

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MODENA E REGGIO EMILIA

Dipartimento di Ingegneria “Enzo Ferrari”

Dottorato di Ricerca in High Mechanics and Automotive Design & Technology

Meccanica Avanzata e Tecnica del Veicolo

XXVIII ciclo

ICAR/09 – Tecnica delle Costruzioni

**Introduzione di Surrogati in Algoritmi Evolutivi
per Problemi di Ottimizzazione e Calibrazione di
Modelli Numerici nell’Ambito dell’Ingegneria
Strutturale**

Paola Gambarelli

Tutor Scientifico: Dott. Ing. Loris Vincenzi

Direttore Scuola di Dottorato: Chiar.mo Prof. Paolo Tartarini

Marzo 2016

Alla mia famiglia

INDICE

ABSTRACT	9
ABSTRACT	11
INTRODUZIONE	13
1 METODI DI OTTIMIZZAZIONE LOCALE E GLOBALE.....	17
1.1 Metodi di ottimizzazione basati sul gradiente della funzione obiettivo.....	19
1.1.1 <i>Metodi di ordine zero</i>	20
1.1.2 <i>Metodi del primo ordine</i>	21
1.1.3 <i>Metodi del secondo ordine</i>	23
1.1.4 <i>Strategie per migliorare la convergenza</i>	24
1.2 Algoritmi genetici ed evolutivi.....	27
1.2.1 <i>Differential Evolution algorithm (DE)</i>	28
1.3 Metodi di ottimizzazione basati su superfici di risposta	33
1.4 Definizione della funzione obiettivo	36
1.5 Criteri di convergenza.....	36
2 SURROGATE MODELLING.....	39
2.1 Struttura degli algoritmi basati su modelli surrogati	40
2.2 Stima dei parametri del modello surrogato	41
2.2.1 <i>Metodo della massima verosimiglianza (MLE, Maximum Likelihood Estimation)</i>	41
2.2.2 <i>Cross-validazione</i>	42
2.3 Model Testing	43
2.4 Scelta del modello surrogato	43
2.4.1 <i>Surrogati di tipo polinomiale</i>	44
2.4.2 <i>Surrogati basati su funzioni radiali di base (Radial Basis Functions)</i>	45
2.4.3 <i>Surrogati basati sul modello di Kriging</i>	47
2.4.4 <i>Riflessioni riguardo la scelta del modello surrogato</i>	51
2.5 Gestione dei modelli surrogati (model management).....	53
2.5.1 <i>Prediction Based Exploitation</i>	54
2.5.2 <i>Error Based Exploration</i>	56
2.5.3 <i>Bilanciamento fra exploitation e exploration</i>	57
2.6 Algoritmo SO-MI	59
2.6.1 <i>Problemi di ottimizzazione discreta (mixed-integer)</i>	59
2.6.2 <i>Architettura dell'algoritmo SO-MI</i>	59
2.7 Surrogati all'interno di algoritmi evolutivi.....	63

3	DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM CON L'INTRODUZIONE DI UN SURROGATO QUADRATICO	65
3.1	Introduzione di un surrogato quadratico nell'algoritmo DE	66
3.2	Applicazione dell'algoritmo DE-Q per la calibrazione di modelli FEM di strutture civili	69
3.2.1	<i>Passerella di Correggio</i>	70
3.2.2	<i>Passerella Pasternak</i>	74
3.2.3	<i>Manhattan Bridge di New York</i>	83
3.3	Applicazione dell'algoritmo DE-Q per la calibrazione di legami costitutivi di calcestruzzi fibrorinforzati	92
3.3.1	<i>Calcestruzzi fibrorinforzati (FRC)</i>	92
3.3.2	<i>Prove sperimentali di laboratorio su provini in FRC</i>	93
3.3.3	<i>Relazione tensione-apertura di fessura (modello analitico)</i>	98
3.3.4	<i>Modellazione a elementi finiti dei provini in FRC</i>	101
3.3.5	<i>Calibrazione di leggi tensione-apertura di fessura</i>	102
4	ALGORITMO DE-S	123
4.1	Architettura dell'algoritmo DE-S	123
4.2	Criteri per l'assegnazione di un punteggio	125
4.3	Bilanciamento fra <i>local exploitation</i> e <i>global exploration</i>	127
4.4	Analisi di sensitività dei parametri che governano l'algoritmo DE-S	130
4.4.1	<i>Descrizione delle funzioni benchmark</i>	130
4.4.2	<i>Variabilità del numero di nuove valutazioni NH e del numero degli elementi della popolazione NP</i>	132
4.4.3	<i>Variabilità dei pesi associati ai criteri per l'assegnazione dei punteggi ai candidati alle nuove valutazioni</i>	139
5	CONFRONTO FRA GLI ALGORITMI EVOLUTIVI STUDIATI E L'ALGORITMO PROPOSTO	141
5.1	Minimizzazione di Funzioni benchmark	141
5.1.1	<i>Confronto fra la distribuzione dei punti di ricerca nel dominio di definizione dei parametri durante la procedura di ottimizzazione</i>	145
5.2	Identificazione di un telaio a tre piani e singola campata	150
5.2.1	<i>Risoluzione del problema di identificazione</i>	152
5.3	Identificazione del danno in una struttura da ponte in sistema misto acciaio-calcestruzzo	154
5.3.1	<i>Risultati del problema di ottimizzazione</i>	158
5.4	Calibrazione di legami costitutivi di calcestruzzi fibrorinforzati	160

CONCLUSIONI	165
BIBLIOGRAFIA	169

ABSTRACT

La caratterizzazione del comportamento delle strutture civili viene generalmente effettuata mediante l'ausilio di modelli numerici a elementi finiti che se opportunamente calibrati permettono di valutare lo stato di sollecitazione e deformazione in esercizio delle strutture e possono essere adottati per la stima del livello prestazionale e di sicurezza anche a fronte di eventi sismici o eccezionali. Per ottenere una simulazione accurata del comportamento reale delle strutture occorre identificare i parametri numerici incerti o non noti risolvendo problemi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo è definita come differenza fra quantità numeriche e sperimentali. Generalmente le funzioni obiettivo sono definite implicitamente, non sono regolari e possono avere più minimi locali; pertanto, per risolvere problemi di ottimizzazione è necessario impiegare efficaci ed efficienti algoritmi di ricerca globale. Tra questi, sono molto utilizzati gli algoritmi genetici ed evolutivi che permettono di individuare il minimo globale della funzione ma con un consistente numero di valutazioni della funzione obiettivo. Recentemente sono stati sviluppati algoritmi che approssimano la funzione mediante surrogati (ad esempio superfici di risposta o funzioni polinomiali) e comportano una riduzione del costo computazionale.

L'obiettivo di questo lavoro è di proporre un algoritmo evolutivo che utilizza surrogati per approssimare la funzione obiettivo in modo da trovare soluzioni accurate con un numero sempre più limitato di valutazioni. Le prestazioni dell'algoritmo sono testate con riferimento a problemi di ottimizzazione di modelli numerici nell'ambito dell'ingegneria strutturale.

Nelle fase preliminare sono studiati gli algoritmi evolutivi DE e DE-Q, il secondo sviluppato a partire dal primo con l'introduzione di un'approssimazione quadratica della funzione obiettivo che permette di ridurre l'onere computazionale preservando l'accuratezza dei risultati. Successivamente è proposto un miglioramento dell'algoritmo DE-Q (chiamato DE-S) con l'obiettivo di ridurre ulteriormente l'onere computazionale limitando il numero di valutazioni senza incrementare significativamente la complessità computazione dell'algoritmo. Si propone una strategia di selezione dei nuovi punti in cui valutare la funzione cercando un equilibrio fra ricerca globale e locale. A ciascun candidato l'algoritmo assegna un punteggio dato dalla somma pesata di due criteri: il primo dipende dalle distanze del candidato dai punti già valutati, il secondo dipende dai valori della funzione approssimati dal surrogato.

Con riferimento a funzioni benchmark, le prestazioni dell'algoritmo proposto sono

confrontate con quelle degli algoritmi studiati e sono effettuate analisi per individuare il numero ottimale di nuove valutazioni della funzione ad ogni iterazione indagando l'influenza dei pesi da assegnare a ciascun criterio. Le prestazioni dell'algoritmo proposto sono valutate per un problema di identificazione dinamica di una struttura a telaio a singola campata e tre piani e per un problema di identificazione del danno di un ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo. Inoltre, il nuovo algoritmo è utilizzato per problemi di identificazione dinamica di passerelle pedonali impiegando come riferimento risultati sperimentali derivanti da campagne di monitoraggio. Infine, l'algoritmo è impiegato per la calibrazione del comportamento post-fessurativo di calcestruzzi fibrorinforzati utilizzando come riferimento prove sperimentali di laboratorio. I risultati mostrano prestazioni decisamente migliori dell'algoritmo proposto in termini di riduzione dell'onere computazionale ma preservando l'accuratezza globale.

ABSTRACT

Numerical techniques as Finite Element models are commonly used to characterize the actual behavior of civil structures. Accurate models representing real structures allow to investigate the structural behaviour in operational conditions as well as in the field of optimization design and damage identification after seismic events. The basic procedure of model updating is to adjust some parameters of the structure so that the model responses match very well the measurements. The set of unknown parameters is obtained solving an optimization problem where the objective function is defined as the difference between measured data and numerical predictions. Since the functions are generally non-smooth or implicitly defined and they may often exhibit multiple local optima, effective and efficient global optimization methods such as genetic and evolutionary algorithms are needed to solve optimization problems. These algorithms allow to escape from local minima but the convergence is often reached after a large number of function evaluations. Surrogate-assisted evolutionary strategies use efficient computational models and they introduce response surfaces or high polynomial functions to approximate the objective function so that the computational effort is reduced.

The aim of this work is to propose and test the performance of a surrogate-assisted evolutionary algorithm for model updating in the framework of civil engineering structures thus to find an accurate solution with a limited number of function evaluations.

The evolutionary DE algorithm is preliminary investigated as well as the DE-Q algorithm designed by improving the performances in term of speed rate thanks to the introduction of a quadratic approximation of the objective function and by preserving the accuracy of results. An updating of the DE-Q, called DE-S, is proposed to further reduce the computational cost by lowering the number of function evaluations without significantly increasing the manage complexity of the algorithm. A proper infill sampling strategy is proposed to select a limited number of points where the objective function is to be evaluated trying to establish a balance of local and global search that is to enhance both the accuracy in the region of the optimum predicted by the surrogate (local exploitation) and global exploration. To each candidate the improved algorithm assigns a score that is set as the weighted sum of two scoring criteria: the first one depends on the distances of the candidate from all the already evaluated points, the second one depends on the objective function values predicted by the surrogate.

A comparison between performances of the DE, the DE-Q and the DE-S algorithms

is performed. First, the proposed algorithm is tested to search the global minimum of benchmark non-convex functions with multiple local optima. Sensitivity analyses are carried out to define the optimum number of function evaluations and to investigate the influence of weights associated to scoring criteria. The performances of the updated algorithm are assessed by solving a dynamic identification problem with reference to a single-span three-floors frame and a damage detection problem of a steel-concrete bridge. Moreover, the potentialities of the new algorithm are tested by performing the dynamic identification of footbridges starting from data measured through Structural Health Monitoring systems. In addition, the algorithm is used in the framework of post-cracking behaviour assessment of fibre-reinforced concretes by using as reference data obtained during experimental tests. Results show that the performance of the DE-S is strongly improved in comparison with other evolutionary algorithms in terms of reducing the computational effort preserving the global accuracy.

INTRODUZIONE

In molti settori dell'ingegneria sono impiegate tecniche di ottimizzazione per calibrare modelli che permettano di predire il comportamento di un processo o di una struttura in modo accurato. Gli ambiti di applicazione sono molteplici: ottimizzazione dei processi industriali, progettazione di nuovi materiali, calibrazione di modelli numerici a elementi finiti di parti meccaniche o strutture civili. Nell'ambito dell'ingegneria strutturale è sempre più frequente l'utilizzo di modelli numerici, soprattutto quelli a elementi finiti, come supporto per le moderne metodologie di progettazione e verifica, per caratterizzare il comportamento delle strutture in esercizio valutando lo stato di sollecitazione e deformazione e per la stima del livello prestazionale e di sicurezza anche a fronte di eventi sismici o eccezionali. E' importante sottolineare che i risultati numerici dipendono dalle assunzioni considerate in fase di modellazione (ipotesi sulle caratteristiche meccaniche dei materiali, sul grado di vincolo e sull'entità delle masse strutturali e non). L'incertezza su una serie di parametri costituisce la causa principale della non completa attendibilità dei risultati ottenuti e della non rispondenza al comportamento reale della struttura. Pertanto, risulta necessario condurre procedure di ottimizzazione dei modelli in modo tale da individuare la migliore combinazione dei parametri incerti in corrispondenza dei quali il comportamento della struttura modellata si avvicina il più possibile a quello reale. La determinazione dei parametri ottimali che costituiscono la soluzione del problema di ottimizzazione avviene attraverso la ricerca del valore minimo di una funzione obiettivo definita come differenza fra quantità numeriche e sperimentali e/o di riferimento. Una corretta fase di sperimentazione o monitoraggio strutturale è alla base della caratterizzazione del comportamento delle strutture reali, tant'è che spesso i risultati sperimentali rappresentano il riferimento per le procedure di ottimizzazione.

Generalmente nei problemi di ottimizzazione in ambito strutturale le funzioni obiettivo sono definite implicitamente, non sono regolari e possono presentare più minimi locali. Inoltre, per minimizzare una funzione è necessario effettuare una serie di valutazioni e in alcuni problemi strutturali una singola valutazione può essere anche molto onerosa dal punto di vista computazionale; ad esempio, nel caso di strutture con un comportamento fortemente non lineare in cui è necessario adottare software avanzati di modellazione. In altri settori, come ad esempio nell'ambito dello sviluppo di nuovi materiali o dell'ottimizzazione di processi industriali, una singola valutazione corrisponde alla realizzazione di un test di laboratorio o di processo che possono presentare un onere economico non trascurabile. Pertanto, c'è la necessità di avere a disposizione una procedura

di ottimizzazione basata su un algoritmo efficace ed efficiente; in particolare, un algoritmo di ricerca globale che eviti la convergenza in minimi locali e che allo stesso tempo garantisca di raggiungere la soluzione del problema con un numero limitato di valutazioni della funzione, in modo da evitare un onere computazionale eccessivo che renderebbe ingestibile il processo nel caso di analisi numeriche con software a elementi finiti e in modo da limitare costi monetari nel caso di analisi di laboratorio o di processo.

I metodi classici basati sul gradiente della funzione obiettivo [1, 2] sono generalmente metodi di ricerca locale e risultano efficienti dal punto di vista computazionale, ma possono convergere in minimi locali. I metodi che adottano superfici di risposta sono basati su successive approssimazioni della funzione obiettivo; le superfici sono generalmente ottenute combinando termini polinomiali fino al secondo ordine che approssimando la funzione obiettivo in punti prefissati generano una funzione risolvibile analiticamente. L'onere computazionale è inferiore rispetto a metodi di ricerca globale, ma la convergenza non è garantita quando la funzione presenta più minimi locali o una forma complessa e quando il numero di parametri è elevato. Negli ultimi decenni sono sempre più utilizzati gli algoritmi genetici ed evolutivi [3-5] che sono generalmente più robusti, in quanto permettono di individuare il minimo globale della funzione escludendo i minimi locali grazie all'utilizzo contemporaneo di numerosi vettori di parametri. Lo svantaggio principale riguarda il numero consistente di valutazioni della funzione obiettivo per raggiungere la convergenza richiesta.

Recentemente sono stati sviluppati algoritmi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo viene approssimata mediante surrogati [6-8]. L'impiego dei modelli surrogati nei problemi di ottimizzazione può comportare una riduzione del costo computazionale dei processi soprattutto quando la singola valutazione della funzione è molto onerosa. Tuttavia, la strategia per scegliere e utilizzare correttamente un modello surrogato [9, 10] deve essere strutturata in modo appropriato per ottenere risultati soddisfacenti; pertanto la gestione dei modelli surrogati rappresenta un'interessante tematica di ricerca. In letteratura molti surrogati sono basati su processi gaussiani, come i modelli di Kriging [11, 12] che permettono di stimare sia la forma della funzione sia le incertezze del modello. Tuttavia, l'onere computazionale per costruire il surrogato è molto elevato. Anche nel caso di funzioni polinomiali di grado elevato la calibrazione del surrogato è onerosa. L'adozione di surrogati quadratici può invece portare ad una riduzione dell'onere computazionale della procedura in quanto la calibrazione di una parabola può essere effettuata analiticamente senza ricorrere a procedure complesse e iterative

In questo lavoro di ricerca sono stati studiati e testati alcuni algoritmi evolutivi e in seguito ad una serie di test si è giunti alla proposta di un nuovo algoritmo avanzato denominato DE-S. L'algoritmo sviluppato combina la robustezza di un algoritmo evolutivo garantendo di evitare minimi locali e di individuare in modo accurato il minimo globale

della funzione, con l'efficienza computazionale di un surrogato quadratico per approssimare la funzione obiettivo e di un'innovativa strategia per selezionare i punti in cui valutare la funzione durante l'avanzamento della procedura di ottimizzazione. In particolare, la strategia di selezione dei nuovi punti in cui valutare la funzione è definita cercando di bilanciare la ricerca locale (*local exploitation*) e globale (*global exploration*), in altre parole la strategia garantisce sia di esplorare in modo random il dominio di definizione dei parametri sia di concentrare la ricerca nelle zone in cui il surrogato assume valori minimi. Lo scopo è di valutare la funzione obiettivo in un numero limitato di punti, riducendo ulteriormente il numero di nuove valutazioni della funzione, non perdendo accuratezza dei risultati né aumentando la complessità computazionale dell'algoritmo.

Nel primo capitolo è riportata una parte generale riguardante metodi di ottimizzazione locale e globale; in particolare sono presentati i principali algoritmi basati sul gradiente della funzione obiettivo e gli algoritmi genetici tra cui l'algoritmo evolutivo DE (*Differential Evolution*) [13] impiegato come punto di partenza per l'algoritmo sviluppato. L'algoritmo DE è un metodo stocastico di ricerca diretta del minimo globale di una funzione obiettivo e fa uso di una serie di vettori contemporaneamente, le componenti di ciascuno dei quali rappresentano i parametri incogniti nella procedura di ottimizzazione. L'utilizzo contemporaneo di più vettori permette di evitare minimi locali e di individuare il minimo globale che rappresenta la soluzione esatta del problema di ottimizzazione, cioè la migliore combinazione di parametri da assegnare al modello. Lo svantaggio principale dell'algoritmo DE è il numero consistente di valutazioni della funzione necessarie per raggiungere la convergenza e ciò è legato al fatto che l'algoritmo è basato su una ricerca probabilistica del minimo senza considerare alcuna informazione sulla forma della funzione obiettivo.

Nel secondo capitolo è presentata la teoria dei modelli surrogati impiegati per effettuare approssimazioni della funzione obiettivo all'interno di algoritmi di ottimizzazione. In particolare, vengono descritti la struttura classica degli algoritmi che adottano modelli surrogati, le principali tipologie di modello, le procedure di calibrazione dei modelli e i criteri per la gestione dei surrogati attraverso la selezione dei candidati per le successive valutazioni della funzione. Inoltre, è riportata più nel dettaglio l'architettura dell'algoritmo SO-MI [7] che sfrutta modelli surrogati basati su funzioni radiali di base RBF adottando un'articolata strategia di selezione dei punti per le successive valutazioni.

Nel capitolo terzo è mostrato l'algoritmo evolutivo DE-Q [14] che combina l'algoritmo DE con un surrogato quadratico cercando di fittare localmente la funzione obiettivo sfruttando informazioni di forma. L'impiego di un'approssimazione quadratica della funzione permette di ridurre l'onere computazionale preservando l'accuratezza della soluzione. Sono riportati i risultati ottenuti applicando l'algoritmo studiato a problemi di

calibrazione di modelli a elementi finiti di strutture al vero considerando come riferimento risultati sperimentali determinati in seguito a campagne di monitoraggio strutturale. In particolare, le applicazioni hanno riguardato modelli FEM relativi a due passerelle pedonali in acciaio realizzate in Emilia Romagna e al Manhattan Bridge di New York. Infine, sono mostrati i risultati ottenuti risolvendo mediante l'algoritmo DE-Q problemi di calibrazione di leggi costitutive di calcestruzzi fibrorinforzati in seguito a test di laboratorio.

Il quarto capitolo presenta l'architettura dell'algoritmo sviluppato DE-S e i risultati di una serie di analisi di sensitività che hanno permesso di valutare l'influenza di alcuni parametri che governano l'algoritmo sull'accuratezza dei risultati e sull'efficienza della procedura.

Il quinto capitolo riporta una serie di risultati ottenuti testando le prestazioni dell'algoritmo sviluppato in confronto a quelle degli altri algoritmi studiati, affrontando problemi di ottimizzazione di differente natura e complessità. Inizialmente sono stati risolti problemi analitici semplici riguardanti la ricerca del minimo globale di funzioni benchmark; le analisi sono state ripetute più volte per garantire una rappresentazione statistica dei risultati. Successivamente, sono stati affrontati semplici problemi d'identificazione dinamica di una struttura a telaio e di un ponte a singola campata considerando come riferimento valori numerici esatti. Infine è stato considerato un problema di calibrazione del comportamento post-fessurativo di travetti e lastre circolari in calcestruzzo fibrorinforzato utilizzando come riferimento prove sperimentali di laboratorio.

1 METODI DI OTTIMIZZAZIONE LOCALE E GLOBALE

Nell'ambito dell'ingegneria strutturale è sempre più frequente l'utilizzo di modelli numerici, soprattutto quelli a elementi finiti, come supporto per le moderne metodologie di progettazione e verifica, per caratterizzare il comportamento delle strutture in esercizio valutando lo stato di sollecitazione e deformazione e per la stima del livello prestazionale e di sicurezza anche a fronte di eventi sismici o eccezionali. E' importante sottolineare che i risultati numerici dipendono dalle assunzioni considerate in fase di modellazione (ipotesi sulle caratteristiche meccaniche dei materiali, sul grado di vincolo e sull'entità delle masse strutturali e non). L'incertezza su una serie di parametri costituisce la causa principale della non completa attendibilità dei risultati ottenuti e della non rispondenza al comportamento reale della struttura. Pertanto, risulta necessario condurre procedure di ottimizzazione dei modelli in modo tale da individuare la migliore combinazione dei parametri incerti in corrispondenza dei quali il comportamento della struttura modellata si avvicina il più possibile a quello reale. La determinazione dei parametri ottimali che costituiscono la soluzione del problema di ottimizzazione avviene attraverso la ricerca del valore minimo di una funzione obiettivo definita come differenza fra quantità numeriche e sperimentali e/o di riferimento.

Raramente un problema di ottimizzazione può essere risolto in modo diretto, in quanto le funzioni obiettivo sono spesso definite implicitamente, poiché ogni valutazione è ottenuta dalla risoluzione di un problema numerico, tipicamente attraverso un modello agli elementi finiti. Pertanto, è necessario ricorrere a procedure di ricerca attraverso l'applicazione di algoritmi iterativi. Il successo di un processo di ottimizzazione dipende, non solo dalla definizione della funzione obiettivo, ma anche dalla capacità dell'algoritmo scelto di trovare il minimo globale della funzione. Difatti, la funzione obiettivo può presentare diversi minimi locali, ma la soluzione corretta del problema di ottimizzazione è rappresentata unicamente dal minimo globale.

Di seguito si riporta la distinzione fra metodi di ottimizzazione di tipo locale e globale [15, 16] e successivamente, sono presentate le principali caratteristiche e formulazioni di alcuni degli algoritmi più diffusi. Inizialmente sono mostrati gli algoritmi basati sul gradiente della funzione obiettivo, mentre nella seconda parte del capitolo sono presentati un algoritmo evolutivo tra i più diffusi e i metodi basati su superfici di risposta.

Metodi di ricerca locale (Local Optimizers Exploiters)

Rientrano nella categoria dei metodi di ricerca locale gli algoritmi basati sul gradiente della funzione obiettivo (*gradient based optimizers*) [1, 2] che sfruttano informazioni sulla pendenza della funzione in corrispondenza di una serie di punti del dominio. Questi algoritmi includono metodi di ordine zero (metodo di Powell), metodi del primo ordine (metodi *Steepest Descent*, metodi del gradiente coniugato e metodi a metrica variabile tra cui i quasi-Newton) e metodi del secondo ordine (metodi di Newton).

I metodi di ricerca locale risultano efficienti dal punto di vista computazionale, ma possono convergere in minimi locali, in quanto la conoscenza della funzione risulta spesso concentrata localmente sul dominio e alcune zone possono rimanere completamente inesplorate durante la procedura. Infatti, il successo di queste tecniche dipende in modo sostanziale dal punto di partenza del processo, cioè dalla vicinanza dei punti di ricerca iniziali alla soluzione. Pertanto, i metodi di ricerca locale sono alquanto efficienti nel caso la funzione obiettivo sia regolare e presenti un solo minimo globale. Al contrario, i risultati possono essere molto meno soddisfacenti nel caso in cui la funzione presenti più minimi locali. In particolare, se ad un certo punto della procedura di ottimizzazione la ricerca si sofferma in un minimo locale, è necessario rilanciare il processo partendo da un set di punti iniziale differente, definito generalmente in modo random, con la speranza di selezionare punti in prossimità del minimo globale. Quest'operazione può risultare onerosa dal punto di vista computazionale. Inoltre, gli algoritmi possono presentare difficoltà di convergenza quando la funzione obiettivo presenta un valore modesto di gradiente, cioè una zona a limitata sensitività rispetto ai parametri incogniti; tale situazione corrisponde ad un mal condizionamento del problema di ottimizzazione.

Metodi di ricerca globale (Global Explorers)

Rientrano nel gruppo dei metodi di ricerca globale gli algoritmi genetici ed evolutivi [3-5] e gli algoritmi di *Simulated Annealing* [17, 18]. I metodi di ricerca globale sono generalmente più robusti dei metodi basati sul gradiente, in quanto permettono di individuare il minimo globale della funzione esplorando il dominio di definizione dei parametri, indipendentemente dalla scelta dei punti di partenza del processo. La ricerca del minimo globale è governata dalla generazione di gruppi di punti secondo un approccio probabilistico senza considerare informazioni sul gradiente della funzione. Lo svantaggio principale di questi metodi riguarda il numero consistente di valutazioni della funzione obiettivo, reso necessario dalla natura statistica degli algoritmi stessi. Il minimo globale viene, infatti, ricercato in modo random senza sfruttare informazioni sulla forma della funzione obiettivo. Inoltre, individuato l'intorno del minimo globale della funzione sono, tipicamente, necessarie molte iterazioni per ottenere la soluzione con il livello di precisione richiesto. Se la funzione obiettivo presenta un unico minimo i metodi di ricerca globale

possono essere sostituiti da metodi basati sul gradiente della funzione per evitare procedure onerose. Il problema è che spesso la forma della funzione non è nota a priori, ma definita implicitamente. Infine, entrambi i metodi citati si basano su analogie con i fenomeni naturali; in particolare per gli algoritmi genetici ed evolutivi il riferimento è l'evoluzione naturale della specie, mentre per gli algoritmi *Simulated Annealing* i processi di raffreddamento nell'ambito della termodinamica.

1.1 METODI DI OTTIMIZZAZIONE BASATI SUL GRADIENTE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

In questo paragrafo si fa riferimento ai principali algoritmi di ottimizzazione di tipo iterativo che si basano sul gradiente della funzione obiettivo [1, 2].

I metodi di ordine zero prevedono di scegliere in modo random una serie di punti in corrispondenza di ciascuno dei quali valutare la funzione obiettivo, nel seguito denominata $H(\mathbf{x})$; generalmente, all'aumentare del numero di punti \mathbf{x} , aumenta la velocità di convergenza del metodo e l'accuratezza della soluzione trovata.

I metodi del primo ordine risultano più efficienti dei precedenti in quanto sfruttano il gradiente della funzione obiettivo per ottenere informazioni sulla direzione di massima crescita della funzione $H(\mathbf{x})$. Partendo da un vettore iniziale \mathbf{x}_0 , s'identifica un successivo vettore \mathbf{x}_1 che rappresenta il punto di partenza per la successiva iterazione, tale che:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \alpha \nabla H(\mathbf{x}_0) \quad (1.1)$$

dove α viene scelto valutando la funzione e minimizzandola nella corrispondente direzione. Per ciascun nuovo punto si calcola il gradiente e si ripete la procedura fino al raggiungimento della convergenza.

I metodi del secondo ordine sfruttano le informazioni fornite anche dalle derivate seconde della funzione e risultano più efficienti dei metodi precedenti, anche se definire in modo analitico la matrice Hessiana $\hat{\mathbf{H}}$ che contiene le derivate seconde spesso non è possibile. Si consideri lo sviluppo in serie di Taylor di $H(\mathbf{x})$ nell'intorno di \mathbf{x}_0 :

$$H(\mathbf{x}) \cong H(\mathbf{x}_0) + \nabla H(\mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x} \quad (1.2)$$

dove $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Differenziando l'espressione 1.2 rispetto a x_i si ottiene la seguente formulazione,

$$\nabla H(\mathbf{x}) \cong \nabla H(\mathbf{x}_0) + \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_0) \cdot \delta \mathbf{x}, \quad (1.3)$$

e annullando $\nabla H(\mathbf{x})$ si ottiene la condizione di ottimo:

$$\delta \mathbf{x} = -H(\mathbf{x}_0)^{-1} \nabla H(\mathbf{x}_0). \quad (1.4)$$

La strategia di ottimizzazione impiegata per i metodi di qualunque ordine basati sul gradiente della funzione può essere generalizzata dalla seguente espressione:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_{q-1} + \alpha_q^* \mathbf{s}_q \quad (1.5)$$

dove q è il numero di iterazioni, \mathbf{x} è un generico vettore dei parametri, \mathbf{s}_q rappresenta la direzione di ricerca e α_q^* è un valore scalare che indica quanto \mathbf{x} deve variare all'iterazione q e si determina valutando e minimizzando la funzione nella direzione corrispondente. In primo luogo è necessario determinare la direzione di ricerca e successivamente il valore di α_q^* in modo tale da minimizzare la funzione obiettivo.

Di seguito si riporta la descrizione di alcuni dei principali algoritmi di ottimizzazione che si basano sul gradiente della funzione obiettivo e, pertanto, permettono di individuare la direzione di massima pendenza della funzione in corrispondenza di alcuni punti selezionati durante la procedura.

1.1.1 Metodi di ordine zero

Tra i metodi di ordine zero, rientrano gli algoritmi di ricerca random (*random search*) che prevedono di definire in modo random i punti in cui effettuare le valutazioni della funzione all'interno del dominio di definizione dei parametri. Per limitare il tempo necessario alla ricerca, si definisce un range per ciascun parametro. Questo algoritmo è adatto a problemi a più minimi locali, poiché ogni punto appartenente al dominio ha le stesse probabilità di essere scelto come candidato per una valutazione della funzione.

Inoltre, il modello può migliorare significativamente la sua efficacia se, con riferimento alla formulazione generale 1.5 si considerano random i vettori \mathbf{s} , al posto di \mathbf{x} . La determinazione del parametro α può essere effettuata attraverso un processo iterativo; in particolare in prima approssimazione si può fissare il parametro pari all'unità. Se dopo numerose iterazioni non si ha un miglioramento dei risultati, si fissa il parametro ad un valore inferiore e si può continuare a ridurre fino ad un valore minimo stabilito dall'utente. Tuttavia, gli algoritmi di ricerca random sono metodi alquanto inefficaci, pur di semplice implementazione numerica.

Metodo di Powell

Più efficiente del precedente è il metodo di Powell che è basato sul concetto delle direzioni coniugate. In particolare, le direzioni \mathbf{s}_i e \mathbf{s}_j sono coniugate se

$$(\mathbf{s}_i)^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{s}_j = 0 \quad (1.6)$$

dove $\hat{\mathbf{H}}$ è la matrice Hessiana.

La prima fase consiste nell'individuare n direzioni ortogonali \mathbf{s}_i con $i = 1, \dots, n$, cosiddette direzioni coordinate, aggiornando di conseguenza i vettori \mathbf{x}_i secondo l'espressione 1.5. A partire dalle direzioni coordinate si costruiscono le direzioni coniugate. La direzione $n + 1$ si determina collegando il primo e l'ultimo punto individuati nella fase precedente.

Nel dettaglio, la prima direzione di ricerca \mathbf{s}_1 parte da \mathbf{x}_1 , mentre la seconda \mathbf{s}_2 da \mathbf{x}_2 , la terza direzione di ricerca \mathbf{s}_3 che conduce a \mathbf{x}_3 è individuata connettendo \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 e si ottiene come somma di tutti i movimenti precedenti ($\mathbf{s}_3 = \alpha_1^* \mathbf{s}_1 + \alpha_2^* \mathbf{s}_2$). Dopo aver effettuato le ricerche unidirezionali, si crea la direzione coniugata \mathbf{s}_{n+1} e il parametro corrispondente α_{n+1}^* si determina con la seguente formulazione:

$$\mathbf{s}_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* \mathbf{s}_i. \quad (1.7)$$

Ricomincia un nuovo processo di ricerca, eliminando la prima direzione \mathbf{s}_1 e aggiungendo la direzione coniugata \mathbf{s}_{n+1} .

1.1.2 Metodi del primo ordine

I metodi del primo ordine risultano più efficienti dei precedenti in quanto sfruttano informazioni sul gradiente della funzione obiettivo che può essere determinato analiticamente o con metodi alle differenze finite. Questi metodi possono presentare difficoltà per funzioni con derivate discontinue.

Steepest Descent

Nel metodo *Steepest Descent* la direzione di ricerca \mathbf{s} è definita come l'opposto del gradiente della funzione obiettivo H e viene impiegata nell'equazione 1.5 per sviluppare la ricerca monodimensionale:

$$\mathbf{s}_q = -\nabla H(\mathbf{x}_q). \quad (1.8)$$

Generalmente, questo algoritmo è impiegato negli algoritmi più complessi per le fasi di ricerca delle direzioni iniziali.

Metodo del gradiente coniugato (Coniugate Direction)

Il metodo del gradiente coniugato nasce come evoluzione dell'algoritmo *Steepest Descent* e permette di migliorare la velocità di convergenza del processo di ottimizzazione,

mantenendo una limitata complessità computazionale. Concettualmente ricorda il metodo di Powell a parte per l'adozione delle direzioni di ricerca coniugate.

L'algoritmo prevede in fase iniziale di individuare le direzioni di ricerca coniugate secondo l'espressione 1.1 e il vettore di ricerca iniziale secondo la formulazione 1.8, mentre per le iterazioni successive,

$$\mathbf{s}_q = -\nabla H(\mathbf{x}_{q-1}) + \beta_q \mathbf{s}_{q-1}, \quad (1.9)$$

con lo scalare β_q definito come

$$\beta_q = \frac{|\nabla H(\mathbf{x}_{q-1})|^2}{|\nabla H(\mathbf{x}_{q-2})|^2}. \quad (1.10)$$

L'introduzione del parametro β permette di considerare per le successive valutazioni le informazioni fornite dalle iterazioni precedenti e ciò garantisce un miglioramento dell'efficienza del processo rispetto all'algoritmo *Steepest Descent*.

Metodi a metrica variabile (Variable-Metric)

I metodi a metrica variabile conservano le informazioni circa le precedenti iterazioni all'interno di un array n -dimensionale che approssima l'inverso della matrice Hessiana durante l'avanzamento della procedura. La direzione di ricerca all'iterazione q è definita come:

$$\mathbf{s}_q = -\hat{\mathbf{H}}^{-1} \nabla H(\mathbf{x}_q). \quad (1.11)$$

L'introduzione di un'approssimazione dell'inverso della matrice Hessiana $\hat{\mathbf{H}}$ fornisce all'algoritmo una velocità di convergenza paragonabile a quella raggiunta nei metodi del secondo ordine; difatti, i metodi a metrica variabile sono chiamati metodi quasi-Newton.

Data una direzione di ricerca \mathbf{s}_q , viene impiegata l'equazione 1.5 per sviluppare la ricerca monodimensionale. Per la prima iterazione, la matrice $\hat{\mathbf{H}}$ corrisponde ad una matrice identità e la direzione di ricerca iniziale corrisponde alla direzione più ripida (*Steepest Descent*). All'iterazione successiva $q+1$, la nuova matrice $\hat{\mathbf{H}}$ è definita come:

$$\hat{\mathbf{H}}_{q+1} = \hat{\mathbf{H}}_q + \mathbf{G}_q, \quad (1.12)$$

dove \mathbf{G} è una matrice simmetrica definita secondo l'espressione:

$$\mathbf{G}_q = \frac{\sigma + \theta\tau}{\sigma^2} \mathbf{p}\mathbf{p}^T + \frac{\theta - 1}{\tau} \hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{y} (\hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{y})^T - \frac{\theta}{\sigma} [\hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{y} \mathbf{p}^T + \mathbf{p} (\hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{y})^T], \quad (1.13)$$

con

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \mathbf{x}_q - \mathbf{x}_{q-1}, \\
\mathbf{y} &= \nabla H(\mathbf{x}_q) - \nabla H(\mathbf{x}_{q-1}), \\
\sigma &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}, \\
\tau &= \mathbf{y}^T \hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{y}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

La scelta di θ dipende dal metodo adottato appartenente alla famiglia dei metodi a metrica variabile; ad esempio, il metodo DFP (*Davidon-Fletcher-Powell*) prevede un valore di θ nullo, mentre il metodo BFGS (*Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) fissa $\theta = 1$.

