *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (p. 59-84). Washington, DC: MAA.
- Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor . *For the Learning of Mathematics*, 14, 44-55.
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being, How mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, K. E. Yackel, & K. McClain, *Symbolizing and Communicating, Perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (p. 37-98). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, & C. Walter, *Proceedings of 21st Conference of PME-NA* (p. 23-44). Columbus: PME.
- Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.
- Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? *Educational Studies in Mathematics*, 58(3), 393-413.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. . Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*. Trento: Erickson.
- Sfard, A. (2014). Discursive approaches to learning mathematics. In S. Lerman, *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 186-190). SpringerReference.

- Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, and Activity*, 8(1), 42-76.
- Sfard, A., & Lavie, I. (2005). Why cannot children see as the same what grown-ups cannot see as different?—Early numerical thinking revisited. *Cognition and Instruction*, 23(2), 237-309.
- Sherin, B., & Fuson, K. (2005). Multiplication strategies and the appropriation of computational resources. *Journal for research in mathematics education*, 36(4), 347-395.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4- 31.
- Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General*, 117(3), 258-275.
- Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian, *Origins of cognitive skills* (pp. 229-294). Hillsdale: Erlbaum.
- Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Building and understanding multiplicative relationships: A study of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 472-494.
- Singer, M. A., & Goldin-Meadow, S. (2005). Children learn when their teacher's gestures and speech differ. *Psychological Science*, 16(2), 85-89.
- Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Psychology Press.
- Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics*, 37(3), 251-274.
- Squire, L. R. (1992). Declarative and nondeclarative memory: Multiple brain systems supporting learning and memory. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 4(3), 232-243.
- Stazyk, E. H., Ashcraft, M. H., & Hamann, M. S. (1982). A network approach to mental multiplication. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 8(4), 320-335.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In R. Lesh, & A. E. Kelly, *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Erlbaum.

- Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, Cultures and Learning Spaces. Proceedings of the 29th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 479-486). Canberra: MERGA.
- Stephens, M. (2007). Students' emerging algebraic thinking in the middle school years. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential Research, Essential Practice. Proceedings of the 30th annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 678-687). Adelaide: MERGA.
- Stephens, M. (2008). Some key junctures in relational thinking. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.), *Navigating currents and charting directions. Proceedings of the 31st annual Conference of the Mathematics Education Group of Australasia* (pp. 491-498). Brisbane: MERGA.
- Stephens, M., & Armanto, D. (2010). How to build powerful learning trajectories for relational thinking in the primary school years. In B. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education. Proceedings of the 33rd annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 523-530). Fremantle: MERGA.
- Subramaniam, K., & Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebraic expressions. In M. Høines, & A. Fuglestad, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group of Psychology for Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 121-128). Bergen, Norway: PME.
- Tall, D. O., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process? *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 223-241.
- Tartaglia, N. (1565). *Euclide megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scienze mathematiche*.
- Temple, C. M. (1992). Developmental dyscalculia. *Handbook of neuropsychology*, 7, 211.
- Temple, C. M., & Sherwood, S. (2002). Representation and retrieval of arithmetical facts: Developmental difficulties. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology: Section A*, 55(3), 733-752.
- Ter Heege, H. (1985). The Acquisition of Basic Multiplication Skills. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 375-388.
- Tsatsaroni, A., Lerman, S., & Guo-Rong, X. (2003). A Sociological Description of Changes in the Intellectual Field of Mathematics Education Research: Implications for the Identities of Academics. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*.
- Tulving, E. (1972). Episodic and semantic memory. In E. Tulving, & W. Donaldson, *Organization of memory* (pp. 381-403). New York: Academic Press.

- UMI. (2001). *Matematica 2001: Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica*. www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/primo-ciclo.
- van Heijenoort, J. (1967). *From Frege to Godel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In L. Landau, *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Academic Press.
- Vergnaud, G. (1985). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In *Numeri e operazioni nella scuola di base*. (pp. 20-45). Bologna: UMI-Zanichelli.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr, *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston: NCTM.
- Vergnaud, G. (2009). The Theory of Conceptual Fields. *Human Development*, 52, 83-94.
- Vergnaud, G., Benhadj, J., & Dussuot, A. (1979). *La Coordination de l'Enseignement des Mathématiques entre le cours moyen 2e année et la classe de sixième*. France: Institut National de Recherche Pédagogique.
- Vest, F. (1971). A Catalog of Models for Multiplication and Division of Whole Numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 3(2), 220-228.
- Vosniadou, S. (1994). Capturing and modeling the process of conceptual change. *Learning and instruction*, 4(1), 45-69.
- Vygotskij, L. S. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, 36, 415-434.
- Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. S. (1993). *Collected works (Vol. 2)*. New York: Plenum.
- Vygotskij, L. S. (2004). *Pensiero e linguaggio*. Bari: Laterza.
- Vygotskij, L. S. (2010). *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*. Firenze: Giunti (Originale pubblicato nel 1974).
- Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind: Sociocultural Approach to Mediated Action*. Harvard University Press.
- Whalen, J., McCloskey, M., Lindemann, M., & Bouton, G. (2002). Representing arithmetic table facts in memory: Evidence from acquired impairments. *Cognitive Neuropsychology*, 19(6), 505-522.
- Wittgenstein, L. (1967). *Ricerche filosofiche*. tr. it. a cura di M. Trinchero. Torino: Einaudi.

- Wood, D. K., Frank, A. R., & Wacker, D. P. (1998). Teaching multiplication facts to students with learning disabilities. *Journal of Applied Behavior Analysis*, 31(3), 323-338.
- Zan, R. (1998). Tabelline sì o no? *Notiziario Unione Matematica Italiana*, giugno, 17-23.
- Zan, R. (2002). Metacognizione, convinzioni e affettività: un approccio integrato alle difficoltà in matematica. In A. Contardi, & B. Piochi, *Le difficoltà in matematica. Metodologia e pratica di insegnamento* (pp. 33-44). Erickson: Trento.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica: Osservare, interpretare, intervenire*. . Milano: Springer Science & Business Media.

Pubblicazioni tratte da questa tesi

- Maffia, A. (2016). “Parliamo ma non ci capiamo!”: conflitti comognitivi nella lezione di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 39A(1), 75-95.
- Maffia A., & Mariotti, M. A. (in press). Adults' conception of multiplication: Investigating changes along studies. *Proceedings of the 13th ICME Congress – TSG06*. Hamburg, DE: Springer.
- Maffia A., & Mariotti, M. A. (in press). Seeking symmetry in distributive property: children developing structure sense in arithmetic. *Proceedings of the 10th Congress of European Research in Mathematics Education*. Dublin, IR: ERME.
- Maffia A., & Mariotti, M. A. (2016). Semiotic mediation: from multiplication properties to arithmetical expressions. *Form@re – Open Journal per la formazione in rete*, 16(1), 4-19.
- Maffia A., & Mariotti, M. A. (2015). Introduction to arithmetical expressions: a semiotic perspective. *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education, 1947-1953*. Praha, CZ: ERME.
- Maffia, A., & Sabena C. (2016). Teacher gestures as pivot signs in semiotic chains. In Csikos C., Rausch, A., & Sztànyi, J. (Eds.) *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp.235-242- Szeged, HU: PME.
- Mariotti, M. A., & Maffia, A. (2014). Chi non impara a memoria le tabelline? In B. D'Amore, & S. Sbaragli (Eds.) *Atti del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica n.28*, 145-148. Bologna: Pitagora.
- Mariotti M. A., & Maffia A. (2015). Cosa ricordano gli adulti sulle tabelline? *Pedagogia più didattica*, 1(1).