Generalmente, i metodi quasi-Newton costruiscono ad ogni iterazione un modello quadratico del problema, descritto dalla seguente espressione:

$$\min_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{L}^T \mathbf{x} + \beta_0 \right), \tag{1.15}$$

dove \mathbf{L} è un vettore costante e β_0 è uno scalare costante. La soluzione del generico problema si ottiene quando le derivate parziali di \mathbf{x} si annullano:

$$\nabla H(\mathbf{x}^*) = \hat{\mathbf{H}} \mathbf{x}^* + \mathbf{L} = \mathbf{0}. \tag{1.16}$$

Il punto di ottimo sarà $\mathbf{x}^* = -\hat{\mathbf{H}}^{-1} \mathbf{L}$, mentre la direzione è data da $\mathbf{s}_q = -\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q) \nabla H(\mathbf{x}_q)$. Generalmente, $\hat{\mathbf{H}}$ è ricavata mediante un'approssimazione effettuata con una tecnica di aggiornamento, tipo BFGS:

$$\hat{\mathbf{H}}_{q+1} = \hat{\mathbf{H}}_q + \frac{k_q k_q^T}{k_q^T \mathbf{s}_q} - \frac{\hat{\mathbf{H}}_q^T \mathbf{s}_q^T \mathbf{s}_q \hat{\mathbf{H}}_q}{\mathbf{s}_q^T \hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{s}_q}, \tag{1.17}$$

con

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_q &= \mathbf{x}_{q+1} - \mathbf{x}_q \\
k_q &= \nabla H(\mathbf{x}_{q+1}) - \nabla H(\mathbf{x}_q),
\end{aligned} \tag{1.18}$$

oppure tipo DFP:

$$\hat{\mathbf{H}}_{q+1} = \hat{\mathbf{H}}_q + \frac{\mathbf{s}_q \mathbf{s}_q^T}{\mathbf{s}_q^T \mathbf{s}_q} - \frac{\hat{\mathbf{H}}_q^T \mathbf{s}_q^T \mathbf{s}_q \hat{\mathbf{H}}_q}{\mathbf{s}_q^T \hat{\mathbf{H}}_q \mathbf{s}_q}. \tag{1.19}$$

1.1.3 Metodi del secondo ordine

Il metodo più conosciuto e sfruttato è il metodo di Newton. Di seguito è riportato lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $H(\mathbf{x})$ arrestato al secondo ordine:

$$H(\mathbf{x}) \cong H(\mathbf{x}_q) + \nabla H(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q) \cdot \delta \mathbf{x}, \quad (1.20)$$

dove q è l'indice dell'iterazione e $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{q+1} - \mathbf{x}_q$. Risolvendo l'equazione 1.20 si ottiene:

$$\delta \mathbf{x} = -\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q)^{-1} \nabla H(\mathbf{x}_q), \quad (1.21)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_q + \delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_q - \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q)^{-1} \nabla H(\mathbf{x}_q). \quad (1.22)$$

Confrontando l'Equazione 1.5 con la 1.22 e fissando $\alpha_q^* = 1$, si ottiene la direzione di ricerca del minimo:

$$\mathbf{s}_q = -\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q)^{-1} \nabla H(\mathbf{x}_q). \quad (1.23)$$

Nella risoluzione numerica, non viene calcolata l'inversa della matrice Hessiana, ma si risolve il sistema di equazioni $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}_q) \mathbf{s}_q = -\nabla H(\mathbf{x}_q)$. Se la funzione obiettivo è quadratica nelle sue variabili, la direzione di ricerca ottenuta con $\alpha_q^* = 1$ fornisce la soluzione in una sola iterazione.

Una delle principali difficoltà del metodo è legata alla matrice Hessiana che può risultare singolare o non definita positiva, come richiesto per garantire il raggiungimento della soluzione. Nel caso si disponga della matrice delle derivate seconde della funzione, il metodo di Newton è favorito rispetto a molti altri. Tuttavia, la maggior parte dei problemi nel campo dell'ingegneria non si presta facilmente al calcolo delle derivate seconde, pertanto, è necessario impiegare tecniche di approssimazione per riformulare il problema in modo che sia risolvibile con il metodo proposto.

1.1.4 Strategie per migliorare la convergenza

Line Search Method

La maggior parte dei metodi descritti ricorre alla soluzione di un sottoproblema per ricavare la direzione di ricerca. Il minimo individuato dalla direzione di ricerca viene generalmente approssimato attraverso un metodo polinomiale basato su interpolazioni o estrapolazioni. Le approssimazioni polinomiali permettono di ottenere una funzione il cui minimo può facilmente essere calcolato. L'interpolazione individua il minimo all'interno dell'intervallo di ricerca, mentre l'extrapolazione localizza il minimo al di fuori del range. I metodi basati sull'interpolazione polinomiale sono generalmente i più efficienti quando la funzione da minimizzare è continua.

Come già mostrato, il problema di ottimizzazione da affrontare impiegando i metodi di qualunque ordine basati sul gradiente della funzione può essere generalizzato dalla seguente espressione:

$$\mathbf{x}_q = \mathbf{x}_q + \alpha_q^* \mathbf{s}_q. \quad (1.24)$$

Se si sceglie un'interpolazione quadratica, i coefficienti sono determinati risolvendo un sistema di equazioni lineari utilizzando ad esempio tre valutazioni della funzione o del gradiente. L'interpolazione ha successo se la funzione approssimante presenta un minimo. Si possono ottenere semplificazioni nella soluzione di queste equazioni, sfruttando particolari caratteristiche dei punti di ricerca. Ad esempio, dati tre punti \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 e i rispettivi valori della funzione obiettivo $H(\mathbf{x}_1)$, $H(\mathbf{x}_2)$ e $H(\mathbf{x}_3)$, il valore minimo della funzione approssimante è dato da:

$$\mathbf{x}_{q+1} = \frac{1}{2} \frac{\beta_{23}H(\mathbf{x}_1) + \beta_{31}H(\mathbf{x}_2) + \beta_{12}H(\mathbf{x}_3)}{\gamma_{23}H(\mathbf{x}_1) + \gamma_{31}H(\mathbf{x}_2) + \gamma_{12}H(\mathbf{x}_3)}, \quad (1.25)$$

con

$$\beta_{ij} = x_i^2 - x_j^2 \quad (1.26)$$

$$\gamma_{ij} = x_i - x_j. \quad (1.27)$$

Inoltre devono essere soddisfatte le seguenti condizioni $H(\mathbf{x}_2) < H(\mathbf{x}_1)$ e $H(\mathbf{x}_2) < H(\mathbf{x}_3)$. Se si sceglie un'approssimazione cubica, i coefficienti sono determinati risolvendo un sistema di equazioni lineari utilizzando ad esempio quattro valutazioni della funzione o del gradiente. L'interpolazione ha successo se la funzione approssimante presenta un minimo e dunque la derivata seconda è positiva. Dati due vettori distinti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 e i rispettivi gradienti, il minimo è dato da:

$$\mathbf{x}_{q+1} = \mathbf{x}_2 - (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \frac{\nabla H(\mathbf{x}_2) + \beta_2 + \beta_1}{\nabla f(\mathbf{x}_1) + \nabla f(\mathbf{x}_1) + 2\beta_2}, \quad (1.28)$$

con

$$\beta_1 = \nabla H(\mathbf{x}_1) + \nabla H(\mathbf{x}_2) - 3 \frac{H(\mathbf{x}_1) - H(\mathbf{x}_2)}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \quad (1.29)$$

$$\beta_2 = (\beta_2^2 - \nabla H(\mathbf{x}_1) \nabla H(\mathbf{x}_2))^{1/2}. \quad (1.30)$$

Trust Region Method

Si supponga di disporre di un punto \mathbf{x} in cui è stata effettuata una valutazione della funzione; l'obiettivo è di individuare un nuovo punto che corrisponda ad un valore migliore della funzione. L'idea che sta alla base del metodo è di approssimare la funzione mediante una funzione g che riproduce accuratamente H in un intorno N di punti vicini a \mathbf{x} , cioè in

prossimità della cosiddetta *Trust Region*, per la quale è necessario definire ampiezza e forma.

Pertanto, il problema di minimizzazione di H può essere riscritto in termini della funzione approssimante g :

$$\min_{\mathbf{s}} \{g(\mathbf{s})\} \quad \mathbf{s} \in N. \quad (1.31)$$

In fase iniziale, si effettua la minimizzazione di $g(\mathbf{s})$ nell'intorno N ; \mathbf{x} viene aggiornato con $\mathbf{x} + \mathbf{s}$ se $H(\mathbf{x} + \mathbf{s}) < H(\mathbf{x})$, altrimenti \mathbf{x} rimane invariato e si restringe la cosiddetta *Trust Region* procedendo con la ripetizione dell'operazione.

Nel metodo standard, l'approssimazione quadratica g è definita dallo sviluppo di Taylor arrestato al secondo ordine di $H(\mathbf{x})$; l'intorno N è generalmente sferico o ellissoidale. Il sottoproblema di minimizzazione della funzione $g(\mathbf{x})$ può essere rappresentato come segue:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \nabla H \quad \|\mathbf{D}\mathbf{s}\| \leq \Delta \right\}. \quad (1.32)$$

dove D è la matrice diagonale ridotta e Δ è uno scalare positivo. Infine, il sottoproblema basato sulla cosiddetta *Trust Region* può essere approssimato attraverso un sottospazio bidimensionale.

1.2 ALGORITMI GENETICI ED EVOLUTIVI

Negli ultimi decenni sono sempre più utilizzati gli algoritmi genetici ed evolutivi [3-5] che si basano sull'imitazione dei meccanismi dell'evoluzione naturale. Come accade in natura, la selezione naturale permette a una popolazione di organismi di adattarsi all'ambiente che li circonda; così fra una popolazione di possibili soluzioni a un problema possono evolvere combinazioni di parametri sempre migliori ed eventualmente con il tempo, ottime. In particolare, negli algoritmi evolutivi si evolve una popolazione di vettori utilizzando operatori che mimano il processo evolutivo della teoria di Darwin. La teoria di Darwin è in grado di spiegare in modo soddisfacente la maggior parte dei fenomeni biologici partendo dallo studio dei meccanismi di adattamento delle specie ad ambienti mutevoli e complessi. Tali prodotti mirabili non sarebbero che il risultato di un processo evolutivo che procede senza uno scopo, guidato da una parte da una componente casuale e dall'altra dalla legge della sopravvivenza del più adatto. Con riferimento agli algoritmi genetici ed evolutivi, di generazione in generazione nascono nuovi individui (vettori dei parametri) facendo accoppiare quelli delle generazioni precedenti. Ogni individuo trasmette quindi parte del suo patrimonio genetico ai discendenti. Pertanto, nel tempo ciascun individuo può generare un altro individuo con mutazioni genetiche, se queste mutazioni portano ad un miglior individuo, questo viene salvato, se no viene scartato. La creazione dei nuovi vettori è essenzialmente un processo stocastico ma, malgrado questo, permette a volte di superare le trappole del minimo locale in cui possono incappare i metodi deterministici. Nonostante si tratti di ricerca non informata, in quanto si parte dal non avere alcuna conoscenza del dominio, la popolazione acquista una maggiore consapevolezza del problema durante il processo evolutivo. Come la natura, gli algoritmi evolutivi sono capaci di generare con successo soluzioni ottimali per problemi difficilmente affrontabili con altre tecniche risolutive.

Gli algoritmi genetici ed evolutivi rientrano nella categoria dei metodi di ricerca diretta e permettono di individuare il minimo globale della funzione escludendo i minimi locali grazie all'utilizzo contemporaneo di numerosi vettori di parametri. Inoltre, possono essere adottati anche quando le funzioni obiettivo non risultano definibili a priori in forma esplicita e per problemi dipendenti da un numero elevato di parametri e vincoli. Generalmente, è però necessario un consistente numero di valutazioni della funzione obiettivo per raggiungere la convergenza richiesta a causa della natura statistica degli algoritmi stessi e della mancanza di informazioni sulla forma della funzione. Nel paragrafo seguente si riporta la descrizione dell'algoritmo evolutivo DE, un metodo classico di ricerca del minimo di una funzione.

1.2.1 Differential Evolution algorithm (DE)

Il *Differential Evolution Algorithm* [13] è un metodo stocastico di ricerca diretta del minimo globale di una funzione obiettivo. L'algoritmo DE utilizza NP vettori $\mathbf{x}_{i,G}$ contemporaneamente, ognuno dei quali è costituito da D componenti che rappresentano i parametri da determinare durante il processo di ottimizzazione. Con la lettera G , si intende la G -esima generazione di vettori, detta *popolazione*. Il numero di vettori della popolazione NP si mantiene costante durante la procedura. L'utilizzo contemporaneo di più vettori di parametri permette di evitare minimi locali e di individuare il minimo globale che rappresenta la soluzione esatta del problema di ottimizzazione.

La prima fase dell'algoritmo prevede la scelta in modo casuale della popolazione iniziale di vettori, considerando ciascun parametro all'interno del proprio range di variabilità. Ad ogni vettore della popolazione viene associato un valore della funzione obiettivo. La fase successiva è definita *Mutation* e prevede la generazione di nuovi vettori, chiamati *mutant vectors* ($\mathbf{v}_{i,G+1}$), combinando linearmente i vettori della popolazione precedente. Si prosegue con l'operazione di *Crossover*, durante la quale si costruiscono nuovi vettori, chiamati *trial vectors* ($\mathbf{u}_{i,G+1}$), ricombinando le componenti dei *mutant vectors* per ottenere una maggior variabilità dei parametri. A questo punto, ciascun *trial*

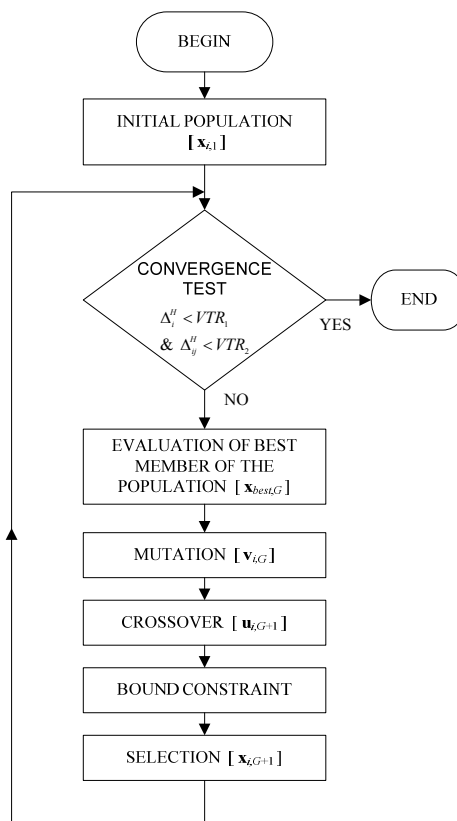


Figura 1.1: Schematizzazione delle fasi salienti dell'algoritmo DE.

vector sarà selezionato per far parte della nuova popolazione (operazione di *Selection*) se risulta associato a un valore della funzione obiettivo inferiore rispetto a quelli prodotti dalla generazione precedente. L'algoritmo è iterativo e si conclude al raggiungimento della convergenza definita seguendo criteri che considerano sia la differenza fra i valori della funzione obiettivo sia la differenza fra le componenti dei vettori.

In Figura 1.1 si riporta un diagramma a blocchi che schematizza le fasi in cui si articola l'algoritmo.

Operazione di Mutation

Per ogni vettore della popolazione G -esima

$$\mathbf{x}_{i,G}, \quad i = 1, 2, \dots, NP,$$

con NP numero di vettori della popolazione, si ottiene il *mutant vector* $\mathbf{v}_{i,G+1}$ sommando a $\mathbf{x}_{i,G}$ il contributo ottenuto dalla differenza pesata tra altri due vettori della stessa popolazione.

Per eseguire l'operazione di *Mutation* è possibile scegliere fra tre strategie distinte: la prima *random*, la seconda *best* e la terza *best-to-rand*, intermedia fra le prime due.

La strategia *random* genera il vettore $\mathbf{v}_{i,G+1}$ secondo l'espressione seguente:

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{r_1,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{r_2,G} - \mathbf{x}_{r_3,G}), \quad (1.33)$$

dove $r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, NP\}$ vengono scelti in modo casuale e F è una costante positiva

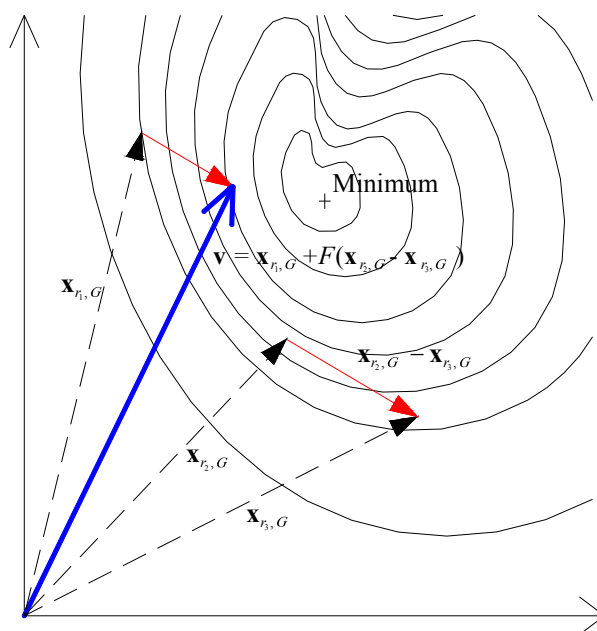


Figura 1.2: Esempio di operazione di *Mutation*, strategia *random* (algoritmo DE).

che controlla l'ampiezza della mutazione, tipicamente fissata al valore di 0.8 [13].

La strategia *best*, a differenza della precedente, definisce il vettore $\mathbf{v}_{i,G+1}$ a partire dal miglior vettore della popolazione precedente $\mathbf{x}_{best,G}$, secondo la formulazione seguente:

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{best,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G}), \quad (1.34)$$

in cui il vettore $\mathbf{x}_{best,G}$ viene identificato, all'interno della popolazione di appartenenza, come il vettore a cui è associato il valore più basso della funzione obiettivo.

Infine, la strategia *best-to-rand* genera il vettore $\mathbf{v}_{i,G+1}$ combinando vettori della popolazione precedente, in particolare il migliore e altri scelti in modo casuale, in accordo con l'espressione

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}_{i,G} + F \cdot (\mathbf{x}_{best,G} - \mathbf{x}_{i,G}) + F \cdot (\mathbf{x}_{r_1,G} - \mathbf{x}_{r_2,G}). \quad (1.35)$$

Nella Figura 1.2, si riporta graficamente un esempio dell'operazione di *Mutation* seguendo la strategia *random*.

Al variare del tipo di problema affrontato, la funzione obiettivo può risultare più o meno regolare e, di conseguenza, presentare un solo minimo o una serie di minimi locali. Pertanto, l'efficienza di ogni strategia dipende proprio dal tipo di problema. In particolare, per funzioni regolari la strategia *best* converge molto più rapidamente delle altre, poiché ogni vettore della nuova popolazione viene generato a partire dal punto a cui corrisponde il valore minimo della funzione obiettivo. Le altre due strategie sono preferibili nel caso in cui la funzione presenti minimi locali o una bassa sensibilità rispetto ai parametri da identificare, in quanto può venire scongiurata la convergenza verso minimi locali.

Operazione di Crossover

In questa fase l'obiettivo è di aumentare la variabilità dei vettori della popolazione. Mescolando in modo random le componenti del vettore originario con quelle del *mutant vector* $\mathbf{v}_{i,G+1}$, si ottiene il *trial vector* $\mathbf{u}_{i,G+1}$, definito dalle seguenti espressioni:

$$\mathbf{u}_{i,G+1} = (u_{1i,G+1}, u_{2i,G+1}, \dots, u_{Di,G+1}) \quad (1.36)$$

$$u_{ji,G+1} = \begin{cases} v_{ji,G+1} & \text{se } rand(j) \leq CR \\ x_{ji,G} & \text{se } rand(j) > CR \end{cases} \quad (1.37)$$

dove u_{ji} è la j -esima componente del vettore \mathbf{u}_i , con $j = 1, 2, \dots, D$ e D numero di parametri per ogni vettore, $rand(j)$ è un numero random estratto da una distribuzione uniforme, CR è la costante di *Crossover* e indica la percentuale di mutazioni considerate nel *trial vector*; si consiglia di scegliere un valore di CR all'interno dell'intervallo [0.6-0.8] [13]. Garantire un'elevata variabilità dei parametri con valori di CR elevati, può favorire la ricerca del

minimo globale della funzione obiettivo, nel caso in cui l'algoritmo sia focalizzato vicino ad un minimo locale. In Figura 1.3, si riporta l'operazione di *Crossover* in modo schematico.

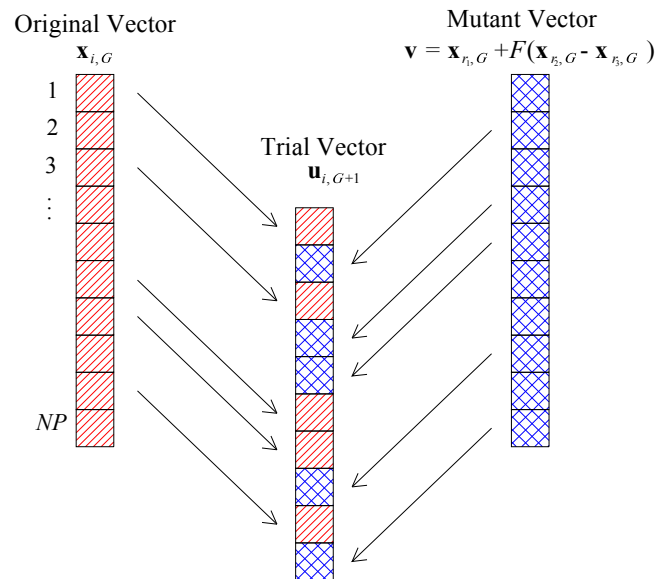


Figura 1.3: Operazione di *Crossover* (algoritmo DE).

Operazione di Selection

L'operazione di *Selection* permette di definire i vettori della popolazione successiva. In particolare, si basa sul confronto di ogni elemento della generazione $G + 1$, ottenuto in seguito all'operazione di *Crossover* \mathbf{u}_i con il vettore $\mathbf{x}_{i,G}$ della popolazione precedente. Il vettore \mathbf{u}_i è scelto come elemento della nuova popolazione solo se il valore della funzione obiettivo ad esso associato risulta inferiore a quello corrispondente al vettore della popolazione precedente. In tal caso, il vettore $\mathbf{u}_{i,G+1}$ sostituisce il vettore $\mathbf{x}_{i,G}$; in caso contrario, $\mathbf{x}_{i,G}$ si mantiene membro della popolazione successiva. La formulazione seguente definisce l'operazione descritta in cui $i = 1, 2, \dots, NP$,

$$\mathbf{x}_{i,G+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,G+1} & H(\mathbf{u}_{i,G+1}) < H(\mathbf{x}_{i,G}) \\ \mathbf{x}_{i,G} & H(\mathbf{u}_{i,G+1}) \geq H(\mathbf{x}_{i,G}). \end{cases} \quad (1.38)$$

Range di variabilità dei parametri

Nelle applicazioni ingegneristiche è fondamentale definire dei range di variabilità dei parametri meccanici incogniti, in modo da garantire durante il processo di ottimizzazione valori dei parametri con un significato fisico e/o meccanico. In particolare il generico parametro appartenente alla popolazione G -esima è vincolato in questo modo,

$$x_{j,G} \in [x_{j,\min}, x_{j,\max}], \quad (1.39)$$

dove $j = 1, 2, \dots, D$, con D numero dei parametri incogniti; $x_{j,min}$ e $x_{j,max}$ rappresentano, rispettivamente, il minimo e il massimo valore che il parametro può assumere.

Per fissare dei vincoli ai parametri possono essere introdotti diversi criteri all'interno dell'algoritmo. Ad esempio l'algoritmo di *bound constraint* prevede una proiezione sul contorno del dominio dei vettori che si trovano fuori dai range di variabilità dei parametri, in seguito all'operazione di *Mutation*. In Figura 1.4 è illustrata in modo schematico l'operazione eseguita dall'algoritmo di *bound constraint*.

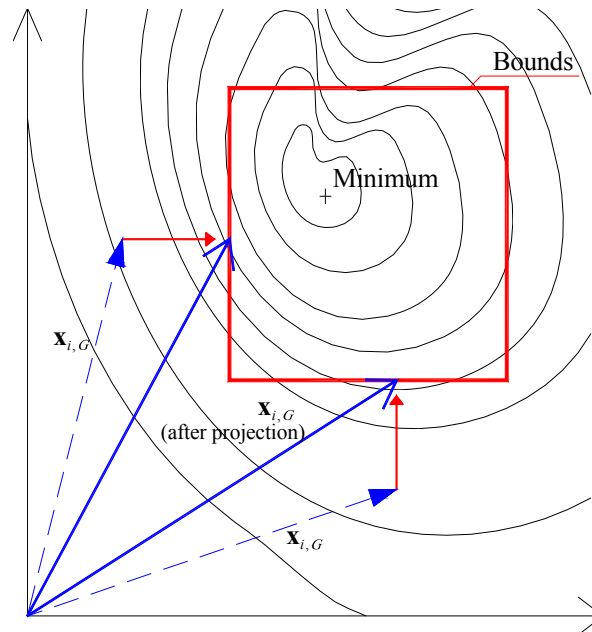


Figura 1.4: Algoritmo di *bound constraint*, proiezione dei vettori sulla frontiera del dominio.

Un altro metodo per vincolare i parametri all'interno di un dominio, potrebbe essere quello proposto da [19], applicabile solo se esiste la soluzione del problema anche per valori dei parametri al di fuori dei range di variabilità imposti. In questo caso, si inserisce nell'espressione della funzione obiettivo un coefficiente, denominato *penalty factor* che incrementa il valore della funzione nel caso in cui un vettore si trovi oltre la frontiera.

Criteri di convergenza

In seguito all'operazione di *Selection*, viene definita una nuova popolazione $G+1$ di vettori, ad ognuno dei quali è associato un valore della funzione obiettivo H . A questo punto, è necessario valutare il raggiungimento della convergenza dell'algoritmo basandosi su due criteri. Per prima cosa, i vettori della popolazione vengono ordinati in base ai valori corrispondenti della funzione obiettivo; in particolare,

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,G+1} < \tilde{\mathbf{x}}_{2,G+1} < \dots < \tilde{\mathbf{x}}_{NP,G+1}$$

in modo che

$$H(\tilde{\mathbf{x}}_{1,G+1}) < H(\tilde{\mathbf{x}}_{2,G+1}) < \dots < H(\tilde{\mathbf{x}}_{NP,G+1}).$$

Il primo criterio prevede il raggiungimento della convergenza quando la differenza Δ_i^H tra i valori della funzione obiettivo H ottenuti per i primi NC vettori della popolazione è inferiore ad un costante VTR_1 . In notazione esplicita,

$$\Delta_i^H = \frac{|H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1}) - H(\tilde{\mathbf{x}}_{i+1,G+1})|}{|H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1})|} < VTR_1, \quad (1.40)$$

per $i = 1, \dots, NC$, con NC che indica il numero di vettori della popolazione sui quali si sceglie di effettuare il controllo di convergenza.

Solo nel caso in cui la funzione obiettivo assume valori modesti del gradiente in prossimità della soluzione, è sufficiente valutare la convergenza unicamente con il primo criterio. In tutti gli altri casi, la convergenza dell'algoritmo si ritiene raggiunta se, oltre al criterio appena descritto, anche un secondo test è soddisfatto. In particolare, deve verificarsi che la differenza Δ_{ij}^x tra le componenti dei primi NC vettori è inferiore ad una costante VTR_2 . In particolare,

$$\Delta_{ij}^x = \frac{|\tilde{x}_{ji,G+1} - \tilde{x}_{ji+1,G+1}|}{|\tilde{x}_{ji,G+1}|} < VTR_2, \quad (1.41)$$

per $i = 1, \dots, NC$ e $j = 1, 2, \dots, D$, con D numero dei parametri incogniti.

1.3 METODI DI OTTIMIZZAZIONE BASATI SU SUPERFICI DI RISPOSTA

I metodi che adottano superfici di risposta prevedono di approssimare la funzione obiettivo originaria utilizzando funzioni semplici ed esplicite. Nella formulazione classica del metodo, la funzione obiettivo viene approssimata con una superficie di risposta calcolata in punti prefissati del dominio e rappresentata da una espressione che combina termini polinomiali al massimo di secondo ordine. L'applicazione di questa metodologia comporta una riduzione del costo computazionale rispetto a metodi di ricerca globale, soprattutto nel caso di analisi complesse nel campo ingegneristico [20]. Vantaggi considerevoli in termini di velocità di convergenza possono essere riscontrati nel caso in cui la funzione obiettivo presenti un solo minimo. Tuttavia, la convergenza può non essere garantita quando la funzione presenta più minimi locali o una forma complessa e quando il numero di parametri è elevato.

La metodologia della superficie di risposta (RSM, *Response Surface Methodology*) è stata originariamente proposta per ottenere le migliori condizioni per processi chimici [21], durante i quali alcune funzioni dovevano essere ottimizzate. L'uso delle superfici di risposta è stato poi esteso ad altri campi [22] specialmente per applicazioni ingegneristiche di affidabilità strutturale [23]. Nelle applicazioni strutturali viene utilizzato tipicamente il secondo grado che permette di ottenere soluzioni con una buona accuratezza a fronte di un ridotto onere computazionale. Infatti, la calibrazione dei parametri di una superficie quadratica si limita alla risoluzione analitica di un sistema lineare. Considerare sviluppi con termini di grado superiore può non comportare un incremento significativo dell'accuratezza dei risultati, ma certamente un maggiore costo computazionale per la determinazione dei parametri della funzione approssimante. Per fissare i punti ottimali, chiamati *sampling points*, in corrispondenza dei quali valutare la funzione obiettivo e definire la superficie di risposta si può far riferimento alla Teoria degli Esperimenti (DOE) [24].

In letteratura [24] si possono trovare applicazioni in cui viene impiegata un'approssimazione quadratica della funzione obiettivo trascurando i termini misti e assumendo dunque sviluppi polinomiali incompleti con lo scopo di limitare lo sforzo computazionale della procedura.

Nel dettaglio, la tecnica della superficie di risposta si basa sulla calibrazione di una funzione di risposta $g(\mathbf{x})$ approssimante la funzione obiettivo effettiva $H(\mathbf{x})$, per ogni vettore dei parametri da ottimizzare \mathbf{x} , ognuno avente dimensione D . Se $g(\mathbf{x})$ è una funzione continua e differenziabile, essa può essere rappresentata localmente in serie di Taylor nell'intorno di un punto arbitrario \mathbf{x}_k :

$$H_k = g(\mathbf{x}_k) + \nabla g(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \nabla^2 g(\mathbf{x}_k) \mathbf{p} \quad (1.42)$$

dove $\nabla g(\mathbf{x}_k)$ è il gradiente della funzione, $\nabla^2 g(\mathbf{x}_k)$ è la matrice Hessiana, mentre \mathbf{p} è un vettore, tale per cui $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{p}$.

Adottando un'approssimazione quadratica completa, l'equazione 1.42 si riscrive in questo modo:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{L} \mathbf{x} + \beta_0 \quad (1.43)$$

dove \mathbf{Q} è la matrice dei coefficienti dei termini quadratici, di dimensioni $D \times D$, \mathbf{L} è il vettore dei coefficienti lineari di dimensione $D \times 1$ e β_0 è il termine costante.

In letteratura [24] è stata proposta la procedura seguente per ottenere una relazione analitica tra i valori dei coefficienti della superficie di risposta e un numero limitato di

sampling points, pari a NS . Per descrivere in modo più semplice la procedura, ma senza perdere di generalità, nel seguito si fa riferimento ad un processo di ottimizzazione a due parametri, considerando una funzione obiettivo in due variabili, x_1 e x_2 . Pertanto, definita una superficie di risposta descritta da un'espressione con termini al più di secondo grado, si riporta l'espressione assunta dalla funzione obiettivo:

$$H(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + \beta_4 x_2^2 + \beta_5 x_1 x_2 \quad (1.44)$$

in cui β_i con $i = 0, \dots, 5$ sono i termini incogniti.

In notazione lineare, si può riscrivere l'equazione 1.44, considerando NS osservazioni della funzione obiettivo:

$$\mathbf{H} = \mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (1.45)$$

in cui le matrici \mathbf{Z} e \mathbf{H} assumono le forme seguenti

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1,1} & x_{2,1} & (x_{1,1})^2 & (x_{2,1})^2 & x_{1,1}x_{2,1} \\ 1 & x_{1,2} & x_{2,2} & (x_{1,2})^2 & (x_{2,2})^2 & x_{1,2}x_{2,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1,NS} & x_{2,NS} & (x_{1,NS})^2 & (x_{2,NS})^2 & x_{1,NS}x_{2,NS} \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_1(x_{1,1}, x_{2,1}) \\ H_2(x_{1,2}, x_{2,2}) \\ \vdots \\ H_{NS}(x_{1,NS}, x_{2,NS}) \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

e $\boldsymbol{\beta}$ è il vettore dei parametri incogniti che definiscono la superficie di risposta. NS deve essere superiore al numero di coefficienti β_i da determinare, per garantire una migliore definizione della superficie di risposta.

Con il metodo dei minimi quadrati si stimano i coefficienti β_i , adottando la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{H} \quad (1.48)$$

Per definire una buona superficie di risposta, è possibile introdurre dei coefficienti peso da attribuire ai *sampling points*, in modo da ottenere migliori performance in prossimità della soluzione cercata. Nella seguente espressione [22, 25], si inserisce la matrice diagonale dei coefficienti peso \mathbf{W} , di dimensioni $NS \times NS$:

$$\boldsymbol{\beta} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W} \mathbf{H}, \quad (1.49)$$

dove i termini w_i della matrice \mathbf{W} possono essere valutati secondo la formulazione seguente:

$$w_i = \exp\left(-\frac{g(\mathbf{x}_i) - H_{best}}{H_{best}}\right), \quad (1.50)$$

in cui

$$H_{best} = \min(g(\mathbf{x}_i)). \quad (1.51)$$

1.4 DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO

Una particolare importanza è rivestita dalla definizione della funzione obiettivo nei problemi di ottimizzazione che può influenzare la sensibilità della soluzione a variazioni dei parametri incogniti. In particolare, definizioni diverse della funzione possono comportare funzioni più o meno regolari accentuando o meno le zone con bassa sensibilità alle variabili ricercate.

La metodologia standard definisce la funzione obiettivo secondo il principio dei minimi quadrati:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [z_i(\boldsymbol{\theta}) - \bar{z}_i]^2, \quad (1.52)$$

dove z_i rappresenta la i -esima grandezza determinata per una generica combinazione di parametri, $\boldsymbol{\theta}$ è il vettore dei parametri incogniti del problema, \bar{z}_i rappresenta la i -esima grandezza di riferimento. Nel caso siano presenti termini di diversa natura, è possibile applicare la procedura ai minimi quadrati pesati, moltiplicando ciascuna quantità per un fattore peso in funzione dell'accuratezza di ciascun termine.

Generalmente le procedure di ottimizzazione sono condotte considerando i parametri incerti normalizzati rispetto ad un valore rappresentativo, ad esempio il valor medio o il limite massimo o il limite minimo, in modo tale da migliorare l'efficienza computazionale delle procedure numeriche. Completata la procedura di ottimizzazione i parametri possono essere ritrasformati per ottenere la soluzione in termini di parametri originali.

1.5 CRITERI DI CONVERGENZA

In generale per qualsiasi algoritmo di ottimizzazione, risulta cruciale la scelta dei criteri di convergenza necessari per definire quando arrestare un processo di ottimizzazione.

I criteri di convergenza devono essere opportunamente selezionati in base al tipo di problema affrontato e alla funzione obiettivo definita.

In seguito si farà sempre riferimento al criterio di convergenza già proposto per l'algoritmo DE. Il raggiungimento della convergenza dell'algoritmo è basato su due criteri. Per prima cosa, i vettori della popolazione vengono ordinati in base ai valori corrispondenti della funzione obiettivo; in particolare,

$$\tilde{\mathbf{x}}_{1,G+1} < \tilde{\mathbf{x}}_{2,G+1} < \dots < \tilde{\mathbf{x}}_{NP,G+1},$$

in modo che

$$H(\tilde{\mathbf{x}}_{1,G+1}) < H(\tilde{\mathbf{x}}_{2,G+1}) < \dots < H(\tilde{\mathbf{x}}_{NP,G+1}).$$

Il primo criterio prevede il raggiungimento della convergenza quando la differenza (Δ_i^H) tra i valori della funzione obiettivo (H) ottenuti per i primi NC vettori della popolazione è inferiore ad un costante (VTR_1). In notazione esplicita,

$$\Delta_i^H = \frac{|H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1}) - H(\tilde{\mathbf{x}}_{i+1,G+1})|}{|H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1})|} < VTR_1, \quad (1.53)$$

per $i = 1, \dots, NC$, con NC che indica il numero di vettori della popolazione sui quali si sceglie di effettuare il controllo di convergenza. In alternativa, può anche essere valutata la differenza fra i valori assunti dalla funzione su due successive iterazioni; se tale differenza risulta inferiore ad una tolleranza VTR_1 , la convergenza si ritiene raggiunta:

$$\Delta_i^H = |H(\tilde{\mathbf{x}}_{i,G+1}) - H(\tilde{\mathbf{x}}_{i+1,G+1})| < VTR_1, \quad (1.54)$$

Solo nel caso in cui la funzione obiettivo assume valori modesti del gradiente in prossimità della soluzione, è sufficiente valutare la convergenza unicamente con il primo criterio. In tutti gli altri casi, la convergenza dell'algoritmo si ritiene raggiunta se, oltre al criterio appena descritto, anche un secondo test è soddisfatto. In particolare, deve verificarsi che la differenza Δ_{ij}^x tra le componenti dei primi NC vettori è inferiore ad una costante (VTR_2). In particolare,

$$\Delta_{ij}^x = \frac{|\tilde{x}_{ji,G+1} - \tilde{x}_{ji+1,G+1}|}{|\tilde{x}_{ji,G+1}|} < VTR_2, \quad (1.55)$$

per $i = 1, \dots, NC$ e $j = 1, 2, \dots, D$, con D numero dei parametri incogniti.

E' necessario comunque precisare che in qualsiasi processo di tipo iterativo, deve sempre essere fissato un numero massimo di iterazioni raggiunto il quale il processo di ricerca del minimo si arresta. In questo modo, se il processo presenta una velocità di

convergenza molto limitata o se si manifestano difficoltà numeriche di convergenza dovute anche ad esempio ad errori di programmazione, si procede all'arresto del processo.

2 SURROGATE MODELLING

Nella maggior parte dei problemi di ottimizzazione non esiste la rappresentazione analitica della funzione obiettivo, ma più spesso le valutazioni della funzione corrispondono a simulazioni numeriche, ad esperimenti di laboratorio o a test di processo. Pertanto, la singola valutazione può risultare onerosa dal punto di vista computazionale nel caso di analisi numeriche o può comportare un costo monetario proibitivo nel caso di test al vero.

Recentemente, sono stati sviluppati algoritmi di ottimizzazione, molti di tipo evolutivo [6-8], in cui la funzione obiettivo è approssimata mediante surrogati (cosiddetti *meta-models*). Le prime ricerche riguardo l'utilizzo di surrogati all'interno di algoritmi evolutivi si sono sviluppate a partire dagli anni '80 e sono state successivamente raccolte in pubblicazioni e testi [26-28]. L'impiego dei modelli surrogati nei problemi di ottimizzazione rappresenta un'interessante tematica di ricerca volta alla riduzione del numero complessivo di valutazioni della funzione per raggiungere la convergenza richiesta, limitando il costo computazionale dei processi soprattutto quando la singola valutazione della funzione è molto onerosa. Ad esempio, l'adozione di modelli surrogati può condurre a buoni risultati per problemi di ottimizzazione nell'ambito della progettazione aerodinamica, della progettazione di materiali innovativi, della gestione dei processi industriali e della calibrazione di modelli numerici di strutture aventi un comportamento fortemente non lineare. Inoltre, gli algoritmi evolutivi con l'introduzione di surrogati (*surrogate-assisted evolutionary algorithms*) hanno da tempo riscontrano un considerevole successo per la risoluzione di problemi d'identificazione dinamica [14] e di ottimizzazione multi-obiettivo, vincolati e multimodali.

Tuttavia, la strategia per scegliere e utilizzare correttamente un modello surrogato (cosiddetta *model management* o *evolution control*) [9, 10] deve essere strutturata in modo appropriato per ottenere risultati soddisfacenti; pertanto la gestione dei modelli surrogati rappresenta un'interessante tematica di ricerca. In particolare, in base alla tipologia di problema affrontato, è necessaria un'appropriata strategia di selezione dei punti in cui effettuare nuove valutazioni per migliorare l'approssimazione della funzione, raggiungendo la soluzione corretta con un numero limitato di valutazioni e quindi ottimizzando dal punto di vista computazionale il processo.

In letteratura molti surrogati sono basati su processi gaussiani, come i modelli di Kriging [10-12] che permettono di stimare sia la forma della funzione sia le incertezze del

modello. Tuttavia, in questi casi l'onere computazionale per costruire il surrogato è molto elevato. Inoltre, sono presenti molti esempi di surrogati rappresentati da funzioni polinomiali [29] che permettono di approssimare la funzione localmente nel caso si adotti un grado limitato del polinomio o globalmente per polinomi di grado elevato. Inoltre, in base alla scelta del grado del polinomio la determinazione dei parametri propri del surrogato si presenta più o meno complessa e onerosa.

Nel presente capitolo, è inizialmente descritta la struttura ricorrente degli algoritmi che impiegano modelli surrogati. Successivamente, sono mostrate alcune tecniche per la stima dei parametri propri dei surrogati a partire da una serie di valutazioni della funzione e sono descritte le tipologie ricorrenti di modelli approssimanti (polinomiali, basati su funzioni RBF e su modelli di Kriging). Inoltre, è approfondita la tematica che riguarda la gestione dei modelli surrogati all'interno di un processo di ottimizzazione e, infine, è presentato nel dettaglio l'algoritmo SO-MI [7] che impiega una complessa strategia di selezione dei candidati per le successive valutazioni della funzione sfruttando informazioni su distanze e predizioni.

2.1 STRUTTURA DEGLI ALGORITMI BASATI SU MODELLI SURROGATI

Gli algoritmi di ottimizzazione basati su modelli surrogati generalmente sono di tipo iterativo e sono caratterizzati dalla medesima struttura di base. Il primo step da affrontare è comune a tutti i problemi di ottimizzazione e riguarda l'identificazione dei parametri che maggiormente influenzano la risposta del sistema (funzione obiettivo) e la definizione dei range di variabilità per ciascun parametro. Dopo la prima fase di analisi, la funzione obiettivo viene valutata in corrispondenza di un campione iniziale di punti, selezionato ad esempio secondo il campionamento *Latin Hypercube* [10] o altre strategie. La scelta del campione iniziale può influenzare la qualità del surrogato e l'efficienza della procedura di ottimizzazione.

A partire dalle valutazioni iniziali e per tutte le successive fasi in cui si articola il processo, lo scopo è di approfondire la conoscenza della funzione obiettivo attraverso un modello approssimante che sia in grado di riprodurre le osservazioni (valutazioni) in modo accurato e di prevedere il comportamento della funzione sull'intero dominio di definizione dei parametri. L'operazione si complica se le osservazioni sono affette da rumore; in questo caso se si adotta un modello surrogato molto flessibile il rischio è di approssimare il rumore senza riuscire a cogliere il reale andamento della funzione di risposta. La scelta della tipologia di surrogato è un aspetto cruciale, in quanto può influenzare non solo la complessità della procedura risolutiva, ma anche il successo del processo di ottimizzazione.

La scelta deve essere guidata dalla conoscenza del problema affrontato e dalle aspettative che possono manifestarsi riguardo il comportamento della funzione obiettivo.

Tornando alla descrizione delle fasi in cui si articola il processo, si consideri il campione di punti iniziale $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^T$ e i corrispondenti valori assunti dalla funzione obiettivo (osservazioni) $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}^T$. Dopo aver effettuato le prime valutazioni, si calibra il surrogato determinando i parametri del modello stesso. La funzione obiettivo $H(\mathbf{x})$ è dunque approssimata mediante un modello surrogato, in generale $H(\mathbf{x}) = s_f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}) + \varepsilon(\mathbf{x})$, dove $s_f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ rappresenta il surrogato con parametri da calibrare $\boldsymbol{\beta}$ e $\varepsilon(\mathbf{x})$ la differenza fra la funzione e il surrogato. Per migliorare l'accuratezza dell'approssimazione è necessario scegliere nuovi punti in cui valutare la funzione seguendo un'appropriata strategia di selezione. Dopo aver valutato la funzione in corrispondenza dei nuovi punti, si effettua un aggiornamento dei parametri del surrogato a partire dalle nuove valutazioni. L'algoritmo seleziona il successivo campione di punti e i parametri del modello surrogato si aggiornano fintanto che non si soddisfano i criteri di convergenza stabiliti.

Riassumendo, le fasi in cui si articola un processo di ottimizzazione che impiega surrogati sono le seguenti:

- 1) costruzione di un campione di punti iniziale e valutazione della funzione obiettivo in corrispondenza di tali punti;
- 2) calibrazione dei parametri del modello surrogato a partire dalle valutazioni dei punti iniziali;
- 3) selezione di un successivo campione di punti in corrispondenza dei quali valutare la funzione obiettivo;
- 4) aggiornamento dei parametri del modello surrogato;
- 5) ripetizione dei punti 3 e 4 finché non si soddisfano i criteri di convergenza definiti.

2.2 STIMA DEI PARAMETRI DEL MODELLO SURROGATO

In questo paragrafo si riportano alcune tecniche per la determinazione dei parametri propri dei modelli surrogati a partire da una serie di valutazioni della funzione obiettivo.

2.2.1 Metodo della massima verosimiglianza (MLE, *Maximum Likelihood Estimation*)

Dato un modello surrogato $s_f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$, con \mathbf{x} vettore dei parametri del problema di ottimizzazione e $\boldsymbol{\beta}$ vettore dei parametri che definiscono la forma del surrogato, si può calcolare la distribuzione di probabilità del set di dati $\{(\mathbf{x}_1, H_1 \pm \varepsilon), (\mathbf{x}_2, H_2 \pm \varepsilon), \dots, (\mathbf{x}_n, H_n \pm \varepsilon)\}$. In particolare, con H_i si intende il valore della funzione obiettivo associato al generico

vettore \mathbf{x}_i , mentre ε rappresenta la differenza fra la stima del surrogato e la valutazione della funzione obiettivo. Se si assume che gli errori ε siano distribuiti in modo casuale e indipendente secondo una distribuzione normale con deviazione standard σ , la densità di probabilità associata al set di dati è la seguente:

$$P = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \prod_{i=1}^n \left\{ \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{H_i - s_f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})}{\sigma} \right)^2 \right] \varepsilon \right\}. \quad (2.1)$$

Per determinare i parametri $\boldsymbol{\beta}$ del modello surrogato, è necessario minimizzare l'espressione riportata di seguito:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n \frac{[H_i - s_f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]^2}{2\sigma^2} - n \ln \varepsilon. \quad (2.2)$$

Se si assumono σ e ε costanti, l'equazione precedente si semplifica e si ottiene l'espressione riconducibile al criterio dei minimi quadrati:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \sum_{i=1}^n [H_i - s_f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]^2. \quad (2.3)$$

2.2.2 Cross-validazione

Analogamente al metodo della massima verosimiglianza, si consideri il set di dati $\{(\mathbf{x}_1, H_1 \pm \varepsilon), (\mathbf{x}_2, H_2 \pm \varepsilon), \dots, (\mathbf{x}_n, H_n \pm \varepsilon)\}$. Il metodo della cross-validazione prevede di suddividere i dati in n_k sottogruppi di uguale numerosità e procede escludendo iterativamente un gruppo alla volta e cercando di stimarlo attraverso i gruppi rimanenti con lo scopo di valutare la bontà del modello surrogato. In particolare, si valuta una funzione di perdita L che corrisponde a una misura dell'errore tra il punto associato alla stima del surrogato e i punti che sono stati rimossi ad ogni iterazione. Per determinare il valore complessivo della funzione L è necessario sommare i contributi dell'errore per ciascuna iterazione. Più nel dettaglio, $\zeta : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n_q\}$ descrive per ciascun sottogruppo la posizione degli n punti, cosiddetti *training points* e $s_f^{-\zeta(i)}(\mathbf{x})$ è il valore assunto dal surrogato in \mathbf{x} ottenuto rimuovendo il sottogruppo $\zeta(i)$, cioè il sottogruppo al quale appartiene la valutazione i . La misura di cross-validazione che viene considerata come una stima dell'errore di predizione presenta la seguente espressione:

$$\varepsilon_{cv}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n L[H_i, s_f^{-\zeta(i)}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]. \quad (2.4)$$

Sostituendo l'errore quadratico alla funzione perdita L , si può riscrivere l'equazione precedente come segue:

$$\varepsilon_{cv}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[H_i, s_f^{-\zeta(i)}(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) \right]^2. \quad (2.5)$$

I parametri $\boldsymbol{\beta}$ del surrogato sono stimati attraverso la minimizzazione di ε_{cv} .

2.3 MODEL TESTING

Se il campione di dati iniziale è numeroso, un gruppo di punti può essere escluso dalle fasi di calibrazione del modello surrogato ed essere impiegato per effettuare il processo di *Model Testing* che prevede la valutazione della bontà del modello attraverso la determinazione dell'errore tra la funzione reale e il surrogato stesso in corrispondenza di alcuni punti. Nel caso in cui il processo preveda strategie di gestione dei modelli surrogati per la selezione dei successivi punti in cui valutare la funzione (si veda in merito il paragrafo 2.5), si ritiene non necessario condurre operazioni di *Model Testing* per valutare l'accuratezza del modello.

Comunque, per testare un modello approssimante si può impiegare l'indice *RMSE* (*Root Mean Squared Error*) che corrisponde alla radice quadrata dell'errore quadratico medio, oppure il coefficiente di correlazione r^2 . Si consideri un gruppo di punti (*test data*) costituito da n_t elementi e le corrispondenti valutazioni della funzione obiettivo e si calcolino l'indice *RMSE* e il coefficiente r^2 secondo le seguenti espressioni:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n_t} (H_i - \tilde{H}_i)^2}{n_t}} \quad (2.6)$$

$$r^2 = \left(\frac{\text{cov}(\mathbf{H}, \tilde{\mathbf{H}})}{\sqrt{\text{var}(\mathbf{H}) \text{var}(\tilde{\mathbf{H}})}} \right)^2 = \left(\frac{n_t \sum_{i=0}^{n_t} H_i \tilde{H}_i - \sum_{i=0}^{n_t} H_i \sum_{i=0}^{n_t} \tilde{H}_i}{\sqrt{\left[n_t \sum_{i=0}^{n_t} H_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n_t} H_i \right)^2 \right] \left[n_t \sum_{i=0}^{n_t} \tilde{H}_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n_t} \tilde{H}_i \right)^2 \right]}} \right)^2 \quad (2.7)$$

dove \tilde{H}_i è la stima (predizione) di H . Il modello risulta tanto più accurato quanto i valori di *RMSE* sono limitati e/o il coefficiente r^2 si avvicina all'unità.

2.4 SCELTA DEL MODELLO SURROGATO

I modelli surrogati possono essere non interpolanti, come ad esempio le regressioni polinomiali, o interpolanti come i modelli di Kriging o le funzioni RBF. Inoltre, in

letteratura sono presentati surrogati misti basati su modelli sia interpolanti sia non. Di seguito si descrivono alcune fra le principali tipologie di modelli surrogati.

2.4.1 Surrogati di tipo polinomiale

Si consideri un campione di punti $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^T$ e i corrispondenti valori assunti dalla funzione obiettivo (osservazioni) $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}^T$. La funzione H si può approssimare con un surrogato polinomiale s_f di grado m , che nel caso di un problema monodimensionale assume la seguente espressione:

$$s_f(x, m, \boldsymbol{\beta}) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots + \beta_m x^m = \sum_{i=0}^m \beta_i x^i. \quad (2.8)$$

Seguendo il metodo della massima verosimiglianza, i parametri $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m\}^T$ sono stimati attraverso la soluzione ai minimi quadrati dell'espressione $\mathbf{Z} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}$, dove \mathbf{Z} è la matrice di Vandermonde:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

e il vettore dei parametri del modello surrogato sono determinati seguendo la seguente espressione:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Z}^+ \mathbf{H} \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{Z}^+ = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T$ è la matrice pseudo-inversa di \mathbf{Z} .

L'approssimazione polinomiale di ordine m di una funzione H corrisponde essenzialmente ad un'espansione in serie di Taylor della funzione stessa che viene troncata dopo $m + 1$ termini [20]. Pertanto, tanto più si sceglie un ordine elevato del polinomio, quanto più si ottiene un'approssimazione della funzione accurata. Tuttavia, aumentando il numero di termini della serie, il surrogato diventa sempre più flessibile e si può incorrere nel fenomeno del cosiddetto *overfitting* che corrisponde a un adattamento del surrogato al rumore che può compromettere la stima della funzione. Si può evitare questo problema effettuando una stima dell'ordine del polinomio m mediante una serie di criteri [30], ad esempio la cross validazione.

Il surrogato polinomiale può essere formulato anche come combinazione lineare di funzioni di base (*basis functions*), secondo la seguente espressione:

$$s_f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_b} \beta_i \psi_i, \quad (2.11)$$

dove ψ_i rappresenta la generica funzione di base. Si ottiene un'approssimazione polinomiale multivariabile in cui la stima dei parametri del modello diventa molto più complessa e onerosa.

2.4.2 Surrogati basati su funzioni radiali di base (*Radial Basis Functions*)

Come è stato accennato nel paragrafo precedente riguardo i surrogati polinomiali multivariabili, una funzione può essere approssimata attraverso una combinazione di semplici funzioni di base. In questo paragrafo sono presentati modelli surrogati di tipo interpolante basati su funzioni di base radiali (RBF, *Radial Basis Functions*), ipotizzando di avere a disposizione dati non affetti da rumore.

Si consideri il campione di punti $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^T$ e i corrispondenti valori assunti dalla funzione obiettivo $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}^T$. Si costruisce un modello surrogato a partire da funzioni di base radiali, secondo l'espressione seguente:

$$s_f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\psi} = \sum_{i=1}^{n_c} \beta_i \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|) \quad (2.12)$$

dove \mathbf{c}_i rappresenta l' i -esimo centro delle n_c funzioni di base e $\boldsymbol{\psi}$ è il vettore che contiene le componenti ψ_i delle funzioni di base, valutate in corrispondenza delle distanze Euclidee fra il generico vettore dei parametri del problema di ottimizzazione \mathbf{x} e i centri \mathbf{c}_i delle funzioni di base. Per ciascuna funzione di base è necessario individuare un solo parametro per costruire il modello surrogato nel caso si scelgano funzioni di base fisse, come ad esempio funzioni lineari ($\psi(r) = r$), cubiche ($\psi(r) = r^3$) o tipo spline ($\psi(r) = r^2 \ln r$). Risulta invece necessaria una procedura più complessa per stimare i parametri di un modello surrogato costruito impiegando funzioni di base parametriche, come ad esempio funzioni di tipo gaussiano,

$$\psi(r) = e^{-r^2/(2\sigma^2)}, \quad (2.13)$$

di tipo multiquadratico,

$$\psi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{1/2}, \quad (2.14)$$

oppure di tipo multiquadratico inverso

$$\psi(r) = (r^2 + \sigma^2)^{-1/2}. \quad (2.15)$$

La stima dei parametri $\boldsymbol{\beta}$ del modello generalmente si conduce attraverso l'imposizione di condizioni d'interpolazione, secondo l'espressione seguente:

$$s_f(\mathbf{x}_j) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\Psi} = \sum_{i=1}^{n_c} w_i \psi(\|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i\|) = H(\mathbf{x}_j) \quad \text{con } j = 1, \dots, n. \quad (2.16)$$

Il vantaggio dei surrogati costruiti con funzioni di base risiede nel fatto che l'espressione del modello approssimante (equazione 2.16) è lineare rispetto ai pesi delle funzioni di base $\boldsymbol{\beta}$, mentre il surrogato può stimare anche funzioni di risposta non lineari.

Si può facilmente notare che nel caso in cui il sistema di equazioni che rappresenta il surrogato sia quadrato ($n_c = n$) è garantita l'unicità della soluzione. Inoltre, nel caso in cui i centri delle funzioni di base coincidono con i punti appartenenti al campione di dati considerato, cioè $\mathbf{c}_i = \mathbf{x}_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, dalla condizione 2.16 si giunge all'espressione seguente:

$$\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{H}, \quad (2.17)$$

dove $\boldsymbol{\Psi}$ è la matrice di Gram ed è definita come

$$\Psi_{i,j} = \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \quad \text{con } i, j = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

Per stimare i parametri $\boldsymbol{\beta}$, è necessario risolvere il sistema seguente, la cui complessità risolutiva dipende dalla scelta delle funzioni di base,

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{H}. \quad (2.19)$$

Ad esempio, l'impiego di funzioni di base di tipo gaussiano o multiquadratico inverso conduce alla generazione di una matrice di Gram simmetrica e definita positiva [31] che garantisce una risoluzione del problema attraverso una fattorizzazione di Cholesky. E' importante sottolineare che nel caso due punti del campione di dati in cui la funzione obiettivo è valutata siano vicini, si può incorrere nel mal condizionamento della matrice di Gram con conseguente fallimento della fattorizzazione di Cholesky. Questa condizione è difficilmente realizzabile in fase iniziale in cui generalmente il campione di dati è uniformemente distribuito all'interno del dominio di definizione dei parametri, mentre può capitare nelle fasi successive in cui vengono aggiunti punti anche in prossimità di punti già valutati per migliorare l'accuratezza del surrogato.

Oltre alla determinazione dei parametri $\boldsymbol{\beta}$, è necessario definire anche i parametri introdotti dalle funzioni di base, ad esempio σ nel caso di funzioni di tipo gaussiano. Una corretta stima di $\boldsymbol{\beta}$ assicura una buona approssimazione della funzione obiettivo con il modello surrogato, mentre un'adeguata valutazione dei parametri propri delle funzioni di base permette di minimizzare l'errore del modello surrogato. In particolare, i parametri

propri delle funzioni di base vengono generalmente determinati all'inizio della procedura di ottimizzazione, mentre i parametri del surrogato sono aggiornati ad ogni nuova valutazione della funzione.

2.4.3 Surrogati basati sul modello di Kriging

In letteratura molti surrogati sono basati su processi gaussiani, come i modelli di Kriging [10-12]. Questi modelli prevedono l'impiego di una particolare funzione di base, rappresentata dalla seguente espressione:

$$\psi_{ik} = \exp\left(-\sum_{j=1}^D \theta_j |x_{ij} - x_{kj}|^{p_j}\right). \quad (2.20)$$

La funzione di base di tipo gaussiano (equazione 2.13) dipende dal parametro σ , mentre la funzione di Kriging presenta il vettore $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_D\}^T$ con D dimensione di \mathbf{x} , che garantisce una differente ampiezza per ciascuna funzione di base considerata. Inoltre, la base gaussiana ha fissato l'esponente pari a 2, mentre la funzione di Kriging permette di variare l'esponente delle basi secondo il vettore $\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_D\}^T$ in cui generalmente $p_j \in [1, 2]$. Fissando p_j pari a 2 e θ_j costanti, la funzione di Kriging coincide con la funzione gaussiana.

Si consideri ancora il campione di punti \mathbf{X} e i corrispondenti valori assunti dalla funzione obiettivo \mathbf{H} . In questo ambito, si sceglie di considerare le valutazioni H_i appartenenti ad un processo stocastico; di seguito questo concetto viene sfruttato impiegando un set di vettori definiti in modo casuale, caratterizzati da una media μ ,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ H(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Le variabili casuali sono correlate l'una con l'altra utilizzando la seguente espressione:

$$\text{cor}[H(\mathbf{x}_i), H(\mathbf{x}_h)] = \exp\left(-\sum_{j=1}^D \theta_j |x_{ij} - x_{hj}|^{p_j}\right). \quad (2.22)$$

È possibile costruire una matrice di correlazione delle valutazioni:

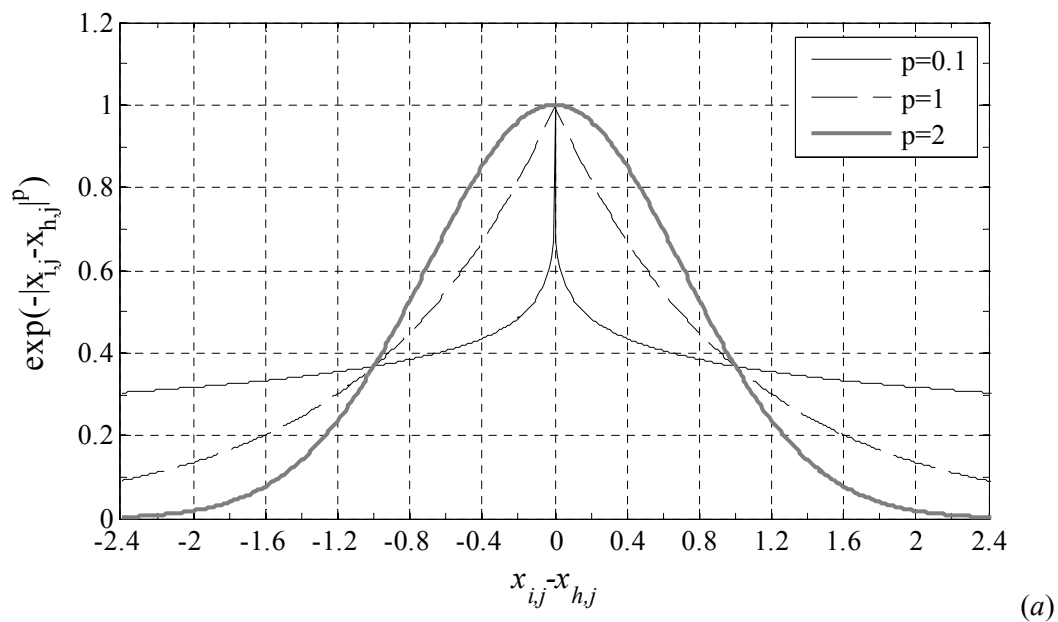
$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{pmatrix} \text{cor}[H(\mathbf{x}_1), H(\mathbf{x}_1)] & \cdots & \text{cor}[H(\mathbf{x}_1), H(\mathbf{x}_n)] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cor}[H(\mathbf{x}_n), H(\mathbf{x}_1)] & \cdots & \text{cor}[H(\mathbf{x}_n), H(\mathbf{x}_n)] \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

e una matrice di covarianza

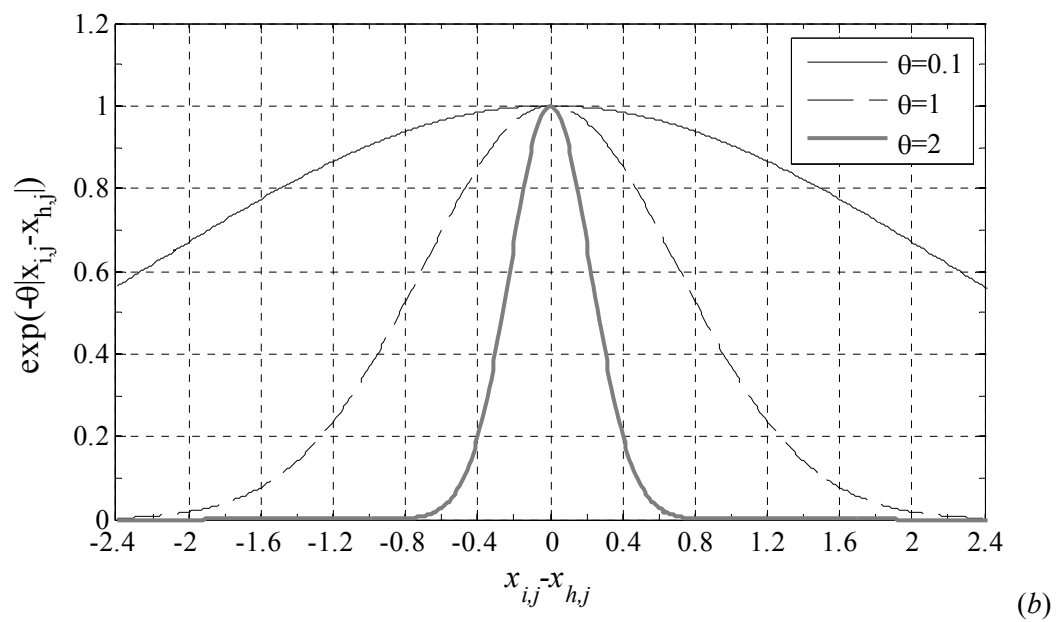
$$\text{Cov}(\mathbf{H}, \mathbf{H}) = \sigma^2 \Psi. \quad (2.24)$$

Si può notare come le correlazioni dipendano dalla distanza assoluta fra punti del dominio $|x_{ij} - x_{hj}|$ e dai valori dei parametri p_j e θ_j .

In Figura 2.1a è riportata la variazione della correlazione rispetto alla distanza tra due punti del dominio al variare del parametro p_j che assume i valori 0.1, 1, 2. In particolare, quando due punti sono vicini, la correlazione è buona, quindi:



(a)



(b)

Figura 2.1: Correlazione al variare di p_j (a) e θ_j (b).

$$x_{ij} - x_{hj} \rightarrow 0 \text{ e } \exp\left(-|x_{ij} - x_{hj}|^{p_j}\right) \rightarrow 1, \quad (2.25)$$

al contrario, più i punti sono distanti, più la correlazione tende ad annullarsi, cioè

$$x_{ij} - x_{hj} \rightarrow \infty \text{ e } \exp\left(-|x_{ij} - x_{hj}|^{p_j}\right) \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

Per $p_j = 2$, la correlazione varia in modo graduale, mentre diminuendo p_j , aumenta la velocità con cui la correlazione decresce all'aumentare della distanza fra i punti, tanto che per $p_j = 0.1$ la correlazione non è rilevata ed è presente una discontinuità in prossimità dell'annullarsi della distanza.

In Figura 2.1b è riportata la variazione della correlazione fra le valutazioni rispetto alla distanza dei punti al variare di θ_j . Per valori limitati di θ_j , la correlazione è elevata per tutti i punti; al contrario per valori superiore di θ_j , la correlazione è minore. Inoltre, le componenti di $\boldsymbol{\theta}$ possono fornire informazioni utili riguardo l'influenza di ciascun parametro incognito sulla risposta del problema di ottimizzazione, facilitando l'individuazione dei parametri più importanti. Soprattutto nei problemi di ottimizzazione a molti parametri, nei quali risulta difficoltoso visualizzare l'andamento della funzione obiettivo e investigare l'influenza dei parametri, consultare il vettore $\boldsymbol{\theta}$ può agevolare la conoscenza del problema, pur non fornendo informazioni riguardo l'interazione fra i parametri del problema.

Per stimare $\boldsymbol{\theta}$ e \mathbf{p} si può sfruttare il metodo della massima verosimiglianza descritto al paragrafo 2.2.1, in cui gli errori ε corrispondono agli errori nella valutazione della funzione obiettivo, mentre si trascurano gli errori del modello surrogato. Nel caso dei modelli di Kriging non si considera alcun errore ε , in quanto si assumono trascurabili gli errori nelle valutazioni della funzione e si escludono anche gli errori di modello poiché in questa trattazione i surrogati sono di tipo interpolante.

La funzione di densità di probabilità associata alle n valutazioni $H_i = H(x_i)$ ha la seguente espressione:

$$L(H_1, \dots, H_n | \mu, \sigma) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{\sum (H_i - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (2.27)$$

che può essere espressa rispetto ai punti associati alle valutazioni

$$L = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2} |\boldsymbol{\Psi}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{H} - \mathbf{1}\mu)^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{1}\mu)}{2\sigma^2}\right]. \quad (2.28)$$

dove $\mathbf{1}$ è un vettore unitario di dimensioni $n \times 1$. Per semplificare il problema di massimizzazione di L , si considera il logaritmo naturale della funzione:

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2} \ln|\Psi| - \frac{(\mathbf{H} - \mathbf{1}\mu)^T \Psi^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{1}\mu)}{2\sigma^2}. \quad (2.29)$$

Annullando la derivata dell'equazione 2.29, si ottiene una stima della massima verosimiglianza per μ e σ^2 :

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{1}^T \Psi^{-1} \mathbf{y}}{\mathbf{1}^T \Psi^{-1} \mathbf{1}} \quad (2.30)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\mathbf{H} - \mathbf{1}\mu)^T \Psi^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{1}\mu)}{n}. \quad (2.31)$$

Sostituendo le soluzioni trovate nell'equazione 2.29 e rimuovendo i termini costanti, si ottiene la funzione di verosimiglianza concentrata in termini logaritmici (*concentrated ln-likelihood function*):

$$\ln(L) \approx -\frac{n}{2} \ln(\hat{\sigma}^2) - \frac{1}{2} \ln|\Psi|. \quad (2.32)$$

Massimizzando l'equazione 2.32 si individuano i parametri incogniti θ e \mathbf{p} ; diversamente da quanto descritto per la determinazione dei parametri μ e σ^2 , in questo caso risulta necessario applicare una tecnica numerica di ottimizzazione per risolvere il problema di massimizzazione in quanto la funzione non risulta differenziabile. Metodi di ottimizzazione di tipo globale basati su algoritmi genetici o algoritmi tipo *Simulated Annealing* producono i risultati migliori.

Dopo aver descritto le tecniche per determinare i parametri di un modello di Kriging, di seguito è riportata la procedura per effettuare una nuova stima della funzione obiettivo a partire da una serie di valutazioni (dati osservati). Supponendo di aver individuato i parametri di correlazione θ e \mathbf{p} attraverso il metodo della massima verosimiglianza considerando come riferimento un set di valutazioni H_i , una nuova stima (predizione) \hat{H} in corrispondenza di un punto \mathbf{x} dovrà risultare coerente sia con le valutazioni disponibili sia con i parametri di correlazione fissati. Pertanto, dati i parametri di correlazione, \hat{H} è determinata massimizzando la verosimiglianza del campione di dati e della predizione stessa. Per prima cosa si definisce un nuovo vettore $\tilde{\mathbf{H}} = \{\mathbf{H}^T, \hat{H}\}^T$, riunendo il vettore delle valutazioni disponibili e la nuova stima ricercata e si definisce il vettore delle correlazioni Ψ fra dati osservati e nuova predizione:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \text{cor}[H(\mathbf{x}_1), H(\hat{\mathbf{x}})] \\ \vdots \\ \text{cor}[H(\mathbf{x}_n), H(\hat{\mathbf{x}})] \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Si può costruire la matrice di correlazione associata $\tilde{\Psi}$

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} & \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

e la funzione di verosimiglianza in termini logaritmici (*ln-likelihood*)

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\hat{\sigma}^2) - \frac{1}{2} \ln|\tilde{\Psi}| - \frac{(\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{1}\hat{\mu})^T \tilde{\Psi}^{-1} (\tilde{\mathbf{H}} - \mathbf{1}\hat{\mu})}{2\hat{\sigma}^2}, \quad (2.35)$$

in cui solo l'ultimo termine dipende da \hat{H} ; pertanto, in fase di massimizzazione è sufficiente considerare tale termine

$$\ln(L) \approx -\frac{\begin{pmatrix} \mathbf{H} - \mathbf{1}\hat{\mu} \\ \hat{H} - \hat{\mu} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{\Psi} & \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{\psi}^T & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H} - \mathbf{1}\hat{\mu} \\ \hat{H} - \hat{\mu} \end{pmatrix}}{2\hat{\sigma}^2}. \quad (2.36)$$

Introducendo nell'Equazione 2.36 la matrice inversa di $\tilde{\Psi}$ e rimuovendo i termini che non dipendono dalla predizione, si ottiene

$$\ln(L) \approx \left(\frac{-1}{2\hat{\sigma}^2(1 - \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi})} \right) (\hat{H} - \hat{\mu})^2 + \left(\frac{\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{1}\hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2(1 - \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi})} \right) (\hat{H} - \hat{\mu}). \quad (2.37)$$

Il massimo della funzione 2.37 si ottiene annullando la derivata rispetto a \hat{H} :

$$\left(\frac{-1}{\hat{\sigma}^2(1 - \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi})} \right) (\hat{H} - \hat{\mu}) + \left(\frac{\boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{1}\hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2(1 - \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi})} \right) = 0. \quad (2.38)$$

Pertanto, l'espressione della massima verosimiglianza per \hat{H} è la seguente:

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = \hat{\mu} + \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{\Psi}^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{1}\hat{\mu}). \quad (2.39)$$

Nell'espressione 2.39 le funzioni di base sono contenute in $\boldsymbol{\psi}$ e, pertanto, il modello di Kriging pur risultando più complesso rispetto ai modelli basati su funzioni di base RBF, è comunque rappresentato da una somma pesata di funzioni di base. All'interno dei modelli di Kriging si possono tenere in conto sia gli errori di modello sia gli errori legati alle valutazioni; in questo caso la formulazione del problema risulterebbe ancora più complessa. Inoltre, il modello di Kriging viene impiegato per la stima delle incertezze del modello stesso rispetto alla funzione obiettivo.

2.4.4 Riflessioni riguardo la scelta del modello surrogato

La calibrazione dei modelli surrogati basati su funzioni polinomiali avviene attraverso la risoluzione di un problema ai minimi quadrati e l'onere computazionale risulta

fortemente dipendente dalla scelta del grado del polinomio. In letteratura, molte proposte sono state avanzate riguardo l'impiego di modelli surrogati per approssimare la funzione obiettivo globalmente mediante l'adozione di polinomi di grado elevato [29]. Generalmente, per ottenere un'approssimazione globale accurata della funzione è richiesta una complessità computazionale notevole poiché è necessario un numero rilevante di valutazioni e, inoltre la minimizzazione del surrogato risulta onerosa e deve essere effettuata ogni volta che si aggiungono nuove valutazioni. Inoltre, per gradi molto elevati il surrogato diventa sempre più flessibile e si può incorrere nel fenomeno del cosiddetto *overfitting* che corrisponde a un adattamento del surrogato al rumore presente nelle osservazioni che può compromettere la stima della funzione. L'adozione di surrogati quadratici può invece portare a una riduzione dell'onere computazionale della procedura poiché la calibrazione di una parabola può essere effettuata analiticamente senza ricorrere a procedure complesse e iterative, ma il surrogato risulta poco flessibile e la funzione obiettivo non viene approssimata globalmente in modo accurato.

Tuttavia, nella maggior parte delle procedure di *Model Updating* nell'ambito dell'ingegneria strutturale, interessa investigare la forma della funzione obiettivo solo nell'intorno del minimo globale della funzione, mentre non è necessario disporre di un surrogato che stimi in modo accurato la funzione su tutto il dominio di definizione [32]. L'impiego di un surrogato polinomiale di secondo grado permette di stimare localmente la funzione obiettivo e, in prossimità del minimo globale, l'approssimazione quadratica fornisce una buona accuratezza e una velocità di convergenza significativa. Inoltre, se la funzione presenta solo un minimo globale, il surrogato quadratico fornisce la soluzione del problema con un numero ancor più limitato di valutazioni.

La complessità computazionale per la calibrazione di surrogati basati su funzioni RBF dipende dalla scelta delle funzioni di base; in particolare, per funzioni di base fisse (lineari, cubiche, ...) è necessario determinare un solo parametro, mentre per funzioni parametriche è necessaria una procedura più complessa.

In letteratura sono innumerevoli gli esempi di applicazione dei modelli di Kriging che permettono di stimare sia la forma della funzione sia le incertezze del modello. Tuttavia, l'onere computazionale per costruire il surrogato è molto elevato, in quanto la stima dei parametri propri del modello necessita di un'ulteriore tecnica di ottimizzazione basata ad esempio su algoritmi di tipo genetico. Questi modelli potrebbero essere adottati per problemi in cui la singola valutazione della funzione necessita di uno sforzo computazionale molto elevato, tale per cui potrebbe valere la pena incrementare l'onere computazionale del processo per la calibrazione dei parametri del modello stesso, a fronte di una riduzione del numero complessivo di valutazioni della funzione. Dovrebbe comunque essere effettuata un'attenta analisi riguardo la convenienza numerica in base alle caratteristiche del problema affrontato.

2.5 GESTIONE DEI MODELLI SURROGATI (*MODEL MANAGEMENT*)

Si consideri un campione iniziale di punti $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}^T$ e i corrispondenti valori assunti dalla funzione obiettivo $\mathbf{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}^T$. A partire da questo set di dati si costruisce un'approssimazione della funzione mediante l'impiego di un modello surrogato. Poiché il surrogato costituisce solo un'approssimazione della funzione che deve essere ottimizzata, conviene migliorare l'accuratezza del modello sfruttando ulteriori valutazioni in corrispondenza di nuovi punti (*infill points*). Le questioni principali da affrontare riguardano la scelta dei punti in cui effettuare nuove valutazioni durante una generica procedura di ottimizzazione e la definizione del numero di punti, in modo tale da limitare il più possibile il costo computazionale del processo mantenendo l'accuratezza della soluzione finale.

Esistono diverse scuole di pensiero che si distinguono per la strategia impiegata per la selezione dei nuovi punti per le successive valutazioni. Si può mirare a migliorare la conoscenza della funzione obiettivo e quindi l'accuratezza del modello approssimante effettuando nuove valutazioni in prossimità del valore ottimale stimato dal surrogato che potenzialmente rappresenta una buona stima della funzione (*local exploitation*) [6, 10]. Oppure, si può impiegare una strategia per migliorare l'accuratezza globale del modello, effettuando nuove valutazioni in corrispondenza di zone inesplorate del dominio dei parametri (*global exploration*) [33, 34]. Infatti, potrebbero esserci buone possibilità di trovare una soluzione migliore in zone non ancora esplorate in cui il grado d'incertezza è ancora elevato. Infine, possono essere considerate entrambe le strategie all'interno dello stesso processo di ottimizzazione in modo tale da garantire un'esplorazione del dominio per individuare la zona in cui potenzialmente è presente il minimo globale della funzione e successivamente, approfondire la ricerca solo in quella zona per migliorare l'accuratezza della soluzione velocizzando il raggiungimento della convergenza del processo.

Un'altra strategia prevede di suddividere i punti appartenenti ad una generica popolazione in una serie di gruppi (*cluster*) ed effettuare alcune nuove valutazioni per ciascun cluster in corrispondenza o del punto più vicino al centro del cluster o del miglior punto [35]. Inoltre, si cita la strategia di Gutmann [36] che si basa sulla risoluzione di un problema di ottimizzazione ausiliario in cui viene minimizzata la cosiddetta misura di *bumpiness*.

Di seguito si riportano alcune delle principali strategie (cosiddette *infill criteria*) [9, 10] per la selezione dei punti successivi in cui effettuare nuove valutazioni della funzione in modo da migliorare l'accuratezza del modello surrogato e agevolare la ricerca del minimo globale della funzione obiettivo.

2.5.1 Prediction Based Exploitation

Selezionare nuovi punti in cui effettuare successive valutazioni in corrispondenza dei valori minimi del modello surrogato può velocizzare il raggiungimento della convergenza del processo. Si consideri un esempio in cui la funzione obiettivo è caratterizzata dall'espressione seguente [10]:

$$f(x) = (6x - 2)^2 \sin(12x - 4) \quad (2.40)$$

con $x \in [0, 0.5]$.

Per individuare il minimo globale della funzione, si sceglie di utilizzare un modello surrogato interpolante basato su funzioni polinomiali. Il primo step prevede di calibrare il surrogato a partire da tre valutazioni (Figura 2.2a), per cui si ottiene un'approssimazione scarsa della funzione. Aggiungendo un nuovo punto in corrispondenza del minimo del surrogato, effettuando una nuova valutazione della funzione e ricalibrando il modello si ottiene il surrogato riportato in Figura 2.2b che approssima in modo più accurato la funzione in prossimità del minimo individuato precedentemente. Proseguendo con nuove valutazioni in corrispondenza dei minimi del modello approssimante, il processo converge al minimo della funzione e si ottiene un surrogato che approssima in modo accurato la funzione sull'intero dominio (Figura 2.2c).

Il minimo del surrogato potrebbe trovarsi però in prossimità di un minimo locale della funzione e pertanto la procedura potrebbe non individuare la soluzione corretta del problema. In altri casi, l'aggiunta di nuovi punti in corrispondenza dei valori minimi del surrogato non permette di migliorare l'accuratezza del modello approssimante, in quanto l'andamento del surrogato non è modificato in modo sufficiente da dirottare la ricerca lontano da "valli piatte" eventualmente presenti nella funzione (si veda a titolo di esempio la Figura 2.3 nella quale è stato ripetuto il processo di calibrazione del surrogato nell'intervallo $x \in [0, 1]$). L'impiego di modelli interpolanti di solito garantisce una stima più accurata della funzione con l'aggiunta di nuovi punti di valutazione. In generale, nel caso di funzioni obiettivo con più minimi locali è necessario disporre di una strategia per selezionare i punti per le successive valutazioni che permetta di distogliere l'attenzione dalla zona del dominio in cui il surrogato stima un minimo ed esplorare anche altre zone sconosciute in modo da evitare la convergenza in minimi locali. Di seguito si riporta la descrizione di una strategia basata sull'esplorazione.

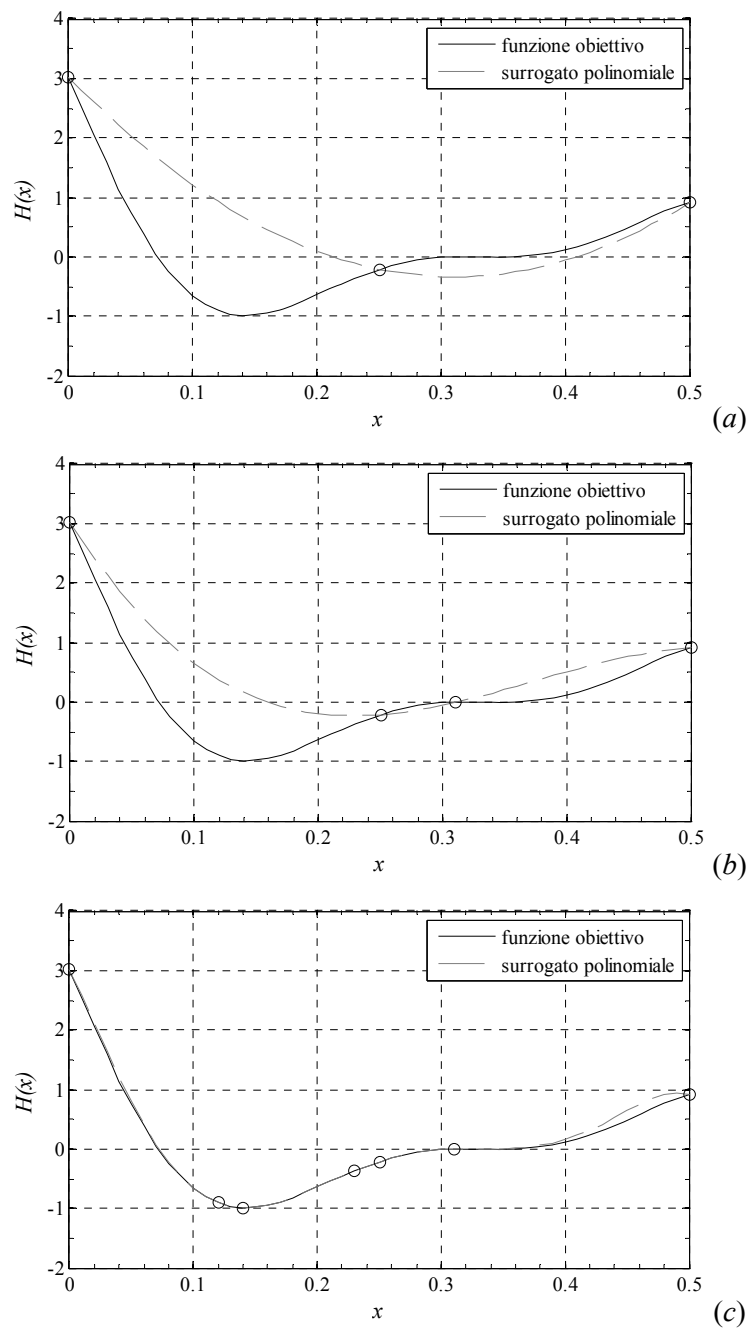


Figura 2.2: La funzione obiettivo (linea continua) e il modello surrogato (linea tratteggiata) basato su funzioni polinomiali - surrogato calibrato considerando tre valutazioni della funzione (a), surrogato aggiornato in seguito ad una nuova valutazione in corrispondenza del minimo del surrogato stesso (b), raggiungimento della convergenza dopo 7 nuove valutazioni in corrispondenza dei valori minimi del surrogato (c).

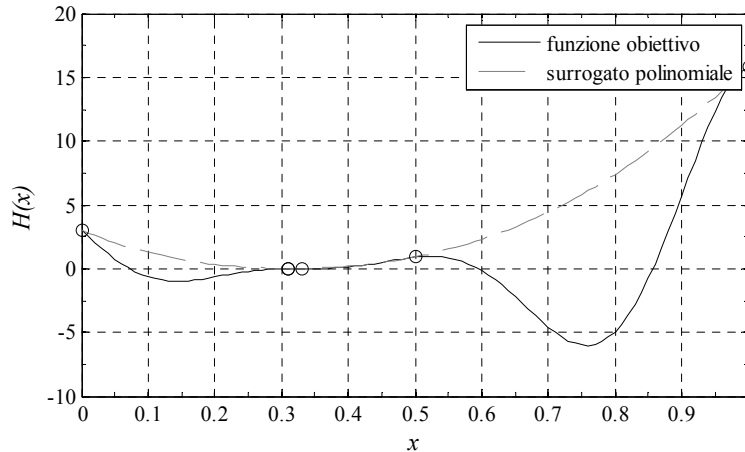


Figura 2.3: La funzione obiettivo (linea continua) e il modello surrogato (linea tratteggiata) basato su una funzione polinomiale - surrogato in stallo a causa della forma della funzione obiettivo.

2.5.2 Error Based Exploration

L'impiego di surrogati basati su processi gaussiani, tipo Kriging, permette di calcolare l'errore di predizione del modello (*estimated error*) che può essere impiegato per selezionare nuovi punti in cui valutare la funzione obiettivo. In particolare, i nuovi punti saranno posizionati dove risulta elevata l'incertezza dei valori stimati dal modello surrogato.

L'errore quadratico medio (*Mean Squared Error*, MSE) di un modello surrogato basato su un processo gaussiano presenta la seguente espressione, in cui generalmente il terzo termine all'interno della parentesi è molto piccolo e può essere trascurato:

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{x}) = \sigma^2 \left[1 - \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi} + \frac{1 - \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \boldsymbol{\psi}}{\mathbf{1}^T \boldsymbol{\Psi}^{-1} \mathbf{1}} \right]. \quad (2.41)$$

L'errore di predizione del modello così calcolato è prossimo a zero in corrispondenza dei punti in cui la funzione è stata valutata e pari a zero se si impiegano funzioni interpolanti; al contrario, in corrispondenza della zona che non è stata investigata con alcuna valutazione l'errore presenta valori elevati. Pertanto, l'errore di predizione potrebbe essere impiegato all'interno di una strategia di selezione dei nuovi punti in cui valutare la funzione; in particolare, si potrebbe pensare di aggiungere nuovi punti dove l'errore di predizione è molto grande, il che corrisponderebbe a investigare la funzione in zone ancora inesplorate.

La successiva questione da affrontare riguarda la gestione di un processo che equilibri strategie di *exploration* e di *exploitation*; in particolare, è necessario definire quando usare l'una o l'altra strategia anche in base alla tipo di problema di ottimizzazione affrontato.

2.5.3 Bilanciamento fra *exploitation* e *exploration*

Nel presente paragrafo si riportano alcune tecniche che permettono di bilanciare la strategia di *exploitation* e quella di *exploration* all'interno di un processo di ottimizzazione in modo da individuare il minimo globale in modo accurato. Di seguito, la strategia di *exploitation* sarà indicata come *ricerca locale*, in quanto prevede di concentrare la ricerca localmente in prossimità dei valori minimi stimati dal modello surrogato; mentre la strategia di *exploration* sarà richiamata come *ricerca globale*, in quanto comporta una esplorazione sull'intero dominio di definizione della funzione.

Statistical Lower Bound

Un metodo per bilanciare le strategie di ricerca locale e globale prevede la minimizzazione del cosiddetto *Statistical Lower Bound*, LB che è definito dalla seguente espressione:

$$LB(\mathbf{x}) = \hat{H}(\mathbf{x}) - A\hat{s}(\mathbf{x}) \quad (2.42)$$

dove $\hat{H}(\mathbf{x})$ è la cosiddetta predizione che corrisponde al valore assunto dal surrogato in corrispondenza del proprio minimo, mentre $\hat{s}(\mathbf{x})$ è la radice quadrata dell'errore quadratico medio del modello surrogato. A è una costante che controlla il bilanciamento tra ricerca locale e ricerca globale; in particolare, se A tende a zero, $LB(\mathbf{x})$ tende a $\hat{H}(\mathbf{x})$, pertanto si sfrutta solo la ricerca locale, mentre se A assume valori molto grandi, l'effetto di $\hat{H}(\mathbf{x})$ è trascurabile e minimizzare LB equivale a massimizzare $\hat{s}(\mathbf{x})$, pertanto si impiega solo la ricerca globale.

Probability of Improvement

Adottare un'efficiente strategia di selezione dei nuovi punti ha lo scopo di migliorare la stima della funzione, cioè di ottenere valutazioni migliori rispetto a quelle individuate nelle fasi precedenti del processo. Pertanto, si può calcolare la probabilità di miglioramento (*Probability of Improvement*) seguendo l'espressione riportata:

$$P[I(\mathbf{x})] = \frac{1}{\hat{s}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-[I-\hat{H}(\mathbf{x})]^2/(2s^2)} dI, \quad (2.43)$$

dove I è il miglioramento ed è definito come $I = H_{\text{best}} - H(\mathbf{x})$ con H_{best} , miglior valore assunto dalla funzione dall'inizio della procedura e $H(\mathbf{x})$ generica valutazione della funzione in corrispondenza di un vettore di parametri \mathbf{x} . Utilizzando la funzione errore si può riscrivere l'espressione precedente, come segue:

$$P[I(\mathbf{x})] = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x})}{\hat{s}\sqrt{2}} \right) \right]. \quad (2.44)$$

Si può mostrare che l'andamento della probabilità di miglioramento presenti valori importati in corrispondenza di zone inesplorate e si annulla in corrispondenza di punti già valutati; pertanto aumenta la possibilità di esplorare zone in cui non sono ancora state effettuate valutazioni. Questo criterio permette quindi di identificare le zone del dominio in cui la funzione obiettivo potrebbe assumere valori inferiori a quelli finora raggiunti, ma il miglioramento non viene quantificato.

Expected Improvement

Per quantificare il miglioramento che ci si aspetta scegliendo nuovi punti in cui valutare la funzione obiettivo, si definisce miglioramento atteso (*Expected Improvement*)

$$E[I(\mathbf{x})] = \begin{cases} (H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x}))\Phi\left(\frac{H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x})}{\hat{s}(\mathbf{x})}\right) + s\phi\left(\frac{H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x})}{\hat{s}(\mathbf{x})}\right) & \text{if } s > 0 \\ 0 & \text{if } s = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

dove $\Phi(\cdot)$ e $\phi(\cdot)$ sono rispettivamente la funzione di distribuzione cumulativa e la funzione di densità di probabilità. L'Equazione 2.45 può essere interpretata come il momento primo dell'area sottesa dalla distribuzione gaussiana sottostante il miglior valore assunto dalla funzione obiettivo dall'inizio della procedura. Analogamente a quanto accade per la probabilità di miglioramento, anche il miglioramento atteso si annulla in corrispondenza di punti già valutati; pertanto, in questo caso la regione in cui si trova il minimo globale potrebbe essere investigata.

Utilizzando la funzione errore si può riscrivere l'espressione precedente, come segue:

$$E[I(\mathbf{x})] = (H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x})) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x})}{\hat{s}\sqrt{2}} \right) \right] + \hat{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(H_{best} - \hat{H}(\mathbf{x}))^2}{2\hat{s}^2} \right]. \quad (2.46)$$

Il criterio basato sul miglioramento atteso risulta il più promettente fra quelli considerati in questa trattazione. Tuttavia questo metodo insieme anche agli altri basati sulla stima dell'errore del modello presentano una convergenza molto lenta. Pertanto, potrebbe valer la pena accoppiare più criteri in modo da limitare l'onere computazionale per la risoluzione. Inoltre, questi metodi potrebbero non risultare efficienti nel caso si considerino funzioni molto irregolari o nel caso si selezionino un campione di punti iniziale non significativo.

2.6 ALGORITMO SO-MI

Come già riportato nella parte iniziale del capitolo, l'introduzione di modelli surrogati all'interno di algoritmi di ottimizzazione ha lo scopo di individuare la soluzione accurata di un problema con un numero limitato di valutazioni della funzione, in modo da limitare lo sforzo computazionale del processo soprattutto quando le singole valutazioni della funzione risultano molto onerose.

Di seguito è riportata la descrizione di un algoritmo di ricerca che sfrutta modelli surrogati con funzioni RBF adottando un'articolata strategia di selezione dei punti per le successive valutazioni della funzione. L'algoritmo SO-MI (*Surrogate Optimization-Mixed-Integer*) [7] è stato sviluppato soprattutto per risolvere problemi di ottimizzazione discreta (*mixed-integer*) di tipo globale onerosi dal punto di vista computazionale e dipendenti da variabili soggette a vincoli.

2.6.1 Problemi di ottimizzazione discreta (*mixed-integer*)

L'algoritmo SO-MI è stato testato per risolvere problemi di ottimizzazione discreta (*mixed-integer*) in cui l'obiettivo consiste nella minimizzazione di una funzione obiettivo $H(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ che potrebbe in generale essere non lineare o di tipo multimodale e che risulta soggetta ad una serie di vincoli $c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ tale che

$$c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \leq 0 \text{ per ogni } j = 1, \dots, m \quad (2.47)$$

$$-\infty < x_i^{lower} \leq x_i \leq x_i^{upper} < \infty \text{ per ogni } i = 1, \dots, D_1 \quad (2.48)$$

$$-\infty < u_i^{lower} \leq u_i \leq u_i^{upper} < \infty \text{ per ogni } i = 1, \dots, D_2 \quad (2.49)$$

dove $\mathbf{z}^T = (\mathbf{x}^T, \mathbf{u}^T)$ rappresentano le variabili decisionali in cui \mathbf{x} corrisponde alle variabili continue e \mathbf{u} alle variabili discrete; x_i^{lower} e x_i^{upper} costituiscono i limiti inferiore e superiore per le variabili continue; u_i^{lower} e u_i^{upper} costituiscono i limiti inferiore e superiore per le variabili discrete. La dimensione del problema di ottimizzazione è definita come $D = D_1 + D_2$.

2.6.2 Architettura dell'algoritmo SO-MI

La fase iniziale dell'algoritmo prevede di generare un campione iniziale di punti $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ con $n = 2(D+1)$) mediante il campionamento *Latin hypercube*. Il numero totale di punti è pari a due volte il numero minimo di punti richiesti per la calibrazione di un modello surrogato basato su funzioni RBF di dimensione D . In seguito, la funzione obiettivo e i vincoli sono valutati in corrispondenza dei punti iniziali; in particolare si

ottengono le valutazioni della funzione obiettivo $H_i(\mathbf{z}_i)$ con $i = 1, \dots, n$ e le valutazioni dei vincoli $\mathbf{c}_j(\mathbf{z}_i)$ con $j = 1, \dots, m$. Si individua il punto \mathbf{z}_{best} (*best feasible point*) corrispondente alla miglior valutazione H_{best} . Per ciascuna valutazione si determinano i valori corretti (*adjusted objective function values*) $H_p(\mathbf{z}_i)$. A partire dalle coppie $(\mathbf{z}_i, H_p(\mathbf{z}_i))$ si stimano i parametri di un modello surrogato basato su funzioni RBF, che può essere rappresentato dalla seguente espressione:

$$s_f(\mathbf{z}) = \sum_{l=1}^n \beta_l \psi(\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_l\|) + p(\mathbf{z}) \quad (2.50)$$

dove s_f rappresenta il surrogato, $\psi(r) = r^3$ indica la funzione RBF che è stata considerata cubica e $p(\mathbf{z}) = \mathbf{L}^T \mathbf{z} + \beta_0$ è la *coda* del polinomio. I parametri β_l e L_i con $l = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, D$ e β_0 sono determinati risolvendo il sistema lineare di equazioni:

$$\begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

dove $\Psi_{hk} = \psi(\|\mathbf{z}_h - \mathbf{z}_k\|)$ con $h, k = 1, \dots, n$, $\mathbf{0}$ è una matrice di zeri e infine,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T & 1 \\ \mathbf{z}_2^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{z}_n^T & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_D \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(\mathbf{x}_1) \\ H(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ H(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

A questo punto ha inizio la procedura iterativa che avrà termine al raggiungimento del numero massimo di valutazioni definito dall'utente. In prima analisi l'algoritmo prevede di creare quattro gruppi di punti candidati per le successive valutazioni; ciascun gruppo è definito in modo differente e per ciascun punto si calcola un punteggio in base al valore stimato dal modello surrogato e in base alle distanze del candidato dai punti in cui la funzione è già stata valutata. Si procede scegliendo per ciascun gruppo il candidato con il punteggio migliore e si valuta la funzione in corrispondenza di questi nuovi punti. Confrontando le valutazioni della funzione, si aggiorna \mathbf{z}_{best} e si calibra nuovamente il modello surrogato aggiungendo le informazioni ricavate dalle nuove valutazioni. Si prosegue con la costruzione di nuovi gruppi di candidati e con la successiva selezione dei nuovi punti in cui effettuare valutazioni della funzione. Con l'avanzare della procedura, il surrogato si aggiorna ad ogni nuova valutazione e ciò permette di approssimare sempre meglio la funzione.

Per ciascuna iterazione, l'algoritmo SO-MI prevede la selezione di quattro nuovi punti per le successive valutazioni della funzione e dei vincoli. I nuovi punti vengono

individuati dopo aver generato quattro gruppi di candidati. Il primo gruppo di punti è generato perturbando solo le variabili continue del punto migliore (*best feasible point*, \mathbf{z}_{best}), cioè del punto che corrisponde alla miglior valutazione della funzione individuata dall'inizio della procedura fino all'iterazione corrente. Le componenti discrete di \mathbf{z}_{best} sono mantenute costanti. Per generare il secondo gruppo di punti, le variabili continue di \mathbf{z}_{best} sono mantenute costanti, mentre le componenti discrete sono perturbate, aggiungendo o sottraendo una perturbazione discreta piccola, media o grande in base al range di definizione delle variabili. Il terzo gruppo viene costruito perturbando sia le variabili discrete sia continue di \mathbf{z}_{best} , mentre per il quarto gruppo i punti candidati sono generati in modo random. I gruppi di punti sono costruiti con lo scopo di avere a disposizione candidati vicini al punto migliore \mathbf{z}_{best} (ricerca locale) e candidati disposti in modo random all'interno del dominio di variabilità (ricerca globale). L'algoritmo prevede di bilanciare la ricerca locale e globale in modo tale da investigare più accuratamente il dominio in prossimità dei punti migliori individuati fino all'iterazione corrente ed esplorare zone del dominio ancora sconosciute, ma che potrebbero migliorare la stima della funzione obiettivo. Considerare candidati ottenuti in modo random può facilitare l'esclusione di minimi locali durante l'avanzamento della procedura di ottimizzazione. La scelta random dei punti si ritiene una tecnica più efficiente rispetto alle strategie che prevedono di risolvere problemi di ottimizzazione ausiliari per individuare nuovi punti per l'esplorazione del dominio, come ad esempio le tecniche basate sulla minimizzazione della misura di *bumpiness* o sulla massimizzazione della funzione di miglioramento atteso. Infatti, l'efficienza di queste ultime strategie dipende fortemente dall'algoritmo impiegato per la ricerca del minimo all'interno del processo di ottimizzazione ausiliario.

Per selezionare il candidato migliore per ciascun gruppo sono utilizzati due criteri [37] per assegnare punteggi ai candidati. Il primo dipende dal valore stimato dal surrogato e definisce un punteggio V_R per l' i -esimo candidato \mathbf{v}_i , con $i = 1, \dots, t$ e t dimensione di ciascun gruppo di candidati:

$$V_R(\mathbf{v}_i) = \frac{s_f(\mathbf{v}_i) - s_{\min}}{s_{\max} - s_{\min}} \quad (2.53)$$

dove $s_f(\mathbf{v}_i)$ è il valore del surrogato associato all' i -esimo candidato, mentre $s_{\max} = \max_{i=1, \dots, t} s_f(\mathbf{v}_i)$ e $s_{\min} = \min_{i=1, \dots, t} s_f(\mathbf{v}_i)$, cioè rappresentano rispettivamente il massimo e il minimo dei valori assunti dal surrogato in corrispondenza di tutti i candidati. Il punteggio è calcolato secondo l'espressione riportata se $s_{\max} \neq s_{\min}$, altrimenti è posto pari all'unità. Lo sforzo computazionale per la valutazione dei punteggi è limitato, in quanto la valutazione del surrogato in corrispondenza di ciascun candidato non risulta onerosa dal punto di vista computazionale.

Il secondo criterio dipende dalle distanze dei candidati di ciascun gruppo dai punti in cui è già stata valutata la funzione obiettivo dall'inizio della procedura all'iterazione corrente e definisce il punteggio V_D per l' i -esimo candidato \mathbf{v}_i , con $i = 1, \dots, t$ e t dimensione di ciascun gruppo di candidati:

$$V_D(\mathbf{v}_i) = \frac{\Delta_{\max} - \Delta(\mathbf{v}_i)}{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}} \quad (2.54)$$

dove $\Delta(\mathbf{v}_i) = \min_{l=1, \dots, n} d(\mathbf{v}_i, \mathbf{z}_l)$, è il valore minimo delle distanze Euclidee d dell' i -esimo candidato dal l -esimo punto in cui la funzione è già stata valutata, \mathbf{z}_l , mentre $\Delta_{\max} = \max_{i=1, \dots, t} \Delta(\mathbf{v}_i)$ e $\Delta_{\min} = \min_{i=1, \dots, t} \Delta(\mathbf{v}_i)$. Il punteggio è calcolato secondo l'espressione riportata se $\Delta_{\max} \neq \Delta_{\min}$, altrimenti è posto pari all'unità.

Per ciascun candidato è calcolato il punteggio come somma pesata dei due criteri, in particolare,

$$W(\mathbf{v}_i) = w_R V_R(\mathbf{v}_i) + w_D V_D(\mathbf{v}_i) \quad (2.55)$$

dove w_D e w_R sono rispettivamente il peso associato al criterio basato sulle distanze e il peso associato al criterio che dipende dai valori stimati dal surrogato, e inoltre $w_D + w_R = 1$. Dopo aver assegnato un punteggio a tutti i candidati di ciascun gruppo, viene selezionato per le successive valutazioni il candidato con il punteggio inferiore per ciascun gruppo, per un totale di quattro nuovi punti per ciascuna iterazione.

Durante l'avanzamento della procedura, i pesi assegnati a ciascun criterio variano; in particolare, all'inizio del processo si fissano $w_D = 1$ e $w_R = 0$, mentre durante le successive iterazioni si procede con una graduale riduzione del peso da assegnare al criterio basato sulle distanze e un incremento del peso associato al criterio basato sulla stima del surrogato. Se il peso w_D è elevato, il criterio delle distanze acquista una maggior influenza e, pertanto, i candidati più distanti dai punti già valutati saranno preferiti e in questo modo, si predilige la ricerca globale cercando di valutare nuovi punti in zone inesplorate del dominio. D'altro canto, se w_R è maggiore, il criterio basato sulle stime del surrogato assume maggior rilievo e, pertanto si sostiene una ricerca locale preferendo candidati associati a valori limitati stimati dal surrogato che presumibilmente saranno posizionati in prossimità del punto migliore identificato dall'inizio della procedura. Variando i pesi associati ai criteri, si passa da una ricerca globale nelle fasi iniziali, per poi approfondire la ricerca di tipo locale nelle fasi successive del processo.

2.7 SURROGATI ALL'INTERNO DI ALGORITMI EVOLUTIVI

I modelli surrogati possono essere utilizzati all'interno di quasi tutte le operazioni generalmente previste per gli algoritmi evolutivi [38]. L'impiego dei surrogati nella fase di definizione della popolazione iniziale di vettori o nell'operazione di *Crossover* o di *Mutation* può ridurre la casualità degli operatori genetici, selezionando i candidati per le successive valutazioni. Nel capitolo seguente si riporta una descrizione accurata di un algoritmo evolutivo in cui è stato introdotto all'interno dell'operazione di *Mutation* un surrogato quadratico per approssimare la funzione obiettivo.

Le tecniche di gestione dei modelli surrogati nell'ambito di algoritmi evolutivi si dividono in *individual-based*, *generation-based* e *population-based* [39]. I metodi *generation-based* prevedono di stimare i valori della funzione obiettivo attraverso un modello surrogato in corrispondenza di alcune popolazioni di punti generate durante l'avanzamento della procedura, mentre per le restanti popolazioni si valuta la funzione reale. Nei metodi *individual-based* la funzione reale è valutata solo per alcuni punti di ciascuna popolazione. I metodi *population-based* considerano più popolazioni di punti che mutano durante il processo e per ciascuna di queste s'impiega un proprio surrogato per stimare i valori della funzione reale. Una strategia che si avvicina ai metodi *individual-based* è la cosiddetta *pre-selection strategy* [34]. Se NP è la dimensione di una generica popolazione, nella pre-selezione si genera una popolazione iniziale contenente $NP' > NP$ punti in corrispondenza di ciascuno dei quali si valuta il modello surrogato e, in seguito, si selezionano NP punti che saranno rivalutati con la funzione obiettivo reale. Un'altra strategia appartenente ai metodi *individual-based* è la cosiddetta *best strategy* che prevede NP valutazioni del modello surrogato e le migliori valutazioni $NH \leq NP$ sono rivalutate adottando la funzione obiettivo reale.

3 DIFFERENTIAL EVOLUTION ALGORITHM CON L'INTRODUZIONE DI UN SURROGATO QUADRATICO

Generalmente nei problemi di ottimizzazione e calibrazione la risposta della struttura ad azioni statiche o dinamiche viene simulata attraverso modelli a elementi finiti, in quanto la complessità dei problemi non permette una formulazione analitica in forma chiusa. La forma della funzione obiettivo non è quindi nota a priori poiché è di fatto definita in modo implicito; inoltre, più il modello strutturale è complesso e articolato, più è possibile ottenere funzioni obiettivo non regolari e con più minimi locali. Durante le procedure di ottimizzazione è necessario quindi effettuare una serie di valutazioni della funzione per ricercare il minimo globale e una singola valutazione può essere anche molto onerosa dal punto di vista computazionale; esempio ricorrente in ambito strutturale è la risoluzione di problemi con presenza di non linearità geometriche e meccaniche. Pertanto, è necessario disporre di un algoritmo efficace ed efficiente per risolvere problemi di ottimizzazione in questo settore. In particolare, si necessita di un algoritmo di ricerca globale che eviti la convergenza in minimi locali e che allo stesso tempo raggiunga la soluzione del problema con un numero limitato di valutazioni della funzione, in modo da evitare, nel caso di analisi numeriche con software a elementi finiti, un onere computazionale eccessivo che renderebbe estremamente inefficiente il processo di ottimizzazione.

Come già descritto al paragrafo 1.2 gli algoritmi genetici ed evolutivi permettono di individuare il minimo globale di una funzione obiettivo escludendo i minimi locali grazie all'utilizzo contemporaneo di numerosi vettori di parametri. Lo svantaggio principale di questi algoritmi risiede nel numero consistente di valutazioni della funzione necessario per raggiungere la convergenza, in quanto l'algoritmo è basato su una ricerca probabilistica del minimo senza considerare alcuna informazione sulla forma della funzione. Partendo da queste considerazioni, è stato proposto l'algoritmo DE-Q [14] per migliorare le prestazioni dell'algoritmo evolutivo DE, combinando l'algoritmo originale con la metodologia della superficie di risposta (*Response Surface Methodology*, RSM), che permette di ridurre l'onere computazionale preservando l'accuratezza dei risultati. L'algoritmo DE-Q prevede l'introduzione nell'operazione di *Mutation* di un'approssimazione quadratica (surrogato) della funzione obiettivo mediante una superficie di risposta. L'architettura dell'algoritmo prevede ad ogni iterazione di suddividere i vettori della nuova popolazione in gruppi, per ciascuno dei quali calibrare una superficie di risposta. In questo modo, è possibile stimare

localmente la funzione in diverse posizioni del dominio, in base alla presenza o meno di un minimo del surrogato. Sfruttando informazioni sulla forma della funzione, la velocità di convergenza delle procedure aumenta senza comportare riduzioni dell'accuratezza dei risultati.

3.1 INTRODUZIONE DI UN SURROGATO QUADRATICO NELL'ALGORITMO DE

In questo paragrafo, con riferimento alla Figura 3.1, vengono descritte le fasi in cui si articola l'algoritmo DE-Q, in seguito all'introduzione della metodologia della superficie di risposta nell'algoritmo DE.

Analogamente a quanto accade per l'algoritmo DE, la prima fase prevede la scelta della popolazione iniziale, in modo casuale, a partire da una distribuzione uniforme di punti sull'intero dominio di definizione dei parametri. Si prosegue con lo sviluppo di un processo iterativo che prevede, ad ogni iterazione, la suddivisione dei vettori dei parametri in NP gruppi, dove NP è il numero totale di vettori appartenenti alla popolazione. Ogni gruppo contiene NS vettori, con $NS < NP$. Per ogni gruppo è determinata una superficie di risposta che approssima la funzione obiettivo secondo l'equazione (1.43), calcolando i coefficienti β con le espressioni (1.48) e (1.49). Per ciascuna superficie di risposta, si prosegue analizzando gli autovalori della matrice \mathbf{Q} , al fine di valutare i segni delle curvature principali, controllando, in questo modo, se esistono dei minimi. La presenza o meno di un minimo del surrogato, comporta una diversa valutazione del *mutant vector* durante la fase di *Mutation*. In particolare, se il surrogato presenta un minimo (Figura 3.2a), il nuovo *mutant vector* è ottenuto come il vettore che fornisce il minimo valore della funzione approssimante,

$$\mathbf{v}_{i,G+1} = \mathbf{x}^* \quad (3.1)$$

tale che

$$H(\mathbf{x}^*) = \min g(\mathbf{x}) . \quad (3.2)$$

Se, al contrario, la superficie di risposta non presenta un minimo (Figura 3.2b) o non presenta un minimo all'interno del dominio di variabilità dei parametri, il *mutant vector* si determina come nell'algoritmo DE. Le fasi di *Crossover* e *Selection* sono analoghe a quelle descritte per l'algoritmo DE. In seguito all'operazione di *bound constraint*, può essere introdotto un vincolo per evitare che i punti ottenuti durante l'intero processo possano uscire da un dominio prestabilito. Per alcune applicazioni, infatti, il campo di variabilità dei parametri ricercati può non essere definito sull'intero spazio di ricerca (si pensi, a titolo

di esempio, al valore di massa che non può, per definizione, essere un valore negativo). Viene quindi inserita l'operazione di *bound constraint* in modo da fare rientrare i punti usciti dal dominio sulla sua frontiera [40].

L'algoritmo DE-Q descritto presenta una serie di peculiarità che necessitano di un breve approfondimento. Ad ogni iterazione i vettori dei parametri da considerare come *sampling points* per la calibrazione delle superfici di risposta sono selezionati all'interno della popolazione di vettori costruita attraverso l'algoritmo DE.

Se si considerasse un surrogato polinomiale di grado superiore al secondo o basato su funzioni RBF, con l'avanzare della procedura di ottimizzazione il surrogato verrebbe aggiornato ad ogni nuova valutazione della funzione obiettivo e ciò permetterebbe di

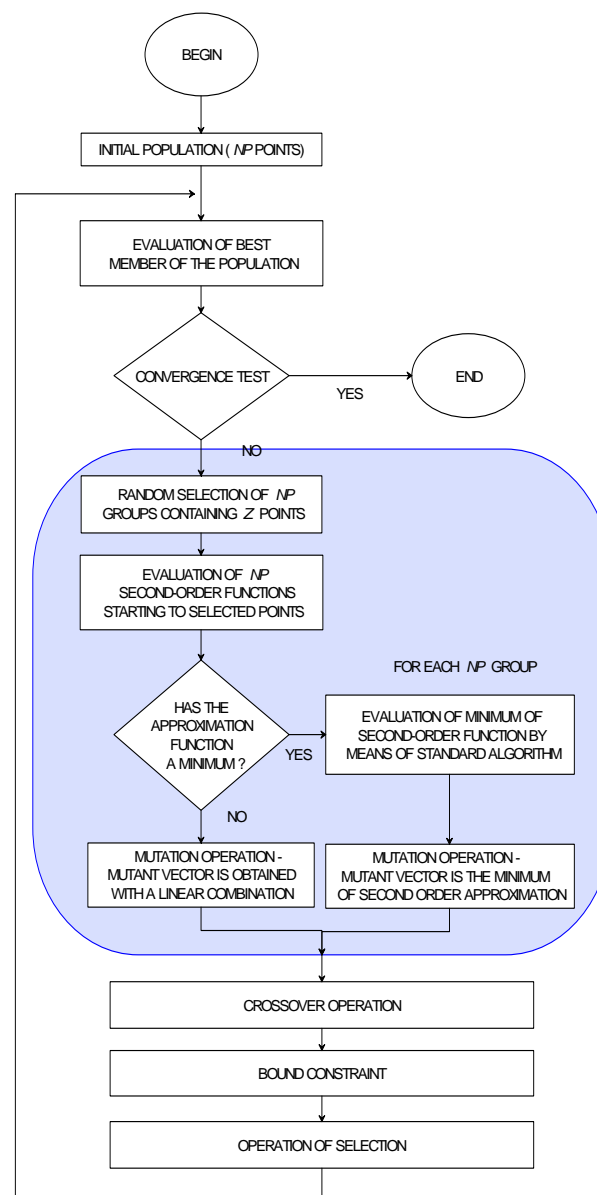


Figura 3.1: Schematizzazione della fasi salienti dell'algoritmo DE-Q.

stimare in modo sempre più accurato l'andamento della funzione all'aumentare del numero di valutazioni; tuttavia, ciò porterebbe a oneri computazionali importanti nella fase di calibrazione del surrogato, soprattutto se si effettua una ottimizzazione su uno spazio con un numero di variabili D elevato. Al contrario, l'adozione di un surrogato quadratico non può raggiungere buone approssimazioni globali della funzione obiettivo ma si propone di effettuare una approssimazione locale nell'intorno di alcuni vettori scelti. Pertanto, l'algoritmo DE-Q prevede di generare gruppi di vettori, per ciascuno dei quali calibrare una superficie di risposta. Nel caso in cui un gruppo sia costituito da punti che si concentrano vicino al minimo globale, esisterà certamente una superficie con concavità positiva che approssima la funzione obiettivo (Figura 3.2c); in questa situazione, aumenta sia la velocità di convergenza sia l'accuratezza della soluzione. Se accade che la superficie di risposta abbia concavità positiva, ma i punti che generano tale superficie non si trovano in prossimità dello stesso minimo, il valore assunto dalla funzione obiettivo in tale punto viene valutato e se tale valore risulta maggiore rispetto ai valori associati ai punti generati all'iterazione precedente verrà rigettato durante il processo di *Selection* (Figura 3.2d) o, in alternativa, costituirà un nuovo punto, non dissimile a quanto può essere ottenuto mediante la combinazione lineare prevista nell'operazione di *Mutation*.

Poiché la forma della funzione obiettivo generalmente non è nota a priori, se essa presenta un solo minimo globale, sfruttare l'approssimazione quadratica garantisce una rapida convergenza. Se la funzione obiettivo presenta più minimi, considerare più vettori dei parametri contemporaneamente permette di evitare la convergenza ai minimi locali, mentre impiegare surrogati quadratici garantisce una stima locale della forma della funzione e una riduzione dell'onere computazionale per l'individuazione della soluzione del problema.

L'impiego dell'algoritmo DE-Q fin dall'inizio della procedura di ottimizzazione è vantaggioso rispetto all'applicazione in successione dell'algoritmo DE seguito dall'approssimazione quadratica in prossimità del minimo. Difatti, l'algoritmo DE-Q permette di adottare in modo automatico la procedura evolutiva o l'approssimazione con la superficie di risposta in base alla concavità della funzione quadratica approssimante. Al contrario, applicare in successione l'algoritmo DE e l'approssimazione quadratica presenta il problema non banale della gestione dei due algoritmi, dovendo definire quando è opportuno terminare la fase di ricerca globale con l'algoritmo evolutivo a favore della ricerca locale con la superficie di risposta. Inoltre, la procedura con i due algoritmi in serie non riduce sostanzialmente gli oneri computazionali.

3.2 APPLICAZIONE DELL'ALGORITMO DE-Q PER LA CALIBRAZIONE DI MODELLI FEM DI STRUTTURE CIVILI

L'algoritmo evolutivo DE-Q è stato impiegato per la calibrazione di una serie di modelli numerici a elementi finiti rappresentanti strutture civili reali sulle quali sono state condotte campagne sperimentali di monitoraggio. I risultati sperimentali ottenuti in seguito all'elaborazione delle misurazioni in sito permettono di caratterizzare dinamicamente la struttura monitorata e generalmente vengono utilizzati come riferimento nelle procedure di calibrazione dei modelli. L'obiettivo delle procedure di ottimizzazione è di determinare la combinazione ottimale dei parametri incerti del modello in modo tale da riuscire a riprodurre in modo accurato il comportamento reale delle strutture. In ciascuno dei

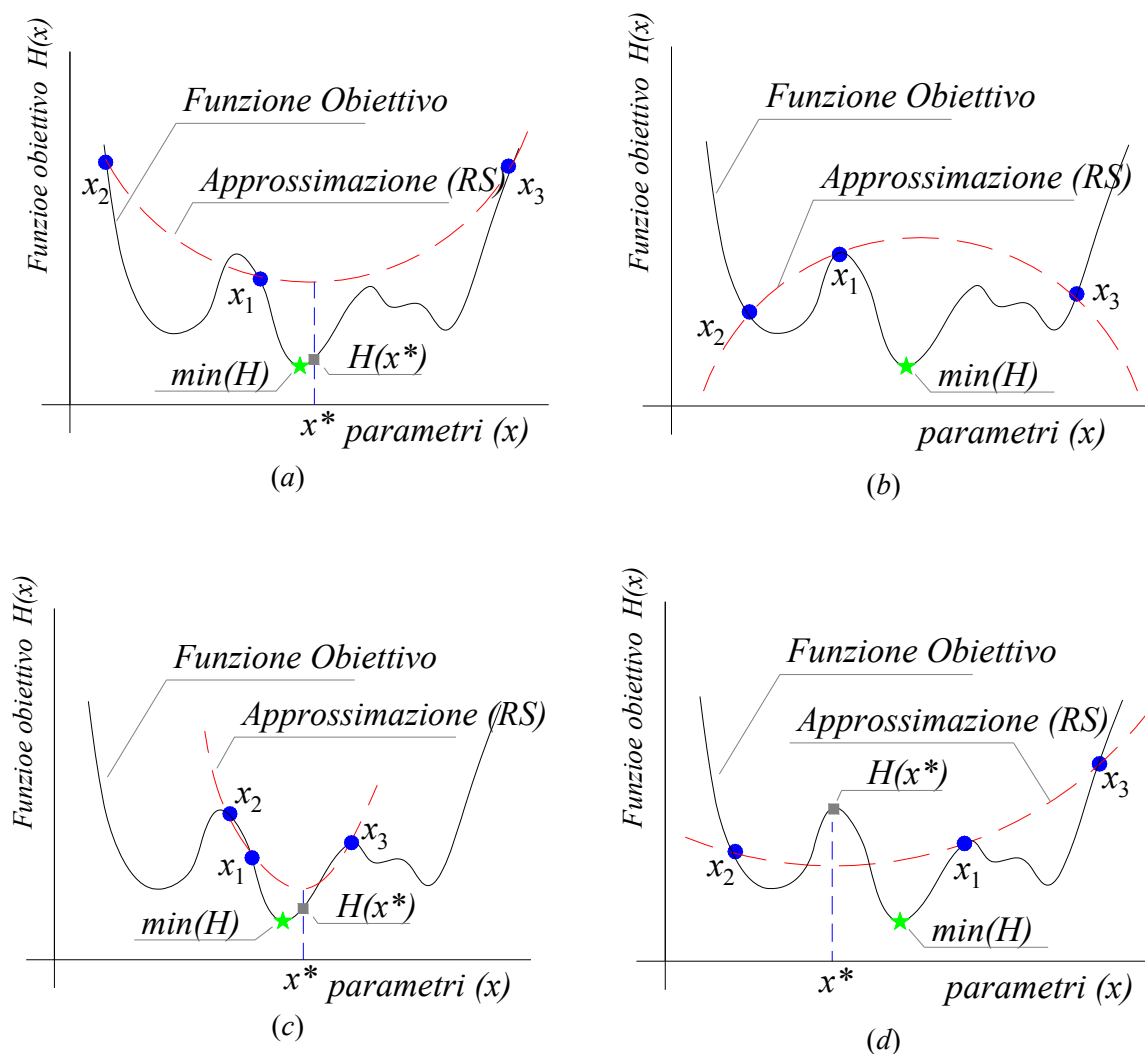


Figura 3.2: Esempi di superficie quadratica: concavità positiva (a), concavità negativa (b), approssimazione nell'intorno della soluzione (c) e eliminazione del minimo della superficie approssimante durante l'operazione di *Selection* (d).

problemi affrontati non è nota a priori la forma della funzione obiettivo.

I primi due casi studio proposti si riferiscono a calibrazioni in ambito dinamico di modelli a elementi finiti di passerelle pedonali. Le passerelle pedonali moderne sono alquanto sensibili alle vibrazioni verticali e laterali indotte dal passaggio dei pedoni poiché generalmente sono strutture snelle e molto leggere; ciò può portare al superamento di Stati Limite di Esercizio prefissati, come lo stato limite di vibrazione, e indurre condizioni non confortevoli per i pedoni. Le caratteristiche di snellezza e leggerezza sono da imputare alle nuove soluzioni strutturali adottate che impiegano elementi molto deformabili e ai moderni requisiti estetici richiesti. Pertanto, la caratterizzazione del comportamento dinamico di queste strutture con particolare riferimento alla valutazione delle amplificazioni dinamiche indotte dai pedoni è fondamentale soprattutto in fase di progettazione e verifica delle strutture in condizioni di esercizio. Spesso si adottando modelli a elementi finiti per studiare il comportamento dinamico di questa tipologia di strutture e riprodurre gli effetti indotti dai pedoni attraverso analisi dinamiche impiegando adeguati modelli di simulazione dei carichi pedonali. Tuttavia, la geometria complessa di queste strutture e l'incertezza su una serie di parametri meccanici comportano difficoltà nella modellazione con conseguenti problemi di affidabilità dei risultati numerici ottenuti. Pertanto, sono necessarie procedure di calibrazione dei modelli (*Model Updating*) a partire da un confronto fra risultati numerici e sperimentali per ottenere una simulazione accurata del comportamento delle strutture reali. Di seguito si riportano le descrizioni delle due passerelle pedonali studiate con particolare riferimento alle procedure di ottimizzazione affrontate. La fase di calibrazione in entrambi i casi s'inserisce in una più ampia attività di caratterizzazione del comportamento dinamico delle strutture soggette a carichi pedonali attraverso campagne di monitoraggio strutturale e analisi dinamiche numeriche.

3.2.1 Passerella di Correggio

La prima struttura considerata è una passerella pedonale in acciaio realizzata nel 2011 a Correggio in provincia di Reggio Emilia. La struttura (Figura 3.3a) ha una lunghezza complessiva di circa 168 metri ed è costituita da cinque campate in semplice appoggio collegate a livello dell'impalcato. La campata centrale si estende per 40 metri, mentre ciascuna campata laterale ha una lunghezza di 32 metri. La passerella è sostenuta da 4 pile: due in posizione centrale di altezza 5.20 metri e due laterali di 2.80 metri. Le campate hanno una sezione scatolare (Figura 3.3b) di dimensioni 3.00 x 2.85 m² costituita da travi reticolari. Le pile e le reticolari sono composte da profili metallici rettangolari cavi, mentre il sistema di controventamento è realizzato mediante profili a "L". L'impalcato ha una larghezza di 3 metri ed è costituito da un tavolato in legno posto su lamiere grecate. La struttura è snella, leggera e caratterizzata da vibrazioni provocate dal passaggio di pedoni e ciclisti e dall'effetto del vento.

Per caratterizzare il comportamento dinamico della passerella è stata condotta una campagna di monitoraggio strutturale [41]; a partire dalle misure di accelerazione acquisite in condizioni ambientali (vento, traffico, ...) sono state determinate le proprietà dinamiche della struttura reale (frequenze, deformate modali e smorzamenti). I test sperimentali sono stati condotti mediante un avanzato sistema di monitoraggio (sistema SHM602 della Teleco Spa) costituito da un'unità centrale di controllo e immagazzinamento dati (Figura 3.3c) e da 10 sensori tipo MEMS (Figura 3.3d), distribuiti secondo diverse configurazioni, che permettono di acquisire misure di accelerazione lungo due direzioni ortogonali. Le prove sperimentali sono state condotte anche con lo scopo di valutare il comportamento dinamico della passerella sottoposta a carichi pedonali.

Successivamente, è stato costruito e calibrato un modello a elementi finiti della struttura in modo da ottenere una risposta numerica il più possibile in accordo con i risultati sperimentali in termini di caratteristiche modali. In fase di modellazione sono stati impiegati elementi monodimensionali a comportamento elastico lineare e sono stati

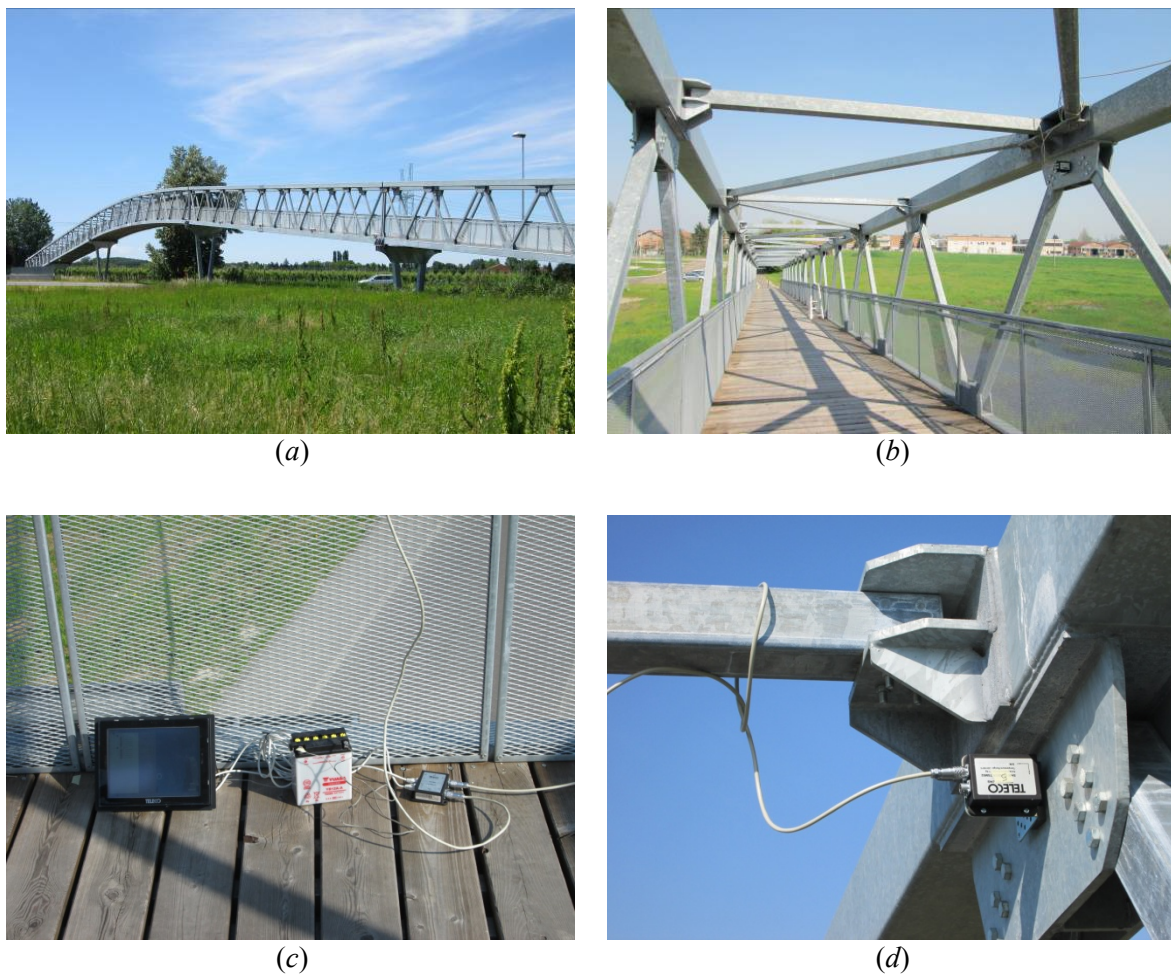


Figura 3.3: Passerella di Correggio - vista globale (a), dettaglio della sezione scatolare (b), sistema di acquisizione (c) e posizionamento sensori (d).

applicati vincoli alla base delle pile e in corrispondenza delle campate laterali. Il contributo della massa dell'impalcato è stato considerato come incremento di massa per i correnti longitudinali. In Figura 3.4 a titolo esemplificativo sono riportate le deformate modali numeriche dei principali modi propri della struttura studiata.

La calibrazione del modello è stata effettuata ricercando la combinazione ottimale dei parametri incerti attraverso la minimizzazione di una funzione obiettivo. I parametri incogniti selezionati sono la densità dell'impalcato e la densità delle membrature metalliche per tenere in conto le masse aggiuntive dei collegamenti (piastre e bulloni).

Sono stati considerati come riferimento quattro modi propri sperimentali della struttura: i primi due modi laterali (1.674 Hz e 2.663 Hz), il primo modo verticale (4.392 Hz) e il primo modo torsionale (6.596 Hz). La funzione obiettivo H è stata definita come la sommatoria, per gli N modi considerati, dei quadrati degli errori relativi fra frequenze e deformate modali numeriche (ω_i, Φ_i) e sperimentali $(\bar{\omega}_i, \bar{\Phi}_i)$, determinate elaborando i dati ricavati in seguito al monitoraggio strutturale:

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 NMD_i^2 \right] \quad (3.3)$$

dove w_1 e w_2 sono, rispettivamente, i pesi attribuiti a frequenze e deformate modali e NMD è il cosiddetto *Normalized Modal Difference* e presenta la seguente espressione per determinare l'errore associato ai vettori modali che dipende dall'indice MAC [42]:

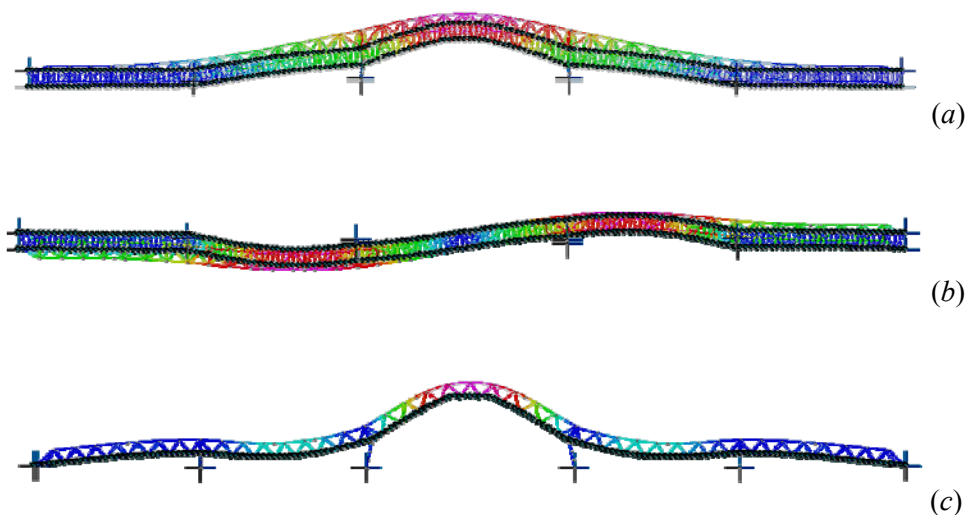


Figura 3.4: Passerella di Correggio - principali deformate modali numeriche: (a) primo modo laterale (frequenza 1.676 Hz), (b) secondo modo laterale (frequenza 2.702 Hz) e (c) primo modo verticale (frequenza 4.293 Hz).

$$NMD_i = \sqrt{\frac{1 - MAC(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)}{MAC(\varphi_i, \bar{\varphi}_i)}} \quad (3.4)$$

Per ottenere un confronto affidabile è stato impiegato l'indice MAC per accoppiare i modi numerici e sperimentali, considerando sia le componenti verticali sia trasversali. La soluzione del problema di ottimizzazione corrisponde a valori dei parametri raddoppiati rispetto alla condizione iniziale. In Tabella 3.1 è riportato il confronto fra le frequenze sperimentali e numeriche ottenute in seguito al processo di ottimizzazione in termini di errore relativo e valore dell'indice MAC. Si può notare come i risultati numerici riproducono molto bene i risultati sperimentali con errori in frequenza inferiori a 3% per le prime 9 frequenze e un errore di circa 8% per la decima frequenza. Anche i valori dell'indice MAC sono molto buoni (> 80%) ad eccezione del settimo modo a cui corrisponde un MAC di 65.78%. Un valore dell'indice così limitato è dovuto ad alcune differenze fra le componenti laterali delle deformate modali soprattutto per quanto riguarda la campata centrale; in particolare, i valori sperimentali sono molto limitati, mentre si ottengono valori non trascurabili con il modello numerico.

In seguito sono state effettuate analisi dinamiche con il modello calibrato per riprodurre gli effetti dovuti al passaggio di pedoni e confrontare i massimi valori di accelerazione ottenuti numericamente con quelli misurati sperimentalmente. Sono stati considerati alcuni modelli matematici per rappresentare la forza dinamica indotta da un singolo pedone o da una folla di persone. L'attraversamento della passerella da parte di un pedone può essere simulato applicando ai nodi successivi del modello forze verticali e orizzontali.

n. modo	freq. sper. [Hz]	freq. num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]
1	1.674	1.676	+0.12	99.04
2	2.663	2.702	+1.46	98.43
3	3.082	3.103	+0.68	83.72
4	3.567	3.489	-2.19	93.24
5	4.392	4.293	-2.25	96.62
6	5.276	5.236	-0.76	86.39
7	5.970	6.096	+2.11	65.78
8	6.596	6.521	-1.14	85.87
9	7.690	7.918	+2.96	85.61
10	12.085	11.063	-8.46	96.68

Tabella 3.1: Passerella di Correggio - confronto frequenze sperimentali e numeriche ottenute in seguito alla procedura di calibrazione, in termini di errore relativo e valori dell'indice MAC.

3.2.2 Passerella Pasternak

La passerella ciclopedonale Pasternak (Figura 3.5a, b) è una struttura strallata curva realizzata nel 2008 per permettere l'attraversamento a pedoni e ciclisti della tangenziale Est di Modena in prossimità dell'incrocio con la via Emilia. La passerella ha una lunghezza di 270 metri ed è composta da una campata centrale di 60 metri e da due rampe d'accesso ad andamento curvilineo che raccordano la campata centrale con i percorsi ciclopedonali dalle due parti opposte della tangenziale. L'impalcato ha una larghezza di 3 metri ed è sostenuto da 6 coppie di stralli in acciaio in corrispondenza della campata centrale. Le rampe d'accesso sono composte da più campate sostenute da pile ad altezza variabile in calcestruzzo prefabbricato con forma a "V". Gli stralli sono collegati a 2 torri metalliche alte 18 metri, ciascuna composta da due antenne inclinate di circa 15° rispetto alla verticale e collegate fra loro da controventi disposti a "X" (Figura 3.5c, d).



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 3.5: Passerella Pasternak - vista globale (a, b), dettaglio della torre (c, d) e dettaglio della reticolare spaziale (e).

L'impalcato presenta un raggio costante di 32 metri circa ed è costituito da reticolari metalliche che sostengono lastre predalles che fungono da cassero a perdere per la soletta in calcestruzzo sovrastante. La pavimentazione è costituita da uno strato di 3 cm di conglomerato bituminoso. In corrispondenza della campata centrale è presente una travatura reticolare a sviluppo spaziale con funzione di irrigidimento, composta da profili circolari cavi collegati all'impalcato (Figura 3.5e). I correnti longitudinali sono realizzati con profili a sezione aperta con riempimento in calcestruzzo, collegati nel piano mediante profili a "H" e "L". Le antenne sono costituite da profili prismatici cavi a sezione variabile collegati fra loro mediante controventi a "H" con connessioni bullonate. Ciascuno strallo è composto da due o tre elementi collegati fra loro e ancorati alle torri con piatti e bulloni. Infine, sono presenti parapetti metallici lungo l'intero sviluppo della passerella, realizzati in acciaio mediante montanti formati da piatti accoppiati a sostegno di un corrimano a profilo tubolare e di una rete metallica come protezione.

Per investigare il comportamento dinamico della passerella sono state condotte campagne di monitoraggio strutturale [43] impiegando il sistema di monitoraggio descritto nel paragrafo precedente. Dalle accelerazioni acquisite in condizioni ambientali sono state individuate le caratteristiche modali della struttura. Inoltre, per investigare la risposta dinamica della passerella soggetta ad azioni indotte dal traffico pedonale, sono stati condotti dei test in cui gruppi di pedoni attraversavano la passerella con diverse frequenze di passo.

Successivamente è stato costruito e calibrato un modello a elementi finiti della struttura in modo da ottenere simulazioni numeriche in accordo con la risposta sperimentale. Il modello a elementi finiti rappresenta la campata centrale e parte di quelle laterali ed è costituito da elementi a comportamento elastico lineare; in particolare, le membrature metalliche e i cavi sono modellati con elementi monodimensionali, mentre la soletta in calcestruzzo e le torri sono modellate con elementi bidimensionali. Ai correnti longitudinali è stata attribuita una sezione omogeneizzata ad acciaio con densità equivalente che tiene in conto oltre il peso proprio dei profili metallici anche la massa del riempimento in calcestruzzo. La struttura è vincolata alla base delle torri con vincoli ad appoggio, mentre in corrispondenza delle estremità del modello sono stati introdotti vincoli che impediscono la traslazione verticale della passerella e molle disposte in direzione longitudinale e trasversale all'impalcato. L'introduzione delle molle alle estremità del modello permette di riprodurre il contributo delle campate laterali che non sono state modellate, con particolare riferimento a spostamenti nel piano, mentre si assume un vincolo fisso in direzione verticale per la presenza delle pile. La connessione fra impalcato e torri è realizzata attraverso un vincolo che impedisce le traslazioni verticali e mediante elementi monodimensionali disposti a "V" rovescia nella direzione dello sviluppo longitudinale della passerella e altri elementi disposti in direzione trasversale all'impalcato.

Mediante un'analisi modale si ottengono le deformate modali e le frequenze numeriche associate; in Figura 3.6 si riportano le deformate modali dei primi quattro modi verticali e in Tabella 3.2 il confronto in termini di errore relativo fra le frequenze sperimentali e le frequenze numeriche determinate con il modello iniziale, in seguito denominato *Modello FEM A1*. Si può notare una discreta corrispondenza fra i risultati numerici e sperimentali, con errori in frequenza compresi fra 2% e 4% per i modi verticali e errori di circa 10% per i modi torsionali; l'indice MAC assume valori superiori a 80% per tutti i modi, considerando sia le componenti verticali sia trasversali.

Per migliorare la corrispondenza fra il modello numerico e i risultati sperimentali in termini di caratteristiche modali, sono state effettuate procedure di ottimizzazione mediante l'impiego dell'algoritmo DE-Q. La determinazione dei parametri che costituiscono la soluzione del problema di ottimizzazione, avviene attraverso la ricerca del valore minimo di una funzione obiettivo H definita come differenza fra quantità numeriche

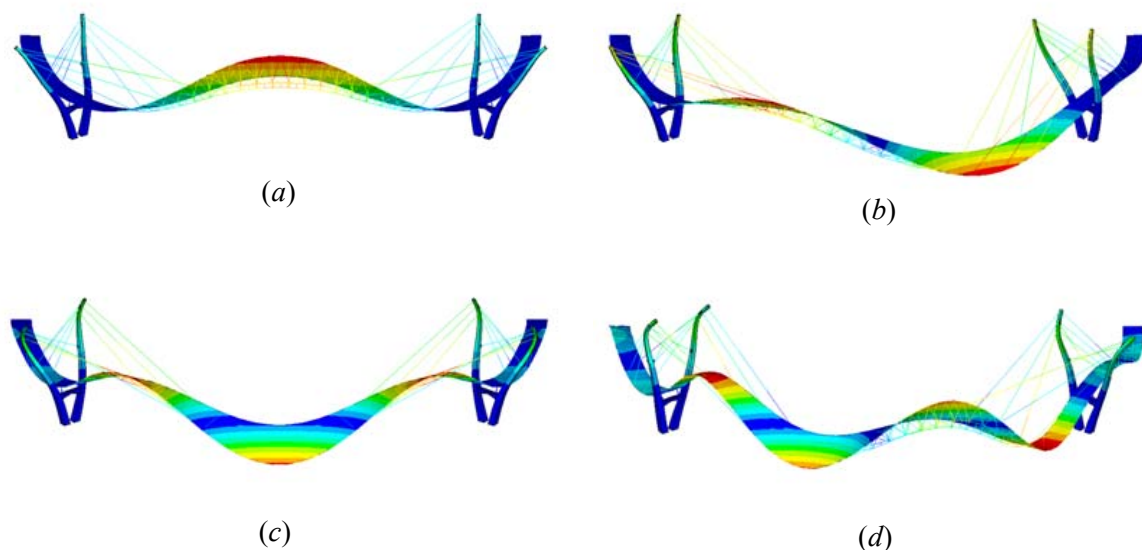


Figura 3.6: Passerella Pasternak - deformate modali numeriche - 1° modo verticale (a), 2° modo verticale (b), 3° modo verticale (c) e 4° modo verticale (d).

tipo modo	freq. sper. [Hz]	<i>Modello FEM A1</i>		
		freq.num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]
1° Vert.	1.462	1.419	-2.94	98.7
2° Vert.	2.274	2.365	+4.00	92.8
3° Vert.	3.210	3.249	+1.21	79.5
4° Vert.	4.949	4.837	-2.25	80.1
1° Tors.	6.551	5.977	-8.76	79.2
2° Tors.	7.605	6.479	-14.81	80.7

Tabella 3.2: Passerella Pasternak - confronto frequenze sperimentali e numeriche ottenute prima delle procedure di calibrazione, in termini di errore relativo e valori dell'indice MAC.

e sperimentali secondo l'espressione 3.3. Sono state condotte due procedure di ottimizzazione variando la selezione dei parametri incogniti, la definizione dei range di variabilità dei parametri e la scelta dei modi propri sperimentali da considerare come riferimento. Sono stati comunque selezionati come parametri incogniti quelli che maggiormente influenzano il comportamento strutturale della passerella.

In fase preliminare, è stata condotta una procedura di ottimizzazione a 4 parametri, ottenendo un modello numerico identificato nel seguito come *Modello FEM A2*. Il primo parametro selezionato è la rigidità degli stralli che risulta incerta in quanto dipendente dal tiro a cui sono soggetti gli stralli in condizioni di esercizio; per introdurre variazioni in termini di rigidità si modificano i valori del modulo di Young del materiale associato agli elementi ($E_{s,int}$ e $E_{s,ex}$ rispettivamente per gli stralli posti all'interno e all'esterno, che in questa prima analisi assumono gli stessi valori; ciò corrisponde a considerare un unico parametro da identificare). Il secondo parametro è il modulo di Young dei correnti longitudinali (E_c), in quanto possono esserci delle incertezze sulla rigidità di questi elementi realizzati in struttura mista acciaio-calcestruzzo. Il terzo e il quarto parametro rappresentano il modulo elastico degli elementi di collegamento fra l'impalcato e le torri rispettivamente disposti in direzione longitudinale ($E_{t,long}$) e trasversale ($E_{t,trasv}$) all'impalcato. Riprodurre l'effettivo grado di vincolo fra impalcato e torri risulta complesso; pertanto, modificando questi due parametri si vuole investigare l'effettiva rigidità del collegamento nei confronti di una rotazione nel piano dell'impalcato rispetto alle torri. Inoltre, per assicurarsi che la variazione di questi ultimi due parametri influenzi la dinamica della struttura con particolare riferimento alle deformate modali della campata centrale, si è scelto di attribuire al modulo elastico delle molle posizionate alle estremità del modello in direzione longitudinale un valore limitato ($E_{m,long} = 2.0 \cdot 10^4$ Pa), mentre per le molle disposte in direzione trasversale è stato mantenuto il valore di partenza ($E_{m,rad} = 2.0 \cdot 10^{11}$ Pa) per scongiurare significative deformazioni trasversali della struttura che risulterebbero non realistiche. Per ciascun parametro incognito è stato definito un intervallo di variabilità (Tabella 3.3), mentre durante la procedura di ottimizzazione i valori dei parametri sono stati normalizzati in modo tale da ottenere un intervallo $[-1, +1]$ per ciascun parametro.

Inoltre, per l'applicazione dell'algoritmo evolutivo DE-Q è stato fissato il numero di vettori della popolazione iniziale NP pari a 25, un numero massimo di iterazioni pari a 40, un limite superiore associato al primo e al secondo criterio di convergenza VTR_1 e VTR_2 pari a 0.001 e 0.01, un numero NC di vettori sui quali effettuare il controllo di convergenza pari a 3. Le analisi sono state svolte considerando la strategia denominata *best*, fissando la costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation* pari a 0.60 e la costante di *Crossover* pari a 0.50. È stato scelto un numero di vettori NS per la calibrazione di ciascuna superficie di risposta pari a 19. In Tabella 3.4 sono elencati i parametri per la

gestione della procedura di ottimizzazione. Sono stati considerati come riferimento i primi quattro modi verticali con frequenze comprese fra 1.462 Hz e 4.949 Hz, in quanto la struttura mostra una flessibilità significativa in direzione verticale. A ciascun modo è stato associato lo stesso peso all'interno della formulazione della funzione obiettivo. Per confrontare in modo corretto le caratteristiche modali è stato impiegato l'indice MAC che permette di accoppiare i modi numerici ai corrispondenti modi sperimentali. L'algoritmo si è arrestato al raggiungimento della convergenza dopo 30 iterazioni che corrispondono a 750 valutazioni della funzione obiettivo. La combinazione di parametri che costituisce la soluzione del problema di ottimizzazione è riportata in Tabella 3.3. Infine, in Tabella 3.5 è mostrato il confronto fra le frequenze numeriche individuate in seguito alla procedura di ottimizzazione e i risultati sperimentali.

Si ottiene una buona stima delle frequenze dei primi quattro modi verticali, con errori inferiori a 1% per i primi due modi ed errori intorno a 1% per il terzo e il quarto modo verticale. Di contro, si raggiungono errori superiori a 9% per i modi torsionali. Pertanto, risulta inadeguata la stima del comportamento torsionale della struttura in termini di frequenza. Inoltre, considerando solo le componenti verticali delle deformate modali, l'indice MAC assume valori superiori a 90% per tutti i modi, mentre se si considerano anche le componenti trasversali si ottengono valori inferiori. In particolare, si raggiungono $80\% < \text{MAC} < 95\%$ per i modi verticali ad eccezione del primo modo a cui è associato un MAC pari a 64%, mentre per i modi torsionali l'indice è compreso fra 70% e 80%. Infatti, le componenti trasversali non sono ben stimate con il modello a elementi finiti; in particolare, il modello presenta deformazioni trasversali di gran lunga superiori rispetto a

	<i>Modello FEM A1</i>	<i>Modello FEM A2</i>		
	iniziali	min	max	ottimo
$E_{s,ex}$ [Pa]	$1.75 \cdot 10^{11}$	$0.75 \cdot 10^{11}$	$4.75 \cdot 10^{11}$	$2.12 \cdot 10^{11}$
$E_{s,int}$ [Pa]	$1.75 \cdot 10^{11}$	$0.75 \cdot 10^{11}$	$4.75 \cdot 10^{11}$	$2.12 \cdot 10^{11}$
E_c [Pa]	$6.13 \cdot 10^{11}$	$0.50 \cdot 10^{11}$	$8.00 \cdot 10^{11}$	$6.47 \cdot 10^{11}$
$E_{t,long}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^4$	$2.00 \cdot 10^{11}$	$1.53 \cdot 10^9$
$E_{t,trasv}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^4$	$2.00 \cdot 10^{11}$	$7.03 \cdot 10^8$
$E_{m,long}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^4$
$E_{m,trasv}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$
$d_{eq,c}$ [kg/m ³]	$16.28 \cdot 10^3$	-	-	$16.28 \cdot 10^3$
E_p [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$
E_{imp} [Pa]	$0.27 \cdot 10^{11}$	-	-	$0.27 \cdot 10^{11}$
d_{imp} [kg/m ³]	$3.10 \cdot 10^3$	-	-	$3.10 \cdot 10^3$
n. iter.	-	-	-	30
n. val.	-	-	-	750
H	-	-	-	0.0315

Tabella 3.3: Passerella Pasternak - valori dei parametri per i modelli FEM, range di variabilità e valori ottimali ottenuti in seguito alle procedure di ottimizzazione per i parametri incerti, numero d'iterazioni, numero di valutazioni e valori assunti dalla funzione obiettivo.

<i>Modello FEM A2</i>	
VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	25
NC	3
NS	19
itermax	40
F	0.6
CR	0.50
strategia	<i>best</i>

Tabella 3.4: Passerella Pasternak - parametri per la gestione dei processi di ottimizzazione.

quelle individuate sperimentalmente, soprattutto per quanto riguarda il primo modo verticale.

Vi è però da sottolineare che le componenti trasversali ottenute sperimentalmente sono significativamente diverse per i due lati della passerella (lato sud e lato nord). Questa differenza può essere messa in relazione a errori nel post-processing delle accelerazioni sperimentali acquisite oppure alla presenza di grandi rotazioni (torsione) della campata centrale, per la quale l'assunzione di piccole deformazioni non trova effettivamente riscontro.

Pertanto, è stata effettuata un'ulteriore procedura di ottimizzazione del modello a 4 parametri con l'obiettivo di ottenere una miglior stima del primo modo verticale, che costituisce il contributo prevalente alla risposta dinamica strutturale della passerella. Inoltre, si è scelto di migliorare anche la stima del comportamento torsionale e trasversale della struttura che potrebbe essere influenzato principalmente dall'effetto della pretensione degli stralli e della rigidità dei parapetti. Per questo motivo, durante la procedura di ottimizzazione sono stati variati distintamente i valori della rigidità degli stralli disposti internamente ($E_{s,int}$) e di quelli posizionati esternamente ($E_{s,ex}$) ed è stato considerato come altro parametro la rigidità dei parapetti sulla quale si interviene modificando il modulo elastico dei montanti (E_p). Il quarto parametro considerato è la densità equivalente dei

tipo modo	freq. sper. [Hz]	<i>Modello FEM A1</i>			<i>Modello FEM A2</i>		
		freq.num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]	freq.num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]
1° Vert.	1.462	1.419	-2.94	98.7	1.455	-0.51	64.3
2° Vert.	2.274	2.365	+4.00	92.8	2.269	-0.23	89.5
3° Vert.	3.210	3.249	+1.21	79.5	3.256	+1.42	80.6
4° Vert.	4.949	4.837	-2.25	80.1	4.904	-0.91	95.7
1° Tors.	6.551	5.977	-8.76	79.2	5.916	-9.69	70.6
2° Tors.	7.605	6.479	-14.81	80.7	6.484	-14.74	79.9

Tabella 3.5: Passerella Pasternak - confronto frequenze sperimentali e numeriche ottenute in seguito alle procedure di calibrazione, in termini di errore relativo e valori dell'indice MAC.

correnti longitudinali ($d_{eq,c}$) che come parametro sostituisce il modulo elastico dei correnti impiegato nella precedente analisi in quanto è stata riscontrata una limitata influenza dei risultati numerici alla variazione del modulo elastico. Si è scelto comunque di mantenere un parametro associato ai correnti longitudinali per tenere in conto l'incertezza riguardo al loro comportamento. Per ciascun parametro incognito è stato definito un intervallo di variabilità come riportato in Tabella 3.6 nella sezione dedicata al *Modello FEM A3*. Per quanto riguarda i moduli elastici delle molle disposte alle estremità del modello e degli elementi di collegamento fra torri e impalcato, sono stati fissati valori rispettivamente pari a $2.00 \cdot 10^{11}$ Pa e $1.00 \cdot 10^{13}$ MPa che sostanzialmente corrisponde a considerare vincoli rigidi. Infatti, dalle analisi precedenti si è potuto constatare che rendere deformabili questi vincoli può condurre a soluzioni che stimano bene le deformazioni verticali della struttura, ma non colgono in modo sufficientemente accurato le deformazioni trasversali.

Un'analisi di sensitività preliminare ha permesso di individuare i valori ottimali del modulo elastico (E_{imp}) e della densità (d_{imp}) associati agli elementi bidimensionali impiegati per modellare la soletta dell'impalcato. Questi due parametri sono stati fissati prima di avviare la procedura di ottimizzazione, in quanto se fossero stati considerati incogniti si sarebbero individuate soluzioni in corrispondenza di valori non realistici dei parametri sopracitati, soprattutto con riferimento alla densità che fisicamente non può ridursi eccessivamente.

Per l'applicazione dell' algoritmo DE-Q è stato fissato il numero di vettori della popolazione iniziale NP pari a 30, mentre per gli altri parametri sono stati impiegati gli stessi valori fissati per la precedente procedura di ottimizzazione (Tabella 3.4). Inoltre, è

	<i>Modello FEM A1</i>	<i>Modello FEM A2</i>			<i>Modello FEM A3</i>		
	iniziali	min	max	ottimo	min	max	ottimo
$E_{s,ex}$ [Pa]	$1.75 \cdot 10^{11}$	$0.75 \cdot 10^{11}$	$4.75 \cdot 10^{11}$	$2.12 \cdot 10^{11}$	$0.20 \cdot 10^{11}$	$0.18 \cdot 10^{11}$	$0.68 \cdot 10^{11}$
$E_{s,int}$ [Pa]	$1.75 \cdot 10^{11}$	$0.75 \cdot 10^{11}$	$4.75 \cdot 10^{11}$	$2.12 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^{13}$	$2.00 \cdot 10^{17}$	$2.08 \cdot 10^{13}$
E_c [Pa]	$6.13 \cdot 10^{11}$	$0.50 \cdot 10^{11}$	$8.00 \cdot 10^{11}$	$6.47 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$
$E_{t,long}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^4$	$2.00 \cdot 10^{11}$	$1.53 \cdot 10^9$	-	-	$1.00 \cdot 10^{13}$
$E_{t,trasv}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^4$	$2.00 \cdot 10^{11}$	$7.03 \cdot 10^8$	-	-	$1.00 \cdot 10^{13}$
$E_{m,long}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^4$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$
$E_{m,trasv}$ [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$
$d_{eq,c}$ [kg/m ³]	$16.28 \cdot 10^3$	-	-	$16.28 \cdot 10^3$	$15.0 \cdot 10^3$	$25.0 \cdot 10^3$	$22.51 \cdot 10^3$
E_p [Pa]	$2.00 \cdot 10^{11}$	-	-	$2.00 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^{11}$	$2.00 \cdot 10^{15}$	$2.05 \cdot 10^{13}$
E_{imp} [Pa]	$0.27 \cdot 10^{11}$	-	-	$0.27 \cdot 10^{11}$	-	-	$0.50 \cdot 10^{11}$
d_{imp} [kg/m ³]	$3.10 \cdot 10^3$	-	-	$3.10 \cdot 10^3$	-	-	$2.50 \cdot 10^3$
n. iter.	-	-	-	30	-	-	33
n. val.	-	-	-	750	-	-	990
H	-	-	-	0.0315	-	-	0.853

Tabella 3.6: Passerella Pasternak - valori dei parametri per ciascun modello FEM, range di variabilità e valori ottimali ottenuti in seguito alle procedure di ottimizzazione per i parametri incerti, numero d'iterazioni, numero di valutazioni e valori assunti dalla funzione obiettivo.

stato inserito tra i modi di riferimento anche il primo modo torsionale oltre ai primi quattro modi verticali, ampliando il range di frequenze fino a 6.551 Hz. Nella definizione della funzione obiettivo, è stato attribuito un peso unitario a tutti i modi di riferimento ad eccezione del primo modo verticale a cui è stato assegnato un peso pari a 3, mentre al secondo modo verticale e al primo modo torsionale è stato attribuito un peso pari a 2. L'algoritmo si è arrestato al raggiungimento della convergenza dopo 33 iterazioni che corrispondono a 990 valutazioni della funzione obiettivo. La combinazione di parametri che costituisce la soluzione del problema di ottimizzazione è riportata in Tabella 3.6.

In Tabella 3.7 sono mostrati i risultati in seguito alla procedura di ottimizzazione descritta, in termini di errori in frequenza e di valori dell'indice MAC considerando sia le componenti verticali sia quelle trasversali. Il modello numerico ottimizzato, (*Modello FEM A3*), presenta un errore molto limitato (0.16%) per quanto riguarda la frequenza del primo modo verticale, mentre gli errori associati agli altri modi sono inferiori a 1.2% con l'eccezione del terzo modo verticale che presenta un errore di circa 3% e del secondo modo torsionale con un errore di circa 4%. I valori dell'indice MAC sono superiori a 90% e ciò indica una correlazione molto buona fra le deformate modali; l'eccezione si manifesta per il terzo modo verticale e per i modi torsionali che presentano valori dell'indice di circa 80%.

I valori del MAC sono superiori rispetto al modello precedente, soprattutto per quanto riguarda il primo modo verticale. Se da un lato è stata migliorata la stima dei modi torsionali in termini di frequenza a scapito di errori di poco superiori per il secondo e il terzo modo flessionale, d'altro canto rimangono delle incertezze nella valutazione delle deformazioni trasversali. Da un'analisi sulle deformate modali numeriche e sperimentali (Figura 3.7), si può notare come la correlazione sia molto buona per quanto riguarda le componenti verticali, mentre le componenti orizzontali non vengono ben stimate dal modello numerico. In particolare, il primo modo verticale presenta sperimentalmente deformazioni trasversali del lato sud più elevate di quelle misurate sul lato nord, mentre il modello numerico mostra componenti paragonabili per entrambi i lati. Considerando il

tipo modo	freq. sper. [Hz]	<i>Modello FEM A1</i>			<i>Modello FEM A2</i>			<i>Modello FEM A3</i>		
		freq. num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]	freq. num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]	freq. num. [Hz]	err. [%]	MAC [%]
1° Vert.	1.462	1.419	-2.94	98.7	1.455	-0.51	64.3	1.465	+0.16	98.5
2° Vert.	2.274	2.365	+4.00	92.8	2.269	-0.23	89.5	2.257	-0.75	90.4
3° Vert.	3.210	3.249	+1.21	79.5	3.256	+1.42	80.6	3.303	+2.88	79.9
4° Vert.	4.949	4.837	-2.25	80.1	4.904	-0.91	95.7	4.960	+0.22	93.8
1° Tors.	6.551	5.977	-8.76	79.2	5.916	-9.69	70.6	6.475	-1.15	79.9
2° Tors.	7.605	6.479	-14.81	80.7	6.484	-14.74	79.9	7.297	-4.05	81.2

Tabella 3.7: Passerella Pasternak - confronto frequenze sperimentali e numeriche ottenute in seguito alle procedure di calibrazione, in termini di errore relativo e valori dell'indice MAC.

secondo modo verticale, le deformazioni trasversali numeriche hanno valori di circa un ordine di grandezza inferiore rispetto a quelle ottenute sperimentalmente. Come detto precedentemente, la differenza potrebbe essere associata a rotazioni dell'impalcato significative, non valutabili attraverso un modello agli elementi finiti che considera piccole deformazioni.

Il modello a elementi finiti calibrato è stato in seguito impiegato per valutare la risposta dinamica della struttura sottoposta a carichi indotti dal passaggio di pedoni. In particolare, sono state effettuate analisi dinamiche con il modello numerico, simulando le forze indotte dai pedoni mediante l'impiego di modelli matematici. I risultati ottenuti sono stati confrontati con le misure sperimentali in termini di accelerazioni della struttura.

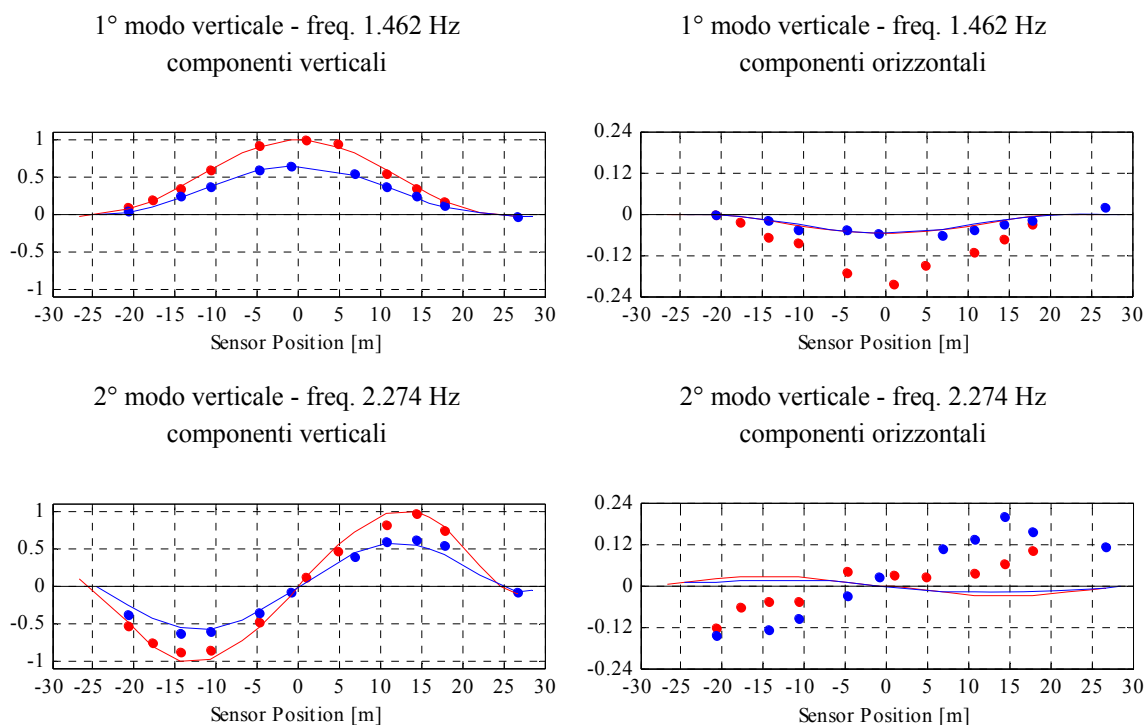


Figura 3.7: Passerella Pasternak - componenti verticali e orizzontali dei primi due modi verticali; confronto fra risultati numerici (linee continue) e sperimentali (indicatori circolari).

3.2.3 Manhattan Bridge di New York

In quest'ultima applicazione, è stata effettuata la calibrazione di un modello a elementi finiti del Manhattan Bridge, uno dei ponti sospesi più importanti della città di New York, mediante l'applicazione dell'algoritmo DE-Q. Questa attività s'inquadra in un programma più ampio d'individuazione degli elementi della struttura che possono riscontrare problemi di resistenza a fatica, nell'ottica di coordinare una programmazione degli interventi di manutenzione e ripristino che possa favorire una limitazione dei costi di manutenzione. Infatti, fin dai primi anni dopo la costruzione del ponte, si sono registrati diversi casi di crisi per fatica dei collegamenti rivettati, soprattutto in corrispondenza degli elementi di controvento orizzontale, dovuti, sia ad un elevato stato tensionale, sia alle vibrazioni locali indotte dal transito dei treni. Per questo motivo, negli anni sono state condotte numerose campagne di ripristino e di rafforzamento dell'impalcato. Generalmente, i modelli numerici affiancano sistematicamente le analisi d'integrità delle strutture e le moderne procedure di verifica e necessitano di attente calibrazioni per garantire una corretta simulazione del comportamento delle strutture in esercizio o in condizioni eccezionali. Mediante sperimentazioni in situ è possibile individuare le caratteristiche dinamiche delle strutture, da mettere a confronto con i risultati numerici al fine di rendere efficace la procedura di ottimizzazione. Pertanto, per descrivere accuratamente il comportamento dinamico del Manhattan Bridge sottoposto a vibrazione indotte dal passaggio dei treni metropolitani e per effettuare verifiche per eccitazioni diverse da quelle ambientali, ad esempio verifiche a fatica, è necessario disporre di un modello a elementi finiti il cui comportamento sia il più possibile aderente a quello della struttura reale. È stato dunque costruito e opportunamente calibrato un modello a elementi finiti della struttura considerando come riferimento le proprietà modali (frequenze e deformate modali) determinate sperimentalmente in seguito ad una campagna di monitoraggio strutturale effettuata nel 2012 [44]. I test sperimentali sono stati condotti grazie a una collaborazione tra la Columbia University, il CIRI Edilizia e Costruzioni e l'Università di Bologna, utilizzando il sistema SHM602 descritto sommariamente nel paragrafo 3.2.1. In seguito all'acquisizione delle accelerazioni in condizioni di esercizio tramite sensori disposti su alcuni elementi dell'impalcato, sono state ricavate le frequenze proprie e le deformate modali, con l'ausilio di un algoritmo d'identificazione nel dominio delle frequenze.

Descrizione della struttura

Il Manhattan Bridge (Figura 3.8) è uno dei ponti principali della città di New York che collega i distretti di Manhattan e Brooklyn, permettendo il passaggio di quattro linee della metropolitana, sette corsie dedicate al traffico veicolare e percorsi ciclabili e pedonali. È un ponte sospeso di lunghezza circa 890 metri, suddiviso in tre campate, una centrale di 448 metri e due laterali di 221 metri ciascuna. La struttura, completamente metallica, è costituita da due torri alte oltre 100 metri, alquanto deformabili, e da quattro cavi principali

che sorreggono l'impalcato, largo circa 37 metri, costituito da travature reticolari tipo Warren alte circa 6 metri. Gli elementi delle reticolari e delle torri sono composti da profili calastrellati, collegati fra loro principalmente mediante chiodature. La sezione trasversale dell'impalcato è costituita da una parte centrale che sorregge la sede stradale e da due porzioni laterali che ospitano 4 binari della metropolitana e 4 corsie per il traffico veicolare.



(a)



(b)



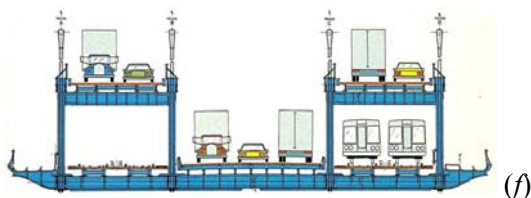
(c)



(d)



(e)



(f)



(g)

Figura 3.8: Manhattan Bridge - visione globale (a), dettagli delle torri (b, c), dettaglio dell'impalcato metallico (d), dettaglio del percorso ciclabile (e) e dettagli della sede stradale (f, g).

Calibrazione del modello FEM

Il modello a elementi finiti (Figura 3.9) è stato realizzato mediante elementi monodimensionali a comportamento elastico lineare per modellare i profili dell'impalcato, delle torri e dei cavi, mentre per il pacchetto stradale sono stati adottati elementi bidimensionali a comportamento elastico lineare (tipo shell). Per quanto riguarda il materiale associato agli elementi monodimensionali, è stato considerato un acciaio la cui densità è incrementata del 30% per tenere in conto il contributo dei piatti, dei calastrelli e delle chiodature presenti per collegare le membrature. Per gli elementi tipo shell è stato definito uno spessore equivalente in modo tale da considerare i contributi delle masse strutturali, come la soletta di calcestruzzo, quelle non strutturali come il pacchetto stradale e anche il contributo della massa corrispondente ad un livello di traffico veicolare medio. Inoltre, per tenere in conto l'aggravio di carico che i tracciati pedonali e ciclabili provocano sull'impalcato, è stata incrementata la densità dei correnti inferiori. Il vincolamento del ponte è stato realizzato introducendo un incastro ai nodi alla base delle torri e un vincolo a cerniera per i nodi dell'impalcato delle due sezioni terminali del modello. In Figura 3.10 e in Figura 3.11 sono riportate le deformate modali dei principali modi propri della struttura.

Per la definizione della geometria degli elementi e delle caratteristiche meccaniche dei materiali è stato considerato quanto presente nei più recenti elaborati disponibili, comprendenti anche gli ultimi interventi di ripristino. Tuttavia, alcuni parametri risultano incerti e la modellazione di alcuni dettagli può introdurre errori o imprecisioni sul comportamento della struttura. Pertanto, è stato necessario validare le scelte effettuate calibrando il modello costruito.

Inizialmente, sono stati individuati i parametri incogniti che maggiormente influenzano le caratteristiche dinamiche della struttura, mediante un'analisi di sensitività. Il primo parametro è la rigidezza dei cavi principali che sostengono l'impalcato, che risulta

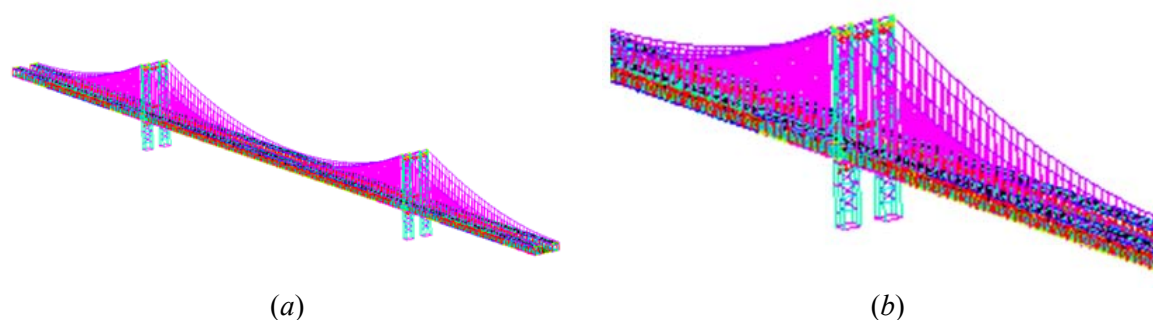


Figura 3.9: Manhattan Bridge - modello globale a elementi finiti del ponte (a) e dettaglio sulla modellazione delle torri (b).

incerta poiché dipendente dal tiro (incognito) a cui erano soggetti i cavi durante la campagna di monitoraggio.

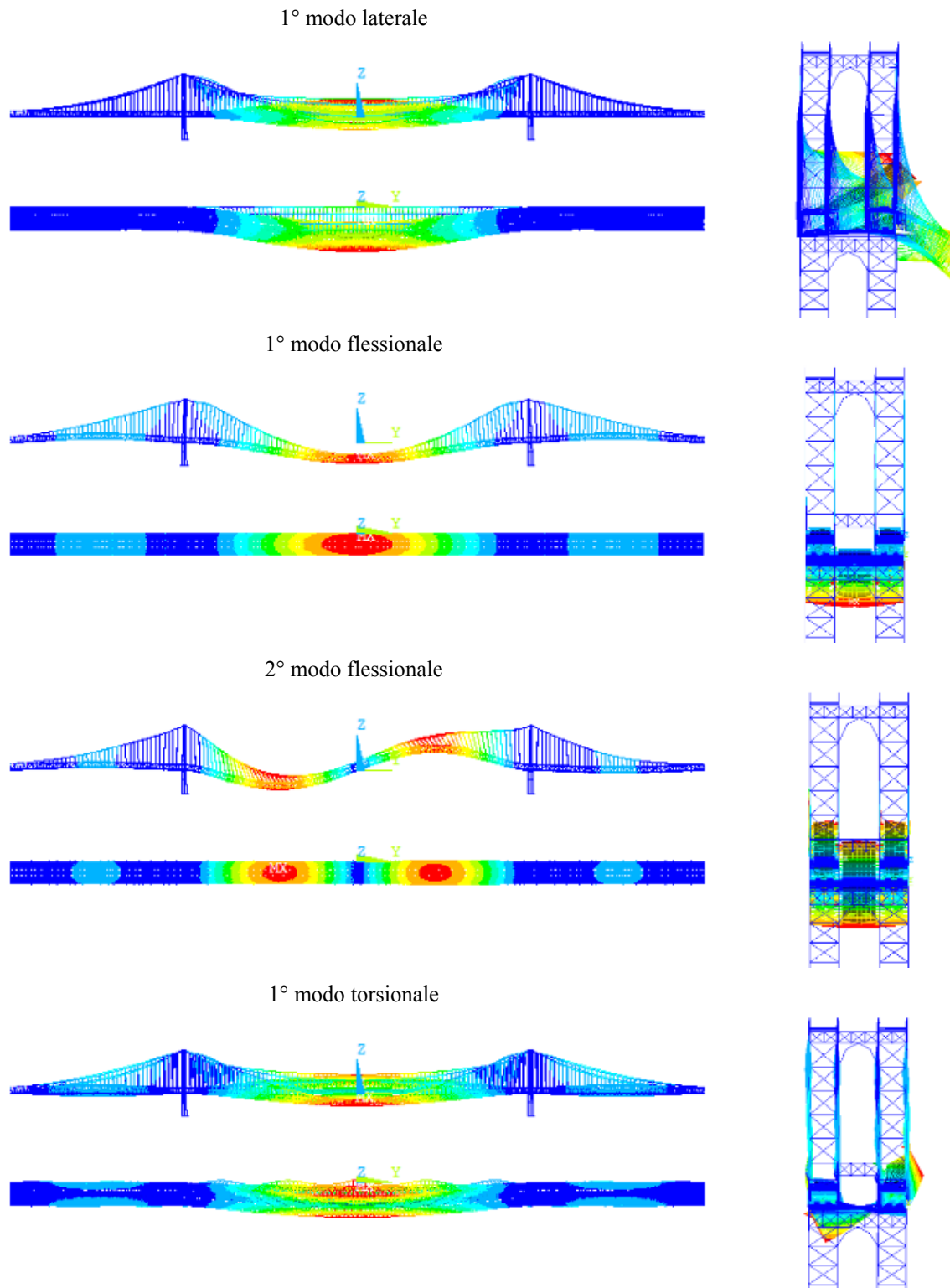


Figura 3.10: Manhattan Bridge - principali deformate modali della campata centrale ottenute dal modello a elementi finiti.

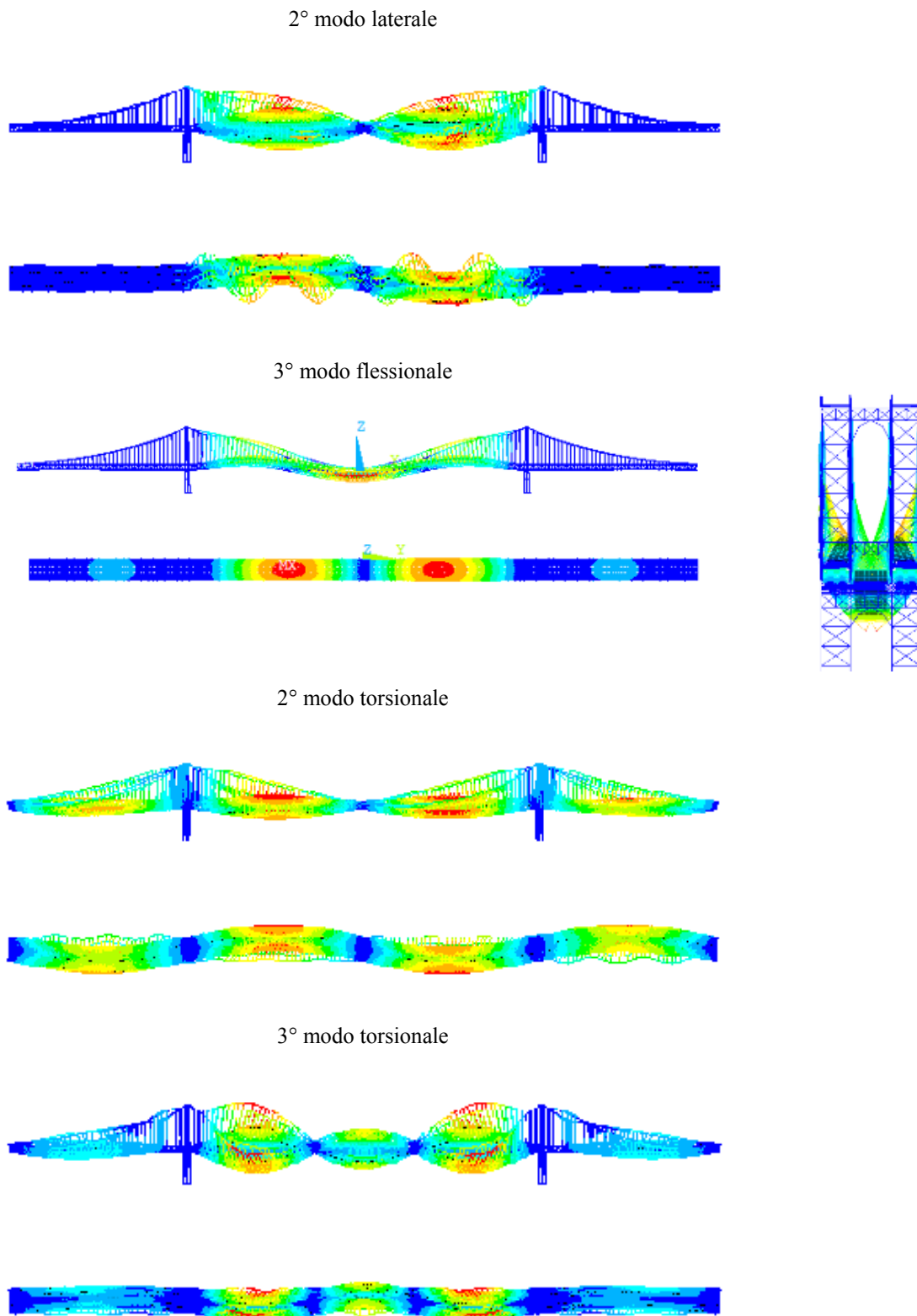


Figura 3.11: Manhattan Bridge - principali deformate modali della campata centrale ottenute dal modello a elementi finiti.

Si è scelto di imporre delle variazioni alla rigidezza dei cavi, modificando l'area della sezione circolare degli stessi (A_c). Il secondo parametro incognito è la massa dell'impalcato (m_{eq}), la cui incertezza è tenuta in conto attraverso variazioni alla densità degli elementi shell che modellano l'impalcato stradale. Non risulta, infatti, possibile risalire all'effettiva entità delle masse dei veicoli, del pacchetto stradale e delle strutture che supportano i percorsi ciclabile e pedonale. Il terzo parametro riguarda la rigidezza delle torri, in particolare è stata variata la posizione del vincolo in fondazione (z_t), in modo da considerare la rigidezza delle pile in cemento armato e la loro altezza. La procedura di ottimizzazione permette di individuare la migliore combinazione dei parametri meccanici e geometrici, per i quali le caratteristiche dinamiche del modello si avvicinano il più possibile ai valori sperimentali.

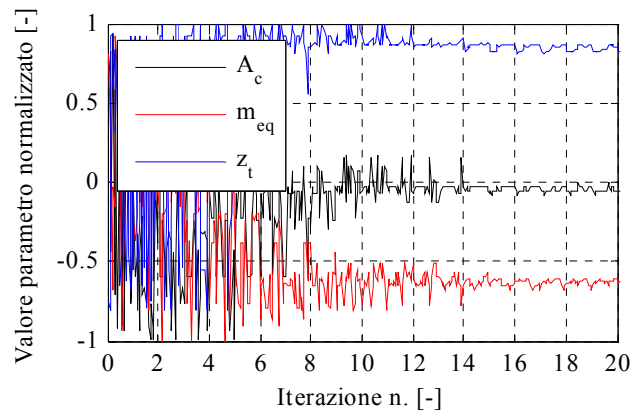
La determinazione dei parametri che costituiscono la soluzione del problema di ottimizzazione, avviene attraverso la ricerca del valore minimo di una funzione obiettivo H , definita in modo analogo a quanto riportato nel paragrafo precedente con riferimento alla procedura di ottimizzazione dei modelli FEM della passerella Pasternak. Definita una generica combinazione di parametri, si esegue un'analisi modale e si determinano i risultati numerici in termini di frequenze, deformate modali e masse partecipanti. Si è scelto di mantenere solo i modi con massa partecipante superiore al 5%, in modo tale da eliminare i numerosi modi che coinvolgono principalmente i cavi e ai quali corrisponde una massa partecipante molto limitata. L'individuazione delle frequenze numeriche da confrontare con quelle di riferimento si effettua correlando le forme modali numeriche e sperimentali mediante l'indice MAC. Sono stati considerati come riferimento 3 modi propri della struttura, due flessionali e uno torsionale.

Per effettuare la procedura di ottimizzazione è stato applicato l'algoritmo evolutivo DE-Q. Per ciascun parametro incognito è stato definito un intervallo di variabilità: $A_c = [0.08 \text{ m}^2, 0.29 \text{ m}^2]$; $m_{eq} = [2.76 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, 5.88 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3]$; $z_t = [-44 \text{ m}, +15 \text{ m}]$. Successivamente, i valori dei parametri sono stati normalizzati in modo tale da ottenere un intervallo $[-1, +1]$ per ciascun parametro. Inoltre, è stato fissato il numero di vettori della popolazione iniziale NP pari a 20, un numero massimo di iterazioni pari a 20, un limite superiore associato al primo e al secondo criterio di convergenza VTR_1 e VTR_2 pari a 0.001 e 0.01, un numero NC di vettori sui quali effettuare il controllo di convergenza pari a 3. Le analisi sono state svolte considerando la strategia denominata *best*, fissando la costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation* pari a 0.60 e la costante di *Crossover* pari a 0.50. È stato scelto un numero di vettori NS per la calibrazione di ciascuna superficie di risposta pari a 19. In Tabella 3.8 sono elencati i parametri necessari per definire la procedura di ottimizzazione.

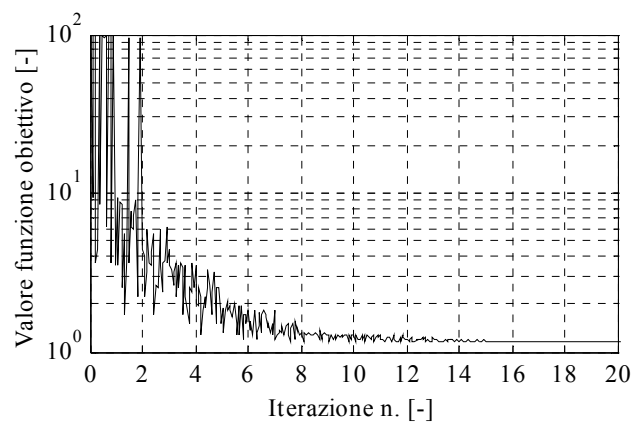
VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	20
NC	3
NS	19
itermax	20
F	0.60
CR	0.50
strategia	<i>best</i>

Tabella 3.8: Manhattan Bridge - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

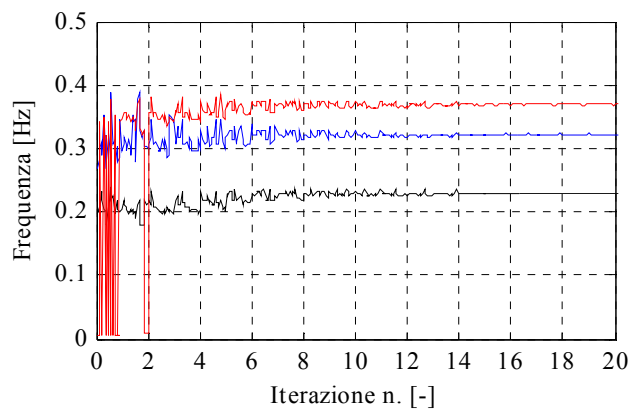
L'algoritmo è giunto a convergenza dopo 20 iterazioni. La combinazione di parametri che costituisce la soluzione del problema di ottimizzazione è la seguente: $A_c = 0.179 \text{ m}^2$, $m_{eq} = 3.35 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, $z_t = -38.5 \text{ m}$. Di seguito sono rappresentati gli andamenti, al variare del numero d'iterazioni, dei valori assunti da ciascun parametro normalizzato (Figura 3.12a), dalla funzione obiettivo (Figura 3.12b) e dalle frequenze associate ai tre modi considerati nella procedura di ottimizzazione (Figura 3.12c). Si può notare come i risultati in termini di frequenze e di funzione obiettivo sono stabili dopo circa otto iterazioni. Le iterazioni successive risultano necessarie per raggiungere la convergenza imposta e per ridurre l'incertezza dei parametri ottimizzati. In Tabella 3.9 si riporta il confronto fra le frequenze sperimentali e quelle numeriche ottenute in seguito alla procedura di ottimizzazione. Gli errori relativi in termini di frequenze risultano inferiori al 9% per tutti i modi, con l'eccezione del primo modo laterale (circa pari a 17%). In Figura 3.13 si riportano i valori del MAC escludendo i modi laterali, in quanto il confronto è stato effettuato unicamente considerando le componenti verticali dei vettori modali. La correlazione tra le forme modali numeriche e sperimentali risulta quasi perfetta (MAC > 98%), con l'eccezione del nono e decimo modo (82% e 90%), comunque accettabili, e del settimo (55%), valore alquanto inferiore. Una correlazione così ridotta è probabilmente dovuta all'influenza delle campate laterali e alla rigidità del collegamento delle campate con le torri, che nel modello numerico risulta superiore e provoca rotazioni più limitate in corrispondenza delle torri con conseguenti spostamenti maggiori in mezzera della campata centrale (si veda Figura 3.14). Il modello ottimizzato potrà essere in seguito impiegato per condurre analisi dinamiche simulando il transito dei treni metropolitani e quindi determinare lo stato tensionale degli elementi dell'impalcato del ponte e successivamente individuare i profili più sollecitati e che potrebbero riscontrare problematiche di resistenza a fatica.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.12: Manhattan Bridge - risultati della procedura di ottimizzazione - valori dei parametri normalizzati al variare del numero di iterazioni (a), funzione obiettivo al variare del numero di iterazioni (b), frequenze al variare del numero di iterazioni (c)

tipo modo	n. modo	freq. sper. [Hz]	freq. num. [Hz]	err. [%]
1° laterale	1	0.205	0.241	+17.80
1° flessionale	2	0.230	0.228	-0.76
2° flessionale	3	0.303	0.321	+6.10
1° torsionale	4	0.381	0.370	-2.87
2° laterale	5	0.437	0.432	-1.18
3° flessionale	6	0.596	0.571	-4.28
2° torsionale	7	0.676	0.724	+7.08
3° torsionale	8	0.801	0.730	-8.85
4° flessionale	9	0.879	0.811	-7.76

Tabella 3.9: Manhattan Bridge - confronto fra frequenze sperimentali e numeriche in seguito alla procedura di ottimizzazione.

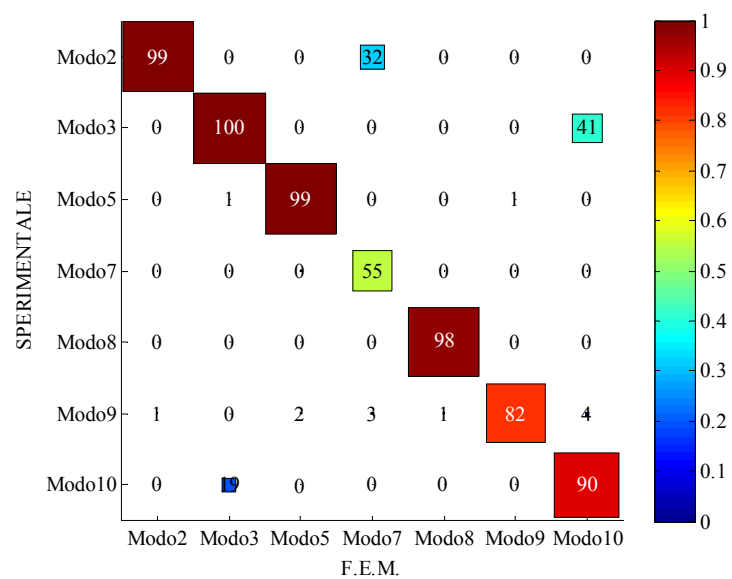


Figura 3.13: Manhattan Bridge - risultati della procedura di ottimizzazione - confronto tra le forme modali sperimentali e numeriche con l'indice *MAC*.

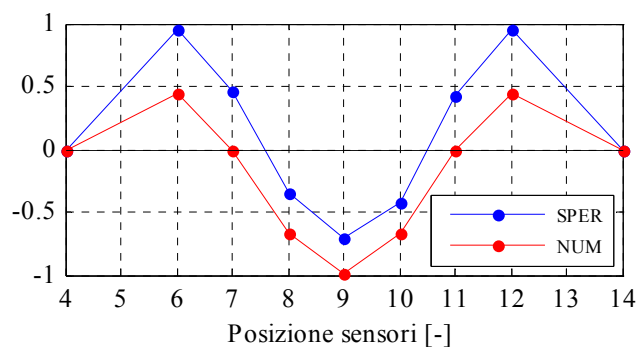


Figura 3.14: Manhattan Bridge - confronto fra le deformate modali n°7 - sperimentale (linea blu) e numerico (linea rossa).

3.3 APPLICAZIONE DELL'ALGORITMO DE-Q PER LA CALIBRAZIONE DI LEGAMI COSTITUTIVI DI CALCESTRUZZI FIBRORINFORZATI

L'algoritmo DE-Q è stato testato per risolvere una serie di problemi di ottimizzazione riguardanti la caratterizzazione del comportamento di calcestruzzi fibrorinforzati (FRC). Lo scopo è di ricercare i parametri per definire relazioni non lineari tensione-apertura di fessura per elementi prismatici e circolari in FRC a partire da risultati di laboratorio [45, 46]. Le prove sperimentali hanno permesso di caratterizzare il comportamento flessionale dei provini attraverso curve che legano la forza applicata durante la prova, l'apertura di fessura misurata all'apice dell'intaglio (CMOD - *Crack Mouth Opening Displacement*) e la freccia in mezzeria dell'elemento. Erano disponibili modelli a elementi finiti dei provini, realizzati introducendo molle caratterizzate da un comportamento non lineare in modo da simulare il processo di frattura secondo il modello di Olesen [47]. L'obiettivo dei processi di ottimizzazione è di calibrare il legame costitutivo delle molle ricercando una corrispondenza fra risultati numerici e sperimentali in termini di forza applicata, freccia in mezzeria e apertura di fessura. I problemi affrontati in questo paragrafo risultano più complessi rispetto alle procedure di calibrazione dei modelli FEM descritte nei paragrafi precedenti, soprattutto per quanto riguarda il comportamento non lineare degli elementi modellati che può comportare difficoltà e onerosità nella risoluzione numerica.

3.3.1 Calcestruzzi fibrorinforzati (FRC)

Il calcestruzzo fibrorinforzato è un materiale composito costituito da una matrice di calcestruzzo a cui si aggiungono fibre in acciaio, materiale polimerico, inorganico (carbonio o vetro) o materiale naturale. Le proprietà di questo materiale dipendono non solo dalle caratteristiche meccaniche della matrice, ma soprattutto dal dosaggio delle fibre, dall'aderenza tra fibre e matrice e dalle caratteristiche geometriche e meccaniche delle fibre stesse. L'inserimento delle fibre all'interno del calcestruzzo non comporta un aumento della resistenza a trazione del materiale che corrisponde alla tensione in corrispondenza della quale si verifica l'innesco della prima fessura nell'elemento sollecitato, né una variazione del modulo elastico. Piuttosto, l'aggiunta di fibre comporta un significativo incremento della tenacità del materiale, cioè dell'energia assorbita durante il processo di propagazione della fessurazione. In particolare, la presenza di fibre limita l'apertura della fessura evitando il collasso fragile del materiale al sopraggiungere della prima fessura e conferisce una maggior resistenza residua a trazione in fase post-fessurativa.

Le applicazioni strutturali dei calcestruzzi fibrorinforzati con fibre metalliche o polimeriche riguardano per esempio pannelli portanti di facciata, pavimentazioni industriali per limitare la fessurazione da ritiro, conci prefabbricati e rivestimenti di tunnel,

travi, giunti o nodi strutturali, elementi di copertura di spessore sottile, strutture destinate ad assorbire urti e/o resistere a fatica, travi precomprese prefabbricate.

3.3.2 Prove sperimentali di laboratorio su provini in FRC

I risultati riportati nel seguito si riferiscono alla calibrazione di leggi tensione-apertura di fessura utilizzando dati sperimentali ottenuti da prove di laboratorio su provini prismatici in FRC [45] e su lastre circolari [46].

Prove di laboratorio su provini prismatici in FRC

La prima campagna sperimentale per caratterizzare il comportamento post-fessurativo di calcestruzzi fibrorinforzati è stata condotta su prismi di dimensioni $150 \times 150 \times 550 \text{ mm}^3$. La campagna di prove, eseguita dall'Università di Bologna, fa parte di una più ampia ricerca sulla caratterizzazione dei calcestruzzi fibrorinforzati per la determinazione del comportamento in esercizio e a lungo termine del materiale al variare della percentuale di fibre, della loro forma e composizione. Per questo motivo, sono state introdotte nell'impasto differenti tipi e dosaggi di fibre metalliche e polimeriche (macro-sintetiche). In particolare, sono state adottate un tipo di fibre metalliche e tre tipi di fibre sintetiche (poliolefina, polistirene e una miscela di polimeri misti). Nella Tabella 3.10 per ciascuna tipologia di fibra sono indicate le principali caratteristiche geometriche e meccaniche: l_f è la lunghezza della fibra, d_f il diametro equivalente, l_f/d_f definisce il rapporto d'aspetto, E indica il modulo elastico, f_f la tensione di rottura e Dos il dosaggio di fibre. In particolare, per le fibre macro-polimeriche sono stati considerati due diversi dosaggi, mentre per le fibre in acciaio tre. Il dosaggio delle fibre da introdurre nella matrice cementizia è stato opportunamente scelto in modo da evitare una riduzione della lavorabilità del materiale, con conseguente diminuzione della resistenza al picco.

Con lo scopo di confrontare l'efficacia delle diverse tipologie di fibre, è stata scelta una composizione del calcestruzzo di riferimento, comune a tutti i provini. La miscela cementizia selezionata è conforme a quelle prescritte dalla norma EN 14845:2006 ed è caratterizzata da una dimensione massima dell'aggregato pari a 20 mm, un contenuto massimo di cemento di 350 kg/m^3 e una tensione nominale al limite di proporzionalità,

Materiale	Codice	l_f [mm]	d_f [mm]	l_f/d_f [-]	E [GPa]	f_f [MPa]	Dos [kg/m ³]
acciaio	SF1B	50	1	50	210	1100	20/25/35
poliolefina	MS1B	54	0.34	159	-	620-758	2/4.8
polistirene	MS2B	40	0.83	48	11.3	400-800	5/10
polimeri misti	MS3B	40	0.44	91	9.5	620	2/4.8

Tabella 3.10: Caratteristiche geometriche e meccaniche delle fibre impiegate nelle campagne sperimentali su provini prismatici.

misurata a 28 giorni su provini privi di fibre, compresa nell'intervallo 4.3 ± 0.3 MPa. Sono state dunque considerate nove miscele differenti e per ciascuna sono stati confezionati sette provini prismatici, in quanto pur impiegando la stessa miscela si possono presentare variazioni della resistenza a trazione del materiale che influenza il comportamento di picco e variazioni della quantità di fibre che attraversano la zona fessurata che influenza maggiormente il ramo degradante. Inoltre, per ogni miscela sono stati confezionati due provini cubici e uno cilindrico da sottoporre a prove di rottura per determinare la resistenza a compressione e il modulo elastico dei calcestruzzi ottenuti. Ciascun provino è stato fatto maturare per 28 giorni prima di essere sottoposto alla prova di flessione. In ciascun provino è stato realizzato un intaglio con una profondità di 25 mm e una larghezza di 4 mm in corrispondenza della mezzeria in modo da controllare l'innescò della fessura.

Il comportamento flessionale dei provini è stato investigato mediante prove di flessione a tre punti, in accordo con la norma EN 14645:2005, per quanto riguarda la procedura da seguire durante le prove e la norma EN 14845:2006, per quanto riguarda le proprietà meccaniche del calcestruzzo di riferimento. La configurazione dei test con le indicazioni della geometria dei provini confezionati è riportata in Figura 3.15. Il test opera in controllo di spostamento e durante la prova vengono monitorati l'ampiezza della fessura alla base dell'intaglio CMOD attraverso un trasduttore di spostamento resistivo e la forza applicata mediante una cella di carico. La prova termina appena si raggiunge un valore di CMOD pari a 5 mm. In Figura 3.16 si riportano le curve forza-CMOD ottenute dalle prove sperimentali su provini confezionati con differenti dosaggi di fibre macro-sintetiche (Figura 3.16a-c) e in acciaio (Figura 3.16d). Colori differenti delle curve corrispondono a differenti dosaggi; in particolare, il colore rosso si riferisce ai dosaggi inferiori e il colore blu a dosaggi intermedi. Per ciascuna curva può essere individuato il valore massimo di forza registrato che corrisponde alla formazione della prima fessura nel provino.

Le campagne sperimentali hanno mostrato che le proprietà geometriche e meccaniche delle fibre influenzano il comportamento post-fessurativo degli elementi testati, in particolare la tenacità dei calcestruzzi fibrorinforzati è controllata dall'efficienza delle fibre nel trasferimento della tensione attraverso la fessura. Pertanto, rispetto ai risultati ottenuti in assenza di fibre, si osserva un notevole aumento della resistenza residua durante la fase di fessurazione del calcestruzzo che si accresce all'aumentare del dosaggio delle fibre; di contro si può notare una sostanziale invarianza della resistenza di picco sia rispetto alla condizione in assenza di fibre, sia al variare del dosaggio. Inoltre, è evidente la dispersione dei risultati ottenuti considerando differenti provini confezionati con la stessa tipologia e lo stesso dosaggio di fibre; questo effetto è legato alla variabilità del numero di fibre che attraversano la sezione fessurata dell'elemento.

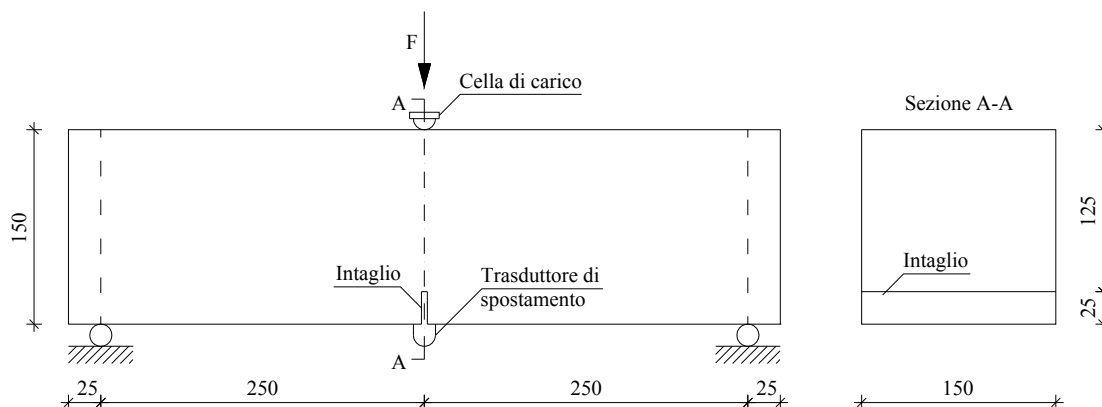


Figura 3.15: Configurazione delle prove di flessione a 3 punti su provini prismatici, le misure sono riportate in millimetri.

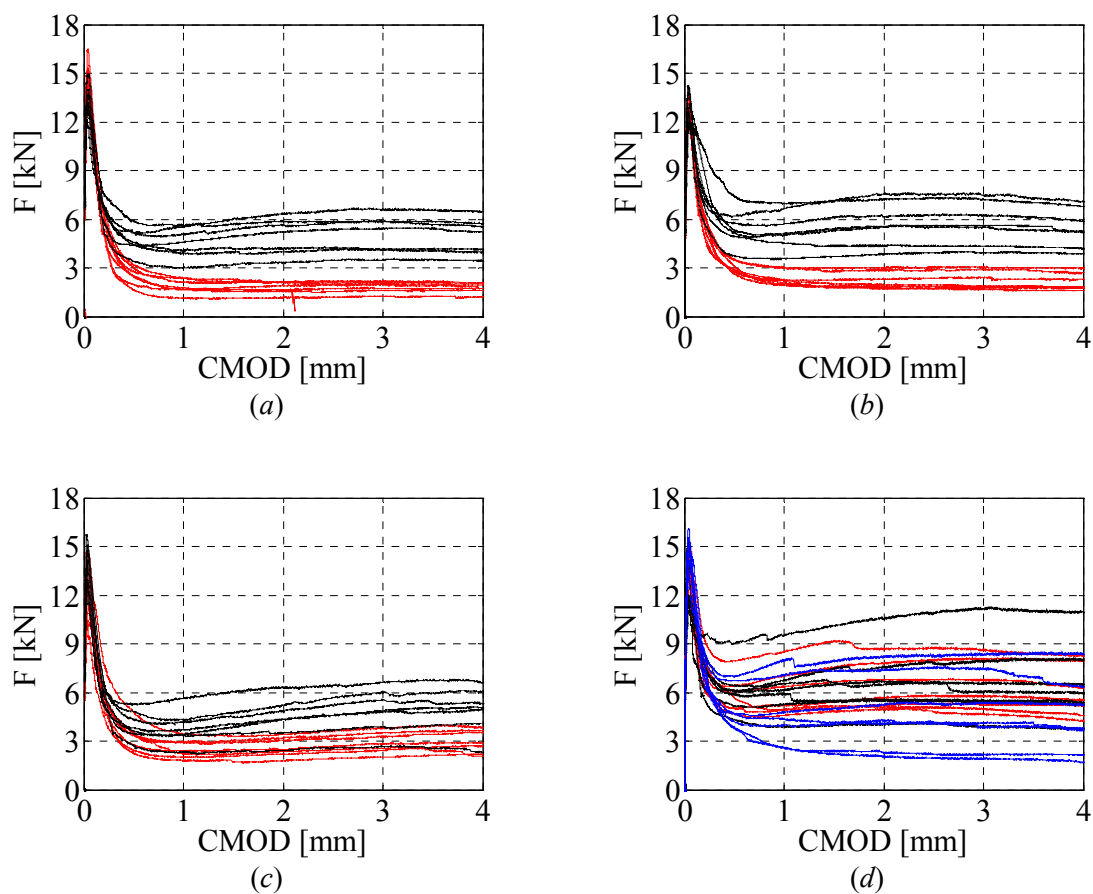


Figura 3.16: Curve sperimentali forza-CMOD per provini prismatici confezionati con fibre macro-sintetiche tipo poliolefina (a), polistirene (b) o polimeri misti (c) e fibre in acciaio (d) per differenti dosaggi (colore rosso per dosaggi inferiori, colore blu per dosaggi intermedi).

Generalmente le fibre in acciaio hanno prestazioni superiori rispetto a quelle macropolimeriche anche se i risultati ottenuti su provini confezionati con fibre in acciaio

mostrano una maggior dispersione, probabilmente legata al fatto che le dimensioni previste dalla normativa per i provini sono limitate rispetto alla geometria delle fibre metalliche. I risultati sperimentali sono adottati come riferimento nelle procedure di ottimizzazione che saranno descritte nel dettaglio nei paragrafi seguenti.

Prove di laboratorio su lastre circolari in FRC

Durante la seconda campagna sperimentale condotta dall'Università di Bologna sono state confezionate lastre circolari in FRC di spessore 75 mm, suddivise in serie in base al



Figura 3.17: Prove di flessione RDP su lastre circolari in FRC - provino intagliato (a) e provino fessurato in seguito all'esecuzione della prova (b).

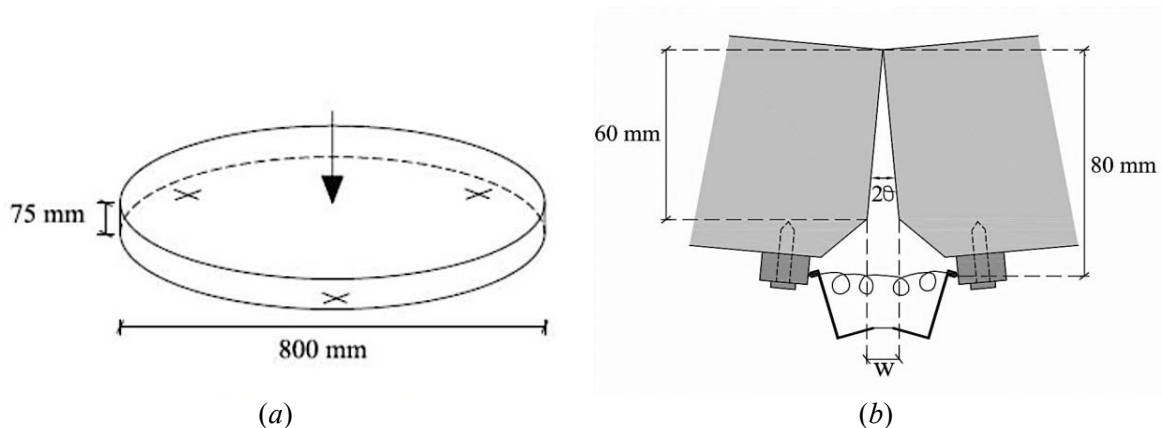


Figura 3.18: Configurazione delle prove di flessione RDP su lastre circolari in FRC (a) e particolare del posizionamento del trasduttore di spostamento per la misura dell'apertura di fessura CMOD (b).

diametro (500, 600 o 800 mm); per ciascuna serie sono state prodotte quattro lastre. La miscela cementizia adottata per tutti gli elementi è composta, per ogni metro cubo di calcestruzzo da 245 kg di cemento, 1050 kg di aggregati grossi, 885 kg di aggregati fini, 150 litri di acqua e 40 kg di fibre in acciaio ed è caratterizzata da una resistenza a compressione dopo 28 giorni di maturazione di 39.7 MPa [46].

Per controllare l'innesco della fessura, in ogni provino sono stati realizzati tre intagli disposti a 120° l'uno dall'altro, per una profondità di 15 mm e una larghezza di 4 mm (Figura 3.17a). Le lastre prodotte sono state sottoposte a test RDP (*Round Determinate Panel*) che prevedono di applicare un carico al centro del provino appoggiato su tre vincoli (Figura 3.18a). Questa modalità di prova ha il vantaggio di ottenere sempre lo stesso meccanismo di rottura per i provini, caratterizzato da tre sezioni fessurate comprese fra le sezioni in cui sono presenti gli appoggi e convergenti nel centro (Figura 3.17b); ciò accade in quanto i provini si trovano in una configurazione staticamente determinata. Il test opera in controllo di spostamento e durante la prova vengono monitorati l'ampiezza della fessura alla base dell'intaglio CMOD attraverso trasduttori di spostamento di tipo resistivo applicati in corrispondenza degli intagli (Figura 3.18b), la freccia verticale in posizione centrale e la forza applicata mediante una cella di carico. In particolare, durante i test l'apertura di fessura è misurata in corrispondenza di ciascuno dei tre intagli e successivamente per ciascuna tripletta di valori acquisiti al medesimo istante si esegue la media in modo da ottenere una grandezza rappresentativa del comportamento globale del provino. Generalmente, infatti, misure di apertura di fessura effettuate in punti differenti forniscono valori diversi poiché le fibre sono distribuite in modo non omogeneo all'interno del provino.

Il comportamento flessionale delle lastre circolari può essere descritto attraverso curve che legano la forza applicata durante la prova e la media delle aperture di fessura misurate agli apici degli intagli (CMOD) oltre alle curve che legano la forza e la freccia misurata al centro del provino. In Figura 3.19 si riportano le curve forza-CMOD e forza-freccia ottenute dalle prove sperimentali considerando provini di diametro differente. Come già osservato nel paragrafo precedente relativamente ai risultati sperimentali per provini prismatici, anche nel caso delle lastre cilindriche è evidente la dispersione dei risultati ottenuti considerando differenti provini confezionati con la stessa geometria e miscela. I risultati sperimentali sono adottati come riferimento nelle procedure di ottimizzazione che saranno descritte nel dettaglio nei paragrafi seguenti.

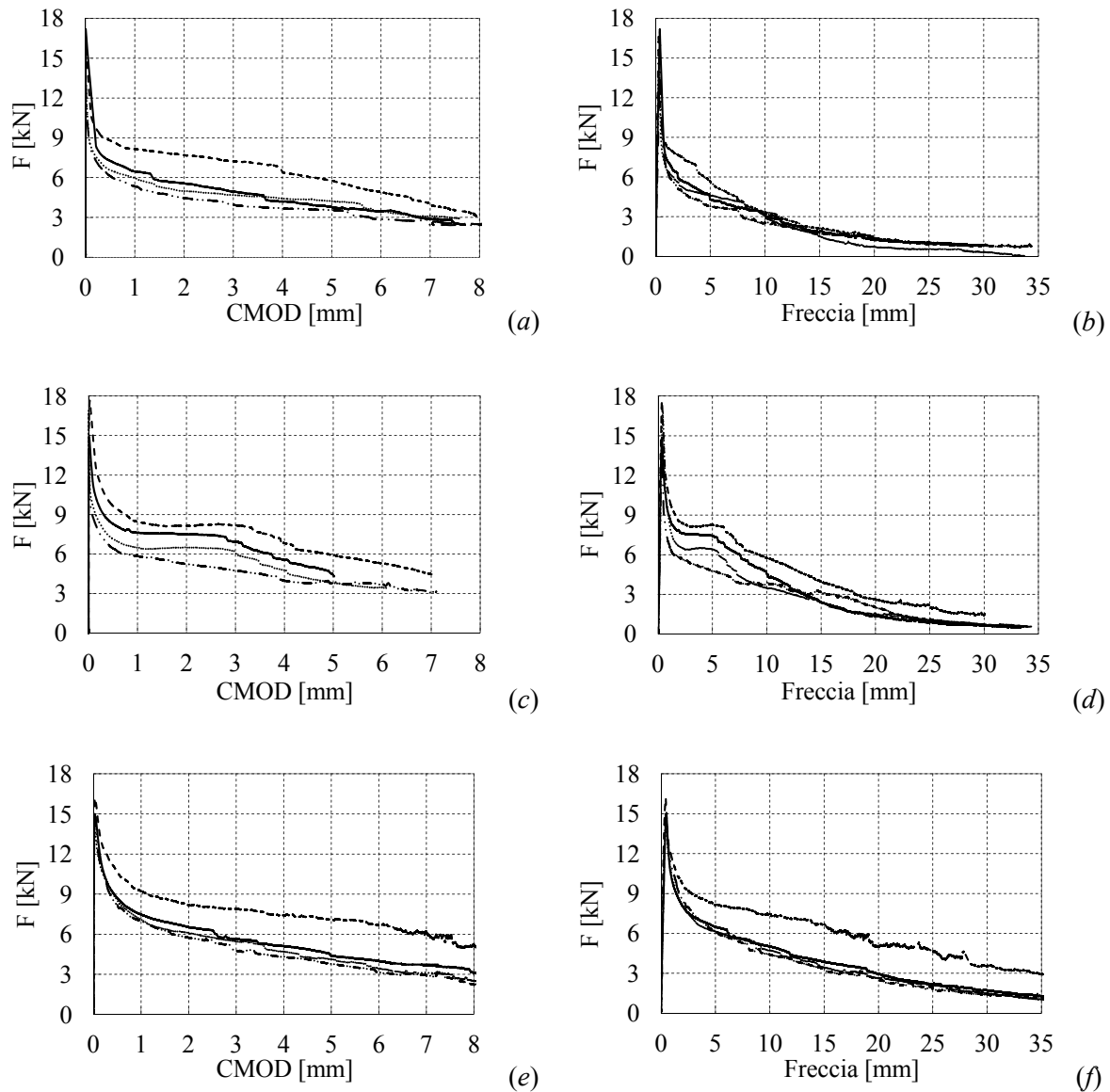


Figura 3.19: Curve sperimentali forza-CMOD e forza-freccia per lastre cilindriche in FRC di diametro 500 mm (*a, b*), 600 mm (*c, d*) e 800 mm (*e, f*).

3.3.3 Relazione tensione-apertura di fessura (modello analitico)

Il comportamento meccanico di calcestruzzi fibrorinforzati soggetti a flessione può essere descritto mediante modelli numerici di diversa complessità. Le proposte in letteratura sono molteplici e la scelta del modello influenza il problema inverso di determinazione della legge poiché il legame tensione-apertura di fessura non è a rigore un legame costitutivo e pertanto una proprietà intrinseca del materiale. In questo studio è stato scelto il modello di Olesen [47] che schematizza la zona fessurata mediante una cerniera non lineare. Il comportamento della cerniera dipende dalle caratteristiche delle fibre adottate nell'impasto e può essere descritto attraverso un legame costitutivo tensione-

apertura di fessura. Con riferimento ad un generico elemento trave, la porzione in prossimità della fessura è modellata come una cerniera costituita da fibre orizzontali schematizzate come molle non lineari indipendenti che permettono di simulare la propagazione della fessura fittizia. Tali molle sono collegate alle sezioni estremali del concio considerate rigide in modo tale da limitare la distorsione del campo delle deformazioni alla zona compresa tra le due sezioni stesse. Tali sezioni possono traslare e ruotare per mantenere la congruenza con la restante parte della trave che si considera non fessurata e con comportamento elastico lineare.

La relazione fra tensione e apertura di fessura di un calcestruzzo fibrorinforzato, che è la medesima associata alla generica fibra nel modello adottato, è descritta dall'espressione seguente [48]:

$$\sigma(w) = \begin{cases} E \varepsilon & w = 0 \\ \sigma(w) = g(w) f_{ct} & w > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

dove E è il modulo elastico del calcestruzzo, ε è la deformazione elastica, f_{ct} è la resistenza a trazione monoassiale del calcestruzzo, σ è la tensione successiva all'apertura di fessura e w è l'apertura di fessura. La forma della relazione tensione-apertura di fessura è definita dalla funzione $g(w)$ in modo tale che $g(0) = 1$. Per i calcestruzzi fibrorinforzati lo sfilamento delle fibre è il meccanismo principale di trasferimento della tensione attraverso la fessura; pertanto la forma della relazione tensione-apertura di fessura è influenzata dal dosaggio e dalla tipologia di fibre utilizzate e può risultare anche alquanto complessa. In accordo con [45] si adotta una curva bilineare, una delle assunzioni più semplici che permette di cogliere il differente comportamento delle fibre per piccole e grandi aperture di fessura. La curva bilineare è riportata in Figura 3.20 ed è descritta dalla seguente formulazione:

$$g(w) = \begin{cases} b_1 - a_1 w & 0 \leq w \leq w_1 \\ b_2 - a_2 w & w_1 \leq w \leq w_2 \end{cases} \quad (3.6)$$

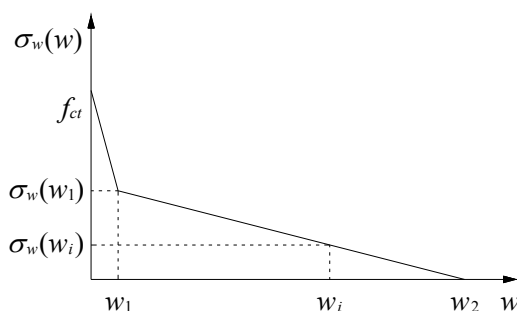


Figura 3.20: Modello di Olesen - relazione bilineare tensione-apertura di fessura.

dove w_1 e w_2 rappresentano i valori limite di apertura di fessura per i due rami della legge tensione-apertura di fessura, b_1 è posto pari a 1, mentre a_1 , b_2 e a_2 rappresentano i parametri da determinare per definire l'equazione della curva. La deformazione della cerniera può essere espressa in funzione della rotazione θ delle sezioni rigide e della posizione dell'asse neutro y_0 . L'allungamento della generica fibra $u(y)$ è calcolato come:

$$u(y) = s \cdot \varepsilon'(y)', \quad (3.7)$$

dove s è la larghezza del concio di trave e ε' è la deformazione media esprimibile come

$$\varepsilon' = (y - y_0) \cdot k', \quad (3.8)$$

con k' curvatura media, definita come

$$k' = \frac{2\theta}{s}. \quad (3.9)$$

Se la generica fibra è attraversata da una fessura, la deformazione è esprimibile come somma della deformazione elastica e dell'apertura di fessura, come suggerisce l'espressione seguente:

$$u(y) = s \cdot \varepsilon'(y) = s \frac{\sigma(w(y))}{E} + w(y). \quad (3.10)$$

Dall'equazione 3.10 si può ricavare la tensione:

$$\sigma(w(y)) = [2(y - y_0)\theta - w(y)] \cdot \left(\frac{E}{s}\right), \quad (3.11)$$

mentre dall'equazione 3.6 si ottiene

$$\sigma(w(y)) = f_{ct} [b_i - a_i w(y)] \quad \text{per } i \in [1, 2]. \quad (3.12)$$

Risolvendo le equazioni 3.11 e 3.12 rispetto a $w(y)$ e $\sigma_w(w(y))$ per $i \in [1, 2]$, si ottengono le seguenti espressioni:

$$w(y) = \frac{2(y - y_0)\theta - \zeta_i}{1 - \beta_i} \quad \text{per } i \in [1, 2] \quad (3.13)$$

$$\sigma(w(y)) = \frac{\zeta_i - 2(y - y_0)\theta \beta_i}{1 - \beta_i} \frac{E}{s} \quad \text{per } i \in [1, 2], \quad (3.14)$$

dove i parametri adimensionali β_i e ζ_i sono definiti come

$$\beta_i = \frac{f_i a_i s}{E} \quad \text{e} \quad \zeta_i = \frac{f_i b_i s}{E} \quad \text{per } i \in [1, 2]. \quad (3.15)$$

Le espressioni 3.13 e 3.14 descrivono analiticamente il profilo dell'apertura di fessura e la distribuzione della tensione nella sezione fessurata. Il modello di Olesen presuppone che la zona compressa rimanga in campo elastico, mentre il comportamento non lineare è concentrato soltanto nella zona di fessurazione. Durante la propagazione della fessura, la distribuzione delle tensioni si modifica: inizialmente la sezione risulta interamente reagente (fase elastica), poi si ha l'apertura della fessura che aumenta progressivamente la sua ampiezza (comportamento plastico della cerniera).

3.3.4 Modellazione a elementi finiti dei provini in FRC

Sono stati adottati modelli a elementi finiti per riprodurre il comportamento post-fessurativo non lineare dei provini in FRC, assegnando a una serie di molle una relazione tensione-apertura di fessura bilineare semplificata, in accordo con il modello di Olesen descritto nel paragrafo precedente.

Per quanto riguarda i provini prismatici è stato impiegato un modello FEM [45] rappresentante metà provino, data la simmetria del problema. Sono utilizzati elementi bidimensionali a quattro nodi in quanto durante i test sperimentali i provini non subiscono deformazioni fuori dal piano. Il modello è vincolato esternamente mediante un vincolo che impedisce le traslazioni verticali posizionato in corrispondenza della sezione in mezzeria del provino e una serie di vincoli di interfaccia distribuiti nella sezione con esclusione della zona intagliata per riprodurre le condizioni dell'elemento completo. In corrispondenza della porzione di sezione intagliata sono stati introdotti elementi tipo molla caratterizzati da un comportamento non lineare in modo tale da simulare il processo di frattura secondo il modello di Olesen; inoltre in questa zona il modello è smussato per evitare possibili concentrazioni puntuali di tensione. La dimensione della mesh è variabile; in questo modo si hanno a disposizione elementi di dimensioni limitate nella sezione in mezzeria per la distribuzione delle molle e in corrispondenza degli appoggi per evitare problemi computazionali legati alla forza concentrata di reazione, e elementi di dimensioni maggiori nelle altre zone del modello per ridurre lo sforzo computazionale legato alla risoluzione numerica del problema.

Anche le lastre circolari sono state modellate agli elementi finiti [46]; grazie alla geometria e alla simmetria, è stato possibile limitare la modellazione ad un settore circolare. Infatti, per la presenza dei tre intagli ciascun provino può essere suddiviso in tre settori circolari di apertura pari a 120° ; per ogni settore si può individuare un'asse di simmetria poiché in posizione centrale è posto il vincolo di appoggio e le due sezioni estremali corrispondono a sezioni intagliate. Pertanto, ogni settore può essere ulteriormente suddiviso in due settori di ampiezza 60° , ciascuno dei quali presenta una sezione intagliata e una sezione con un vincolo di appoggio. Il modello è vincolato esternamente in corrispondenza della sezione su cui giace l'appoggio, mentre in corrispondenza della

sezione intagliata sono stati introdotti elementi tipo molla caratterizzati da un comportamento non lineare in modo tale da simulare il processo di frattura secondo il modello di Olesen. Sono utilizzati elementi tridimensionali a 8 nodi; la dimensione della mesh è variabile per le stesse ragioni riportate nella descrizione del modello a elementi finiti riferito ai provini prismatici.

In Figura 3.21a è riportato il modello a elementi finiti adottato per la calibrazione della legge costitutiva di provini prismatici, mentre in Figura 3.21b il modello del settore circolare impiegato per l'ottimizzazione del comportamento di lastre circolari.

3.3.5 Calibrazione di leggi tensione-apertura di fessura

L'algoritmo DE-Q è stato impiegato per risolvere problemi di ottimizzazione considerando come riferimento i test sperimentali condotti sui provini in FRC confezionati con differente tipologia e dosaggio di fibre. In particolare, per ciascuna prova è stata effettuata la calibrazione del legame costitutivo da assegnare alle molle non lineari introdotte nel modello FEM, ricercando una corrispondenza fra risultati numerici e sperimentali. Lo scopo è identificare per ciascun test la miglior combinazione di 4 parametri incogniti che permette di definire la relazione tensione-apertura di fessura per riprodurre al meglio i risultati sperimentali. Si sottolinea che in questi problemi la soluzione non è nota a priori non conoscendo la forma della funzione obiettivo.

Calibrazione leggi costitutive per prismi in FRC

Con riferimento alla Figura 3.20, i parametri incogniti che permettono di definire le relazioni tensione-apertura di fessura sono:

f_{ct} che corrisponde alla resistenza a trazione monoassiale del calcestruzzo;

$\sigma_w(w_1)$ che è la tensione in corrispondenza di w_1 ;

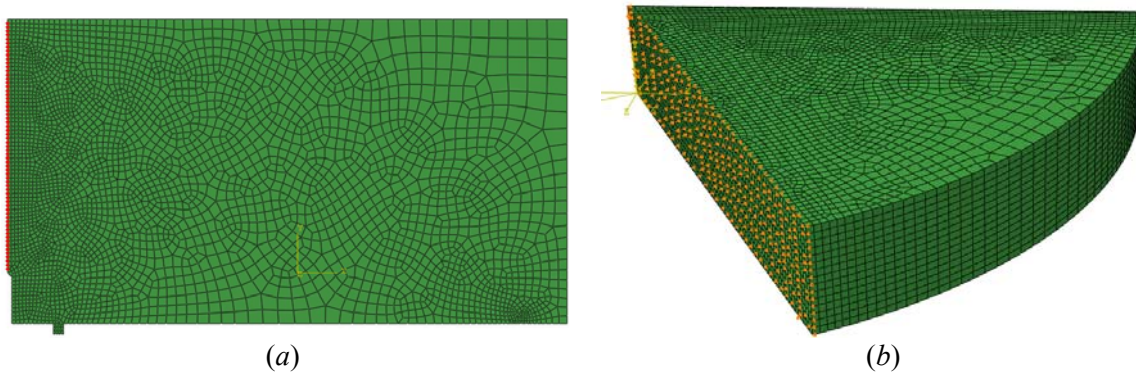


Figura 3.21: Modelli a elementi finiti - porzione di un provino prismatico (a) e di una lastra circolare (b).

$\sigma_w(5mm)$ che è la tensione in corrispondenza di un'apertura di fessura di 5 mm;

w_l che corrisponde all'apertura di fessura che rappresenta il confine fra i due tratti lineari della legge costitutiva.

E' stato posto un vincolo sui valori assunti dal terzo parametro durante le successive iterazioni del processo; in particolare, si richiede che $\sigma_w(5mm) < \sigma_w(w_l)$ in modo tale da garantire una tangente negativa al secondo ramo della curva bilineare che corrisponde a un comportamento post-fessurativo degradante del materiale. Preliminarmente, per ciascuna curva sperimentale considerata è stata effettuata un'analisi di sensitività che ha permesso di valutare l'influenza di ciascun parametro sull'andamento delle curve forza-CMOD e di definire un range di variabilità per ciascun parametro in modo da agevolare la ricerca della soluzione ottimale riducendo gli oneri computazionali. In particolare, sono stati definiti svariati set di parametri combinando i valori massimi e minimi dei range definiti per le analisi inverse condotte in uno studio precedente mediante un algoritmo genetico presente nel Toolbox di Matlab[®] [45]. Per ciascuna combinazione di parametri è stata definita la legge costitutiva da assegnare alle molle non lineari del modello FEM ed è stata condotta un'analisi statica in controllo di spostamento ottenendo una curva forza-CMOD. Successivamente, è stato verificato che ciascuna curva sperimentale fosse compresa all'interno del fascio di curve numeriche ottenute, in modo da assicurarsi che la soluzione del problema potesse essere individuata all'interno dei range dei parametri fissati. Inoltre, sono stati definiti i nuovi range dei parametri (Tabella 3.11), a partire dai precedenti, ma cercando di ridurre l'ampiezza del fascio definito dalle curve numeriche così da limitare lo sforzo computazionale complessivo della procedura di calibrazione. In Figura 3.22a, b si riporta a titolo esemplificativo il confronto fra la curva sperimentale (linea rossa) riferita ad un provino prismatico in FRC costituito da una miscela di calcestruzzo e fibre macro-sintetiche (poliolefina) con un dosaggio di 2 kg/m^3 e le curve numeriche (linee nere) ottenute combinando i valori massimi e minimi dei parametri incogniti secondo i range di variabilità definiti. Inoltre, si riporta il confronto (Figura 3.23) fra curve numeriche ottenute modificando un solo parametro per volta in modo tale da comprendere l'influenza di ciascun parametro sull'andamento delle curve. Si nota come il parametro f_{ct} influenza significativamente il valore di picco della forza, mentre il tratto finale del ramo degradante non è modificato. Il secondo parametro ($\sigma_w(w_l)$) comporta variazioni nell'andamento globale della curva, sia nella porzione del picco, sia nel ramo discendente, mentre il terzo parametro, $\sigma_w(5mm)$, influenza maggiormente la curva nel ramo degradante e in prossimità del picco non si riscontrano variazioni significative. Infine il quarto parametro, w_l , comporta variazioni in prossimità del picco e post-picco, mentre la porzione finale del ramo degradante non è modificata in modo significativo.

Parametro	Valore minimo	Valore massimo
f_{ct} [MPa]	1.0	4.0
$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	0.1	1.0
$\sigma_w(5\text{mm})$ [MPa]	0.05	1.0
w_1 [mm]	0.02	0.1

Tabella 3.11: Range di variabilità per la calibrazione delle leggi costitutive relative a prismi in FRC.

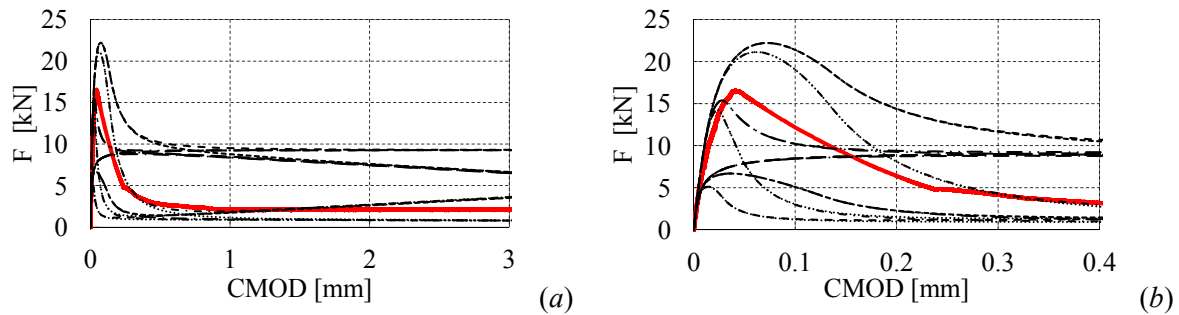


Figura 3.22: Analisi di sensitività - confronto fra la curva sperimentale (colore rosso) ottenuta per un provino prismatico in FRC con un dosaggio di fibre macro-sintetiche (poliolefina) pari a 2 kg/m^3 e le curve numeriche (colore nero) individuate in seguito all'analisi di sensitività; curve estese fino a $\text{CMOD} = 3 \text{ mm}$ (a) e fino a $\text{CMOD} = 0.4 \text{ mm}$ (b).

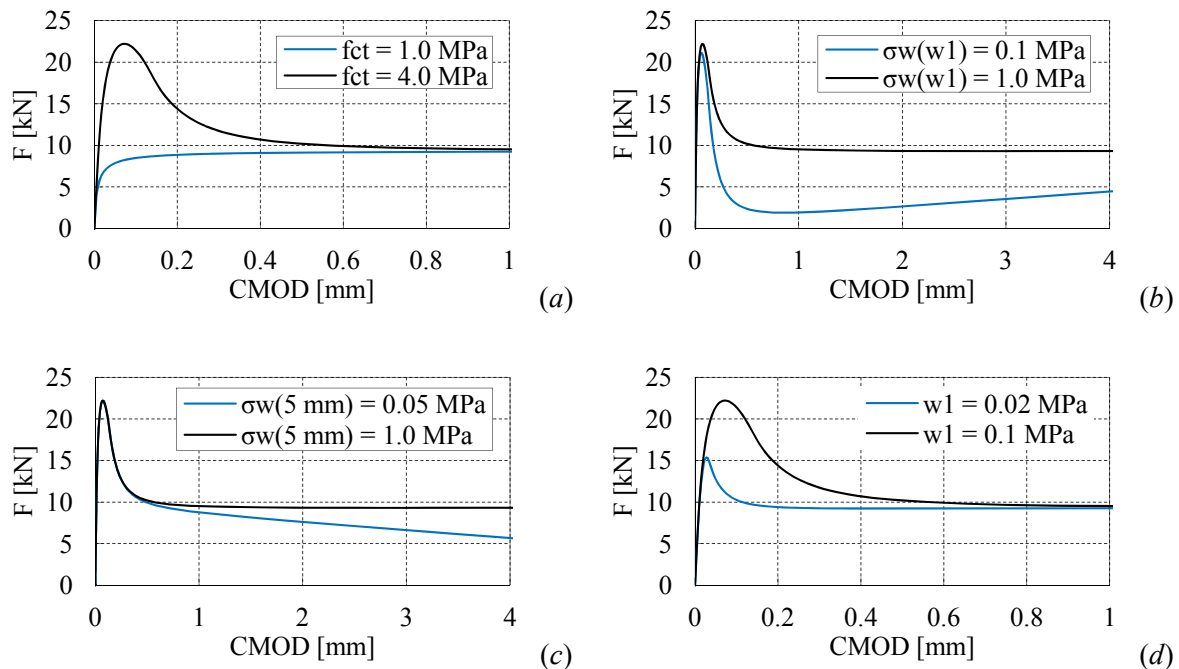


Figura 3.23: Analisi di sensitività considerando i range dei parametri riportati in Tabella 3.11- influenza del parametro f_{ct} (a), $\sigma_w(w_1)$ (b), $\sigma_w(5\text{mm})$ (c) e w_1 (d).

Il processo di ottimizzazione prevede la ricerca del minimo globale di una funzione obiettivo H definita come la somma pesata degli scarti al quadrato fra risultati numerici e

sperimentali, con riferimento alle curve forza-CMOD. In particolare, si confrontano le aree sottese dalle curve, i valori massimi di forza e i valori di forza in corrispondenza di CMOD fissati. Per stimare in modo accurato i risultati sperimentali attraverso analisi sul modello a elementi finiti è necessario considerare termini di confronto fra le curve numeriche e sperimentali in modo da cogliere sia l'andamento globale delle curve sia il comportamento locale in corrispondenza di alcuni punti notevoli. In particolare, confrontare le aree sottese dalle curve corrisponde a valutare la differenza dell'energia totale di frattura e permette di acquisire informazioni sul comportamento globale dell'elemento. Il termine di confronto relativo al valore massimo di forza permette di migliorare la conoscenza della curva localmente, mentre il terzo termine della funzione fornisce informazioni locali, ma facilita anche la conoscenza dell'andamento globale della curva in base alla distribuzione scelta dei punti fissi di CMOD. In Figura 3.24 si riporta un esempio di curva sperimentale in cui s'indicano i valori fissi di CMOD in corrispondenza dei quali individuare i valori di forza associati da confrontare con i valori numerici corrispondenti. L'espressione della funzione obiettivo è la seguente:

$$H = \gamma_F \left(\frac{F_{\max}^s - F_{\max}^n}{F_{\max}^s} \right)^2 + \gamma_{A,CMOD} \left(\frac{A_{s,CMOD} - A_{n,CMOD}}{A_{s,CMOD}} \right)^2 + \frac{\gamma_{i,CMOD}}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{F^s(CMOD_i) - F^n(CMOD_i)}{F^s(CMOD_i)} \right)^2 \quad (3.16)$$

in cui $A_{s,CMOD}$ e $A_{n,CMOD}$ rappresentano rispettivamente l'area sottesa dalla curva forza-CMOD ottenuta sperimentalmente e l'area sottesa dalla curva determinata numericamente, F_{\max}^s e F_{\max}^n corrispondono rispettivamente al valore massimo di forza applicata individuato sperimentalmente e numericamente, $F^s(CMOD_i)$ e $F^n(CMOD_i)$ rappresentano il generico valore di forza associato ad un valore fissato di CMOD rispettivamente ottenuto sperimentalmente e numericamente, N è il numero di valori fissati di CMOD, $\gamma_{A,CMOD}$ è il

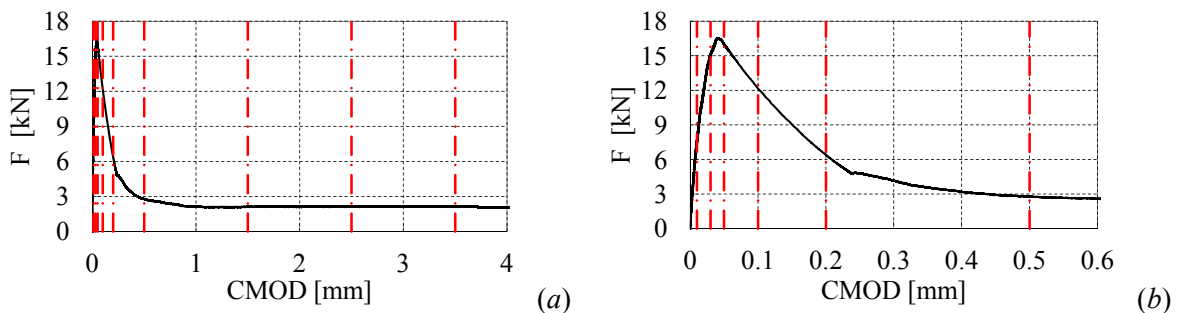


Figura 3.24: Esempio di curva sperimentale in cui s'individuano i valori di forza associati a valori fissi di CMOD, per una curva estesa fino a CMOD = 4 mm (a) e per una curva limitata a CMOD = 0.6 mm (b).

peso associato al termine relativo alle aree sottese, γ_F è il peso da assegnare al termine relativo ai valori massimi di forza e $\gamma_{i,CMOD}$ è il peso relativo ai valori di forza associati a valori fissi di CMOD. Si è scelto di fissare un peso pari a 2 per il contributo della aree sottese e dei valori di forza in corrispondenza di valori fissi di CMOD ($\gamma_{A,CMOD} = 2$; $\gamma_{i,CMOD} = 2$), mentre un peso pari a 1 per il contributo dei valori massimi di forza ($\gamma_F = 1$). Si è scelto di assegnare un peso inferiore al termine relativo ai valori massimi di forza in quanto si ritiene meno affidabile la determinazione sperimentale di tali valori.

Le aree sottese dalle curve sono state calcolate numericamente adottando il metodo approssimato dei trapezi per CMOD compresi tra 0.05 e 4 mm. Si precisa che il limite inferiore dell'intervallo di CMOD in cui calcolare l'area sottesa non è nullo, in quanto sperimentalmente si ottengono andamenti irregolari delle curve in fase iniziale. Per garantire un confronto coerente fra i risultati numerici e sperimentali nel calcolo dei diversi contributi per la funzione obiettivo è stata impiegata quando necessario l'interpolazione lineare in quanto gli intervalli di definizione delle curve numeriche differiscono da quelli di misurazione e risultano variabili all'avanzare delle analisi numeriche. Sono stati scelti 9 valori fissi di CMOD (0.01, 0.03, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5) distribuiti sull'asse di definizione delle curve non in modo omogeneo, ma concentrando più punti in prossimità del picco e del primo tratto discendente in modo da cogliere al meglio l'andamento delle curve nella porzione iniziale che risulta difficile da stimare. Alcuni punti sono stati distribuiti in modo omogeneo anche nella porzione finale del ramo discendente per garantire una corretta stima globale della curva.

Definiti i parametri incerti del problema e l'espressione della funzione obiettivo da minimizzare è possibile procedere alla risoluzione di un problema di ottimizzazione mediante l'applicazione dell' algoritmo evolutivo DE-Q. Per convenienza numerica, all'interno delle procedure di ottimizzazione si ricercano valori normalizzati dei parametri nell'intervallo $[-1, +1]$.

Sono stati affrontati problemi di ottimizzazione considerando come riferimento diversi test sperimentali effettuati su provini confezionati con differente tipologia e

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	25
NC	2
NS	19
itermax	25
F	0.60
CR	0.50
strategia	random

Tabella 3.12: Calibrazione legge costitutiva per travetti in FRC - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

dosaggio di fibre. Per ciascuna miscela sono stati testati in laboratorio 7 provini, mentre le analisi numeriche sono state condotte su 2 provini soltanto per ciascuna combinazione. Inoltre, per ciascun provino la procedura di ottimizzazione è stata ripetuta due volte per valutare la variabilità dei risultati ottenuti poichè non è nota la soluzione di riferimento del problema di ottimizzazione. Per ogni analisi è stato fissato il numero di vettori della popolazione iniziale NP pari a 25, un numero massimo di iterazioni pari a 25, un limite superiore associato al primo e al secondo criterio di convergenza VTR_1 e VTR_2 pari a 0.001 e 0.01, un numero NC di vettori sui quali effettuare il controllo di convergenza pari a 2. Le analisi sono svolte considerando la strategia denominata *random*, fissando la costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation* pari a 0.60 e la costante di *Crossover* pari a 0.50. E' scelto un numero di vettori NS per la calibrazione di ciascuna superficie di risposta pari a 19. In Tabella 3.12 sono elencati i parametri necessari per definire le procedure di ottimizzazione.

La calibrazione delle leggi costitutive tensione-apertura di fessura per provini prismatici in FRC permette di riprodurre i risultati sperimentali in termini di curve forza-CMOD con una buona precisione. Per ciascuna miscela si riporta una tabella riepilogativa (da Tabella 3.13 a Tabella 3.21) in cui si indicano i valori dei parametri ottenuti in seguito alle procedure di ottimizzazione effettuate e il valore associato della funzione obiettivo; inoltre per ciascun parametro sono calcolate le variazioni dei parametri ottenuti ripetendo l'analisi per lo stesso provino (*variazione*). Generalmente, le differenze ottenute confrontando analisi riferite allo stesso provino sono molto contenute ($< 1\%$), mentre se si confrontano i risultati ottenuti considerando provini differenti ma confezionati con la stessa miscela le differenze relative sono superiori (per la maggior parte dei casi inferiori al 20%, per alcuni casi limitati si raggiunge il 30 - 40%). Differenze così marcate sono giustificate dalla dispersione delle curve sperimentali relative a provini differenti, anche se confezionati con la medesima miscela, da attribuire principalmente alla variabilità del numero di fibre e della resistenza a trazione del calcestruzzo. Inoltre, alcune curve sperimentali presentano un andamento non regolare (vedi ad esempio Figura 3.28 o Figura 3.32) con brusche variazioni di direzione, probabilmente legate a problemi di misurazione durante le prove di laboratorio.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.8764	0.2286	0.2207	0.0912	$8.47 \cdot 10^{-3}$
	2	2.8823	0.2286	0.2210	0.0909	$8.47 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.21	+0.00	-0.14	+0.33	-
2	1	2.6592	0.1930	0.1930	0.0820	$13.68 \cdot 10^{-3}$
	2	2.6671	0.1930	0.1931	0.0819	$13.69 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.30	+0.00	-0.05	+0.12	-

Tabella 3.13: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre macro-sintetiche (poliolefina), 2 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.1427	0.3578	0.3573	0.0829	$4.38 \cdot 10^{-3}$
	2	2.1384	0.3579	0.3578	0.0836	$4.37 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.20	-0.03	-0.14	-0.84	-
2	1	2.6966	0.4609	0.4111	0.0758	$0.67 \cdot 10^{-3}$
	2	2.6998	0.4642	0.4046	0.0751	$0.68 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.12	-0.72	+1.58	+0.92	-

Tabella 3.14: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre macro-sintetiche (poliolefina), 4.8 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.3928	0.3427	0.3429	0.0751	$8.62 \cdot 10^{-3}$
	2	2.3979	0.3435	0.3432	0.0751	$8.64 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.21	-0.23	-0.09	+0.00	-
2	1	2.6216	0.2021	0.2022	0.0826	$11.05 \cdot 10^{-3}$
	2	2.6213	0.2013	0.2013	0.0828	$11.07 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.01	+0.40	+0.45	-0.24	-

Tabella 3.15: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre macro-sintetiche (polistirene), 5 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	3.3372	0.6601	0.6603	0.039	$23.88 \cdot 10^{-3}$
	2	3.3547	0.6600	0.6601	0.039	$23.90 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.52	+0.02	+0.03	+0.00	-
2	1	2.4758	0.3952	0.3953	0.0601	$8.75 \cdot 10^{-3}$
	2	2.4775	0.3954	0.3956	0.0599	$8.75 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.07	-0.05	-0.08	+0.33	-

Tabella 3.16: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre macro-sintetiche (polistirene), 10 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.1721	0.2456	0.2456	0.0998	$3.92 \cdot 10^{-3}$
	2	2.1715	0.2456	0.2453	0.0997	$3.92 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.03	+0.00	+0.12	+0.10	-
2	1	1.8381	0.3425	0.2081	0.1001	$26.10 \cdot 10^{-3}$
	2	1.8338	0.3430	0.2075	0.1001	$20.10 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.23	-0.15	+0.29	+0.00	-

Tabella 3.17: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre macro-sintetiche (polimeri misti), 2 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.1533	0.4116	0.4117	0.0710	$6.24 \cdot 10^{-3}$
	2	2.1361	0.4114	0.4116	0.0723	$6.25 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.80	+0.05	+0.02	-1.83	-
2	1	1.8254	0.5020	0.3837	0.1001	$9.69 \cdot 10^{-3}$
	2	1.8257	0.5028	0.3792	0.1001	$9.70 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.02	-0.16	+1.17	+0.00	-

Tabella 3.18: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre macro-sintetiche (polimeri misti), 4.8 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.4907	0.5932	0.5933	0.0563	$10.27 \cdot 10^{-3}$
	2	2.4927	0.5939	0.5938	0.0563	$10.27 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.08	-0.12	-0.08	+0.00	-
2	1	2.3971	0.5424	0.5255	0.0702	$2.18 \cdot 10^{-3}$
	2	2.3957	0.5423	0.5253	0.0703	$2.18 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.06	+0.02	+0.04	-0.14	-

Tabella 3.19: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre in acciaio, 20 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5mm)$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.2329	0.4339	0.4339	0.0951	$7.68 \cdot 10^{-3}$
	2	2.2271	0.4326	0.4328	0.0961	$7.67 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.26	+0.30	+0.25	-1.05	-
2	1	2.9538	0.4777	0.3268	0.0723	$1.70 \cdot 10^{-3}$
	2	2.9499	0.4775	0.3288	0.0724	$1.70 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	0.13	0.04	0.61	0.14	-

Tabella 3.20: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre in acciaio, 25 kg/m³.

n. provino	n. test	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	$\sigma_w(5\text{mm})$ [MPa]	w_1 [mm]	H [-]
1	1	2.8016	0.4409	0.3852	0.0576	$4.01 \cdot 10^{-3}$
	2	2.8010	0.4411	0.3847	0.0576	$4.01 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	+0.02	-0.05	+0.13	+0.00	-
2	1	1.7022	0.7025	0.7028	0.0839	$2.99 \cdot 10^{-3}$
	2	1.7081	0.7045	0.7029	0.0837	$3.04 \cdot 10^{-3}$
	variazione [%]	-0.35	-0.28	-0.01	+0.24	-

Tabella 3.21: Risultati procedure di ottimizzazione - fibre in acciaio, 35 kg/m^3 .

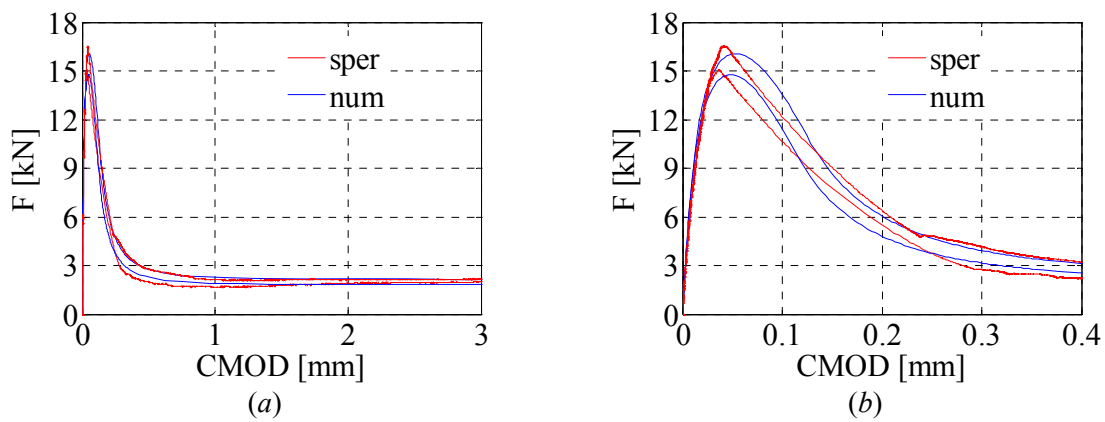


Figura 3.25: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre macro-sintetiche (poliolefina), 2 kg/m^3 - curve complete (a) e per $\text{CMOD} < 0.4 \text{ mm}$ (b).

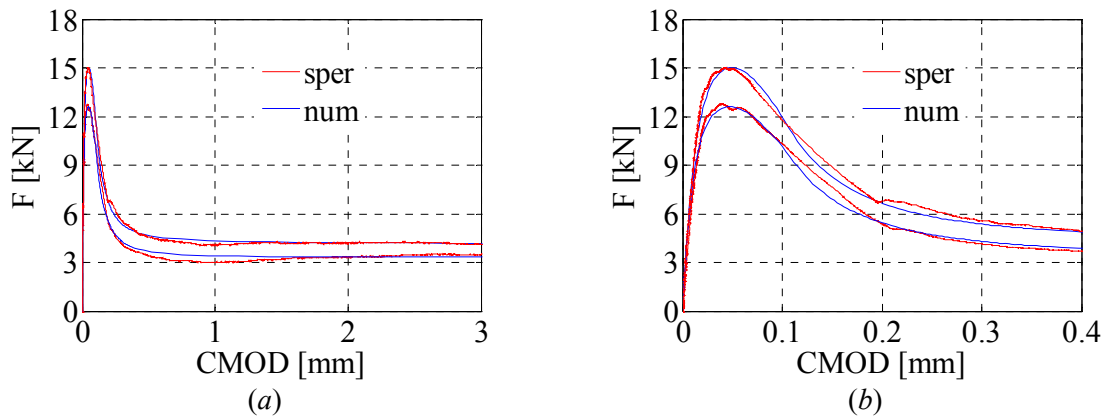


Figura 3.26: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre macro-sintetiche (poliolefina), 4.8 kg/m^3 - curve complete (a) e per $\text{CMOD} < 0.4 \text{ mm}$ (b).

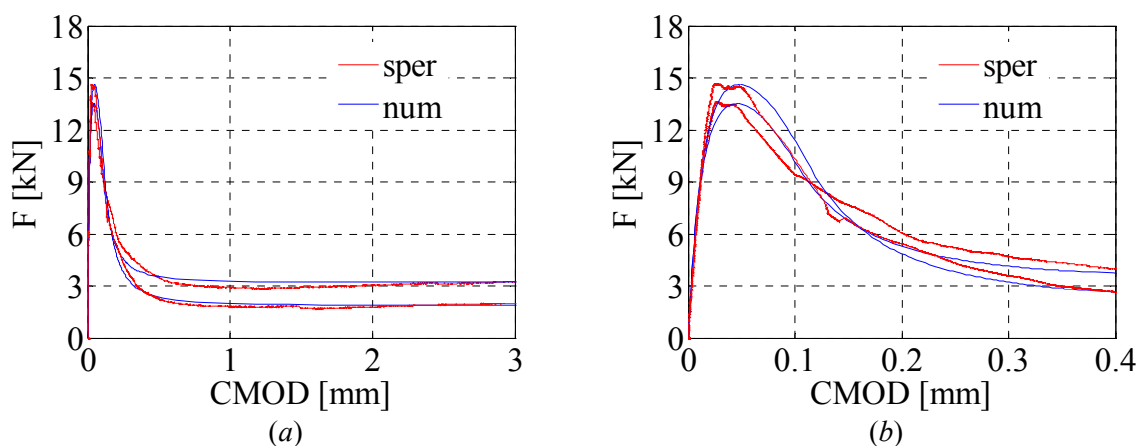


Figura 3.27: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre macro-sintetiche (polistirene), 5 kg/m^3 - curve complete (a) e per $CMOD < 0.4$ mm (b).

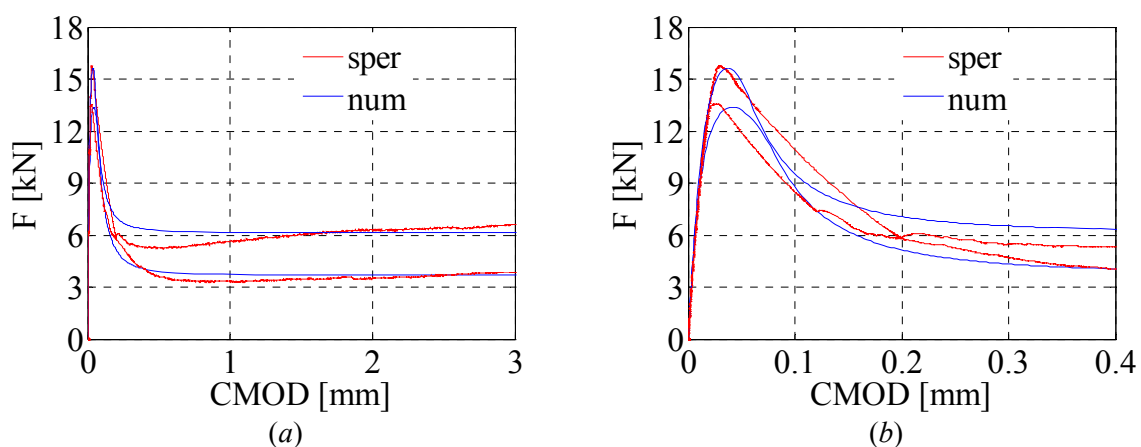


Figura 3.28: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre macro-sintetiche (polistirene), 10 kg/m^3 - curve complete (a) e per $CMOD < 0.4$ mm (b).

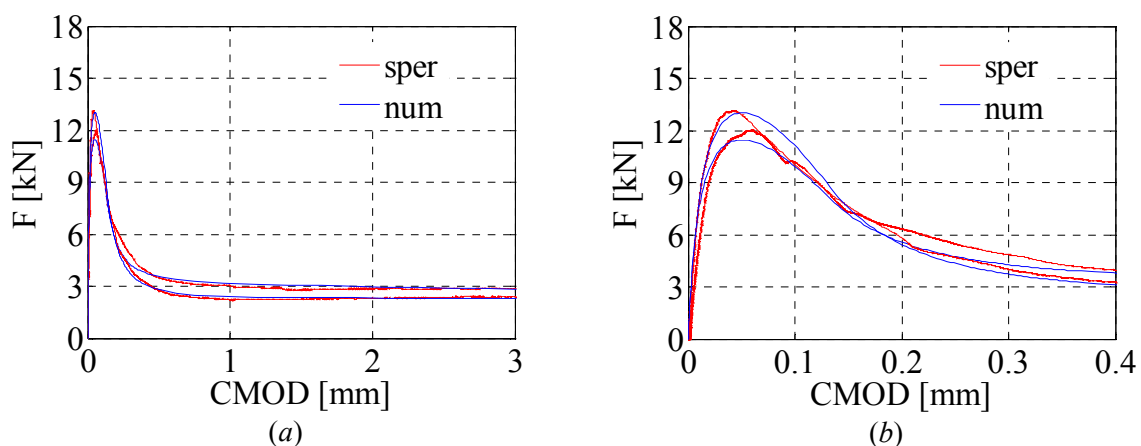


Figura 3.29: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre macro-sintetiche (polimeri misti), 2 kg/m^3 - curve complete (a) e per $CMOD < 0.4$ mm (b).

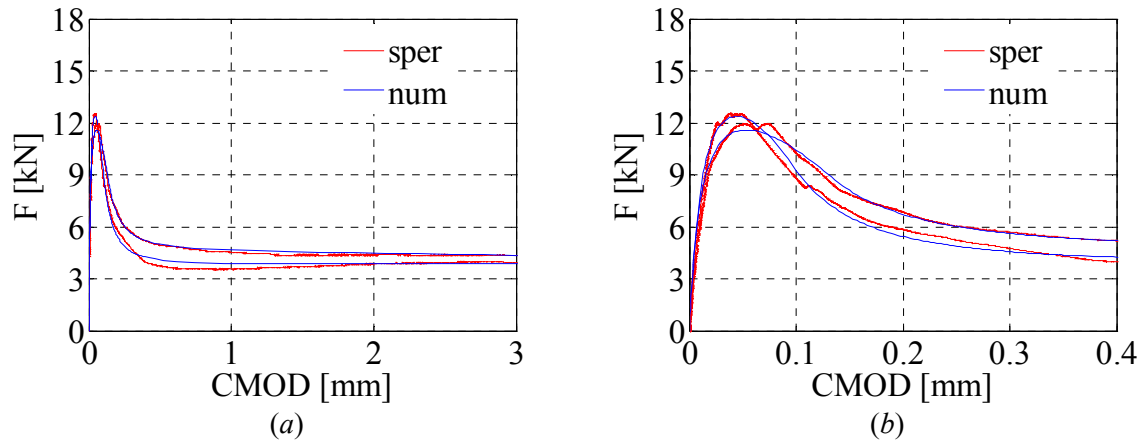


Figura 3.30: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre macro-sintetiche (polimeri misti), 4.8 kg/m^3 - curve complete (a) e per $\text{CMOD} < 0.4 \text{ mm}$ (b).

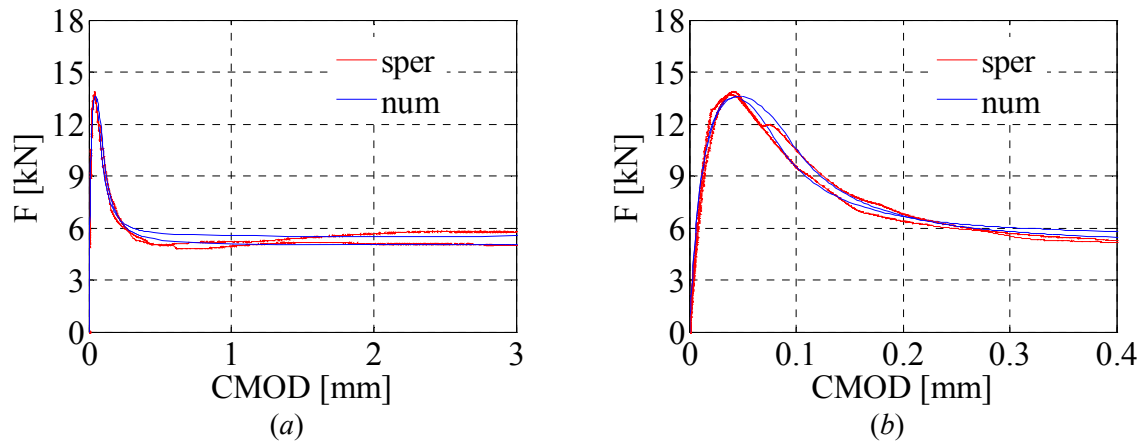


Figura 3.31: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre in acciaio, 20 kg/m^3 - curve complete (a) e per $\text{CMOD} < 0.4 \text{ mm}$ (b).

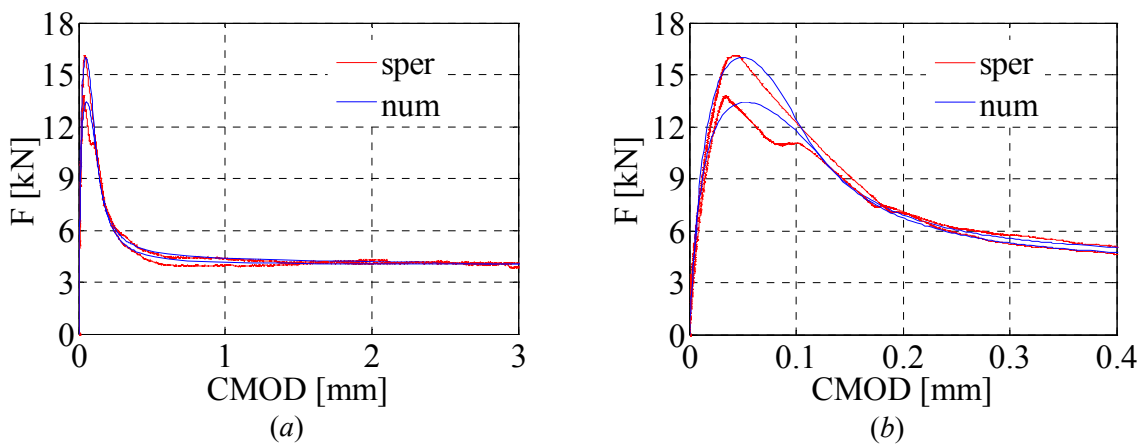


Figura 3.32: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre in acciaio, 20 kg/m^3 - curve complete (a) e per $\text{CMOD} < 0.4 \text{ mm}$ (b).

con fibre in acciaio, 25 kg/m³ - curve complete (a) e per CMOD < 0.4 mm (b).

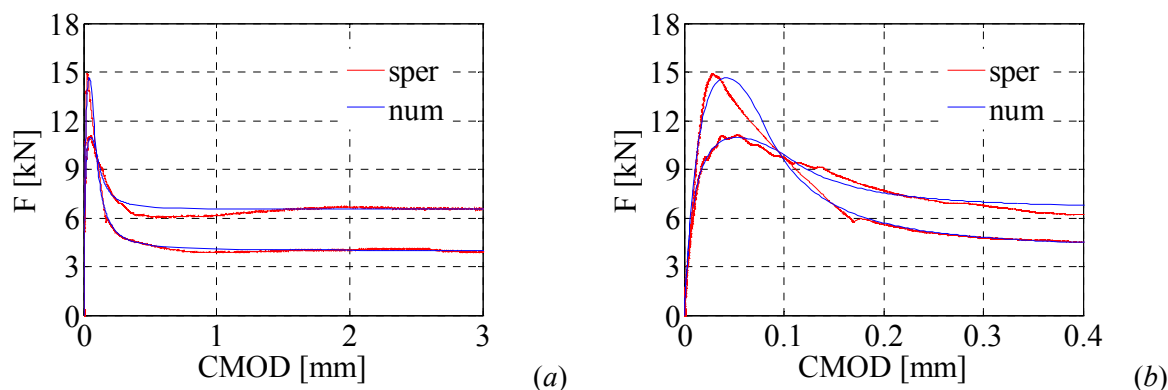


Figura 3.33: Confronto fra curve forza-CMOD sperimentale e numerica per due provini in FRC con fibre in acciaio, 35 kg/m³ - curve complete (a) e per CMOD < 0.4 mm (b).

Inoltre, per ciascun provino considerato si riporta il confronto fra le curve sperimentali e quelle numeriche associate ottenute in seguito al processo di ottimizzazione (Figura 3.25 - Figura 3.33). Si può notare una buona corrispondenza fra le curve sia vicino al picco sia nel tratto successivo. In particolare, il valore del picco di forza è ben colto pressoché in tutti i test, mentre l'andamento della curva in prossimità del valore massimo è individuato molto bene per alcuni provini (Figura 3.28 e Figura 3.31), mentre in alcuni casi la curva numerica è meno aderente a quella sperimentale. Infine, la porzione terminale del ramo degradante è ben stimata per quasi tutti i provini.

Calibrazione leggi costitutive per lastre circolari in FRC

Per quanto riguarda le procedure di ottimizzazione condotte per simulare il comportamento delle lastre circolari in FRC, i parametri incogniti che permettono di definire la relazione tensione-apertura di fessura sono f_{ct} , che corrisponde alla resistenza a trazione monoassiale del calcestruzzo, $\sigma_w(w_1)$ che è la tensione in corrispondenza di w_1 , w_1 che corrisponde all'apertura di fessura al confine fra i due tratti lineari della legge e w_2 che rappresenta il valore di apertura di fessura all'estremità del secondo tratto di curva. Analogamente a quanto descritto per le analisi condotte su provini prismatici, è stata effettuata un'analisi di sensitività per ciascuna curva sperimentale considerata, per valutare l'influenza dei parametri sull'andamento delle curve e definire un range di variabilità per ciascun parametro. E' necessario precisare che sono state condotte inizialmente procedure di ottimizzazione con l'obiettivo di stimare in modo accurato le curve sperimentali in prossimità del picco di forza comprendendo il primo tratto degradante in fase post-fessurativa. Successivamente, l'attenzione è stata estesa alle curve complete con l'obiettivo di cogliere al meglio non solo la prima porzione di curva, ma soprattutto il ramo

degradante. Infatti, risulta più incerto il rilevamento del valore di picco di forza e del primo tratto di curva degradante poiché in seguito all'apertura della prima fessura si ha una brusca diminuzione del valore di forza che può comportare difficoltà e imprecisioni in fase di misurazione. Al contrario, il tratto successivo della curva può essere rilevato in modo più affidabile all'aumentare dell'apertura di fessura poiché corrisponde al momento in cui prevale l'effetto di cucitura delle fibre che comporta un degrado più lento e controllabile. Pertanto, sono state condotte in modo differenziato le analisi di sensitività; in particolare, per la prima tipologia di analisi le curve sono state troncate in corrispondenza di $CMOD = 1.1$ mm e di un valore di freccia pari a 3 mm, mentre per le analisi successive sono state considerate le curve complete. Nella Tabella 3.22 si riportano i range dei parametri adottati per le analisi con curve troncate e complete; si può notare come i range dei primi due parametri non variano sostanzialmente nei due casi, mentre i range degli ultimi due parametri sono stati modificati sostanzialmente per le analisi con le curve complete, per cogliere al meglio l'andamento del ramo degradante. A titolo esemplificativo, si riporta (Figura 3.34) il confronto fra le curve sperimentali forza-CMOD e forza-freccia (linea rossa), relative a una lastra circolare di diametro 800 mm, e le curve numeriche (linee nere) ottenute considerando tutte le possibili combinazioni dei valori massimi e minimi dei parametri incogniti secondo quanto definito dai range di variabilità; il confronto si riferisce all'analisi di sensitività effettuata considerando le curve troncate. Inoltre, in Figura 3.35 si riporta il confronto fra le curve numeriche ottenute modificando un solo parametro per volta in modo tale da comprendere l'influenza dei parametri sull'andamento delle curve. In particolare, per ciascuna figura riferita ad un unico parametro sono presenti quattro curve, due sono ottenute fissando tre parametri al valore massimo e il parametro di interesse al valore minimo per una curva e al valore massimo per l'altra curva, viceversa le altre due curve sono determinate fissando tre parametri al valore minimo e il quarto variabile. Si mostrano solo le curve forza-CMOD poiché l'influenza dei parametri sulle curve forza-freccia è molto simile. Infine, in Figura 3.36 si confrontano le curve sperimentali complete (linea rossa) forza-CMOD e forza-freccia relative a una lastra circolare di diametro 800 mm, e le curve numeriche (linee nere) ottenute considerando la combinazione con i valori massimi dei parametri e quella con i valori minimi. Analogamente a quanto osservato per le analisi di sensitività per i travetti in FRC, i parametri f_{ct} , $\sigma_w(w_1)$ e w_1 influenzano soprattutto la porzione iniziale della curva che comprende sia il picco che il tratto iniziale del ramo degradante, mentre w_2 influenza maggiormente il ramo degradante.

parametro	curve troncate		curve complete	
	minimo	massimo	minimo	massimo
f_{ct} [MPa]	2.0	2.5	2.0	2.5
$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	0.9	1.3	0.7	1.3
w_1 [mm]	0.03	0.08	0.07	0.5
w_2 [mm]	0.9	1.3	3.0	8.0

Tabella 3.22: Range di variabilità per la calibrazione delle leggi costitutive relative a lastre circolari in FRC.

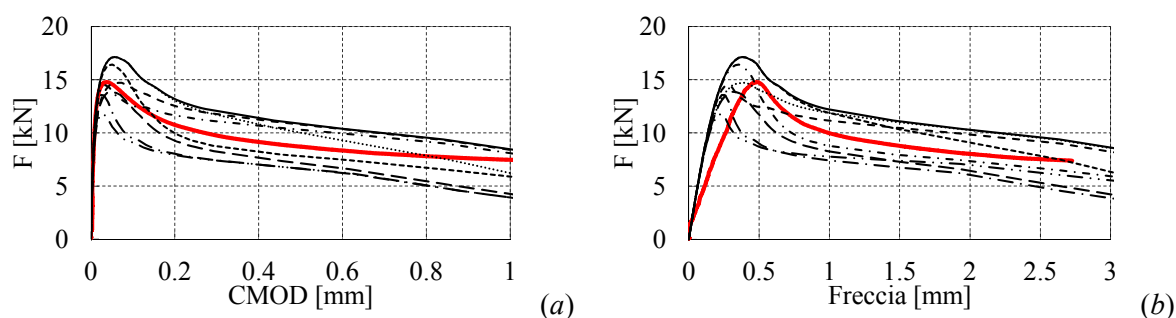


Figura 3.34: Analisi di sensitività per curve troncate - confronto fra la curva sperimentale (colore rosso) ottenuta per una lastra circolare in FRC di diametro 800 mm e le curve numeriche (colore nero) individuate in seguito all'analisi di sensitività; curve forza-CMOD (a) e curve forza-freccia (b).

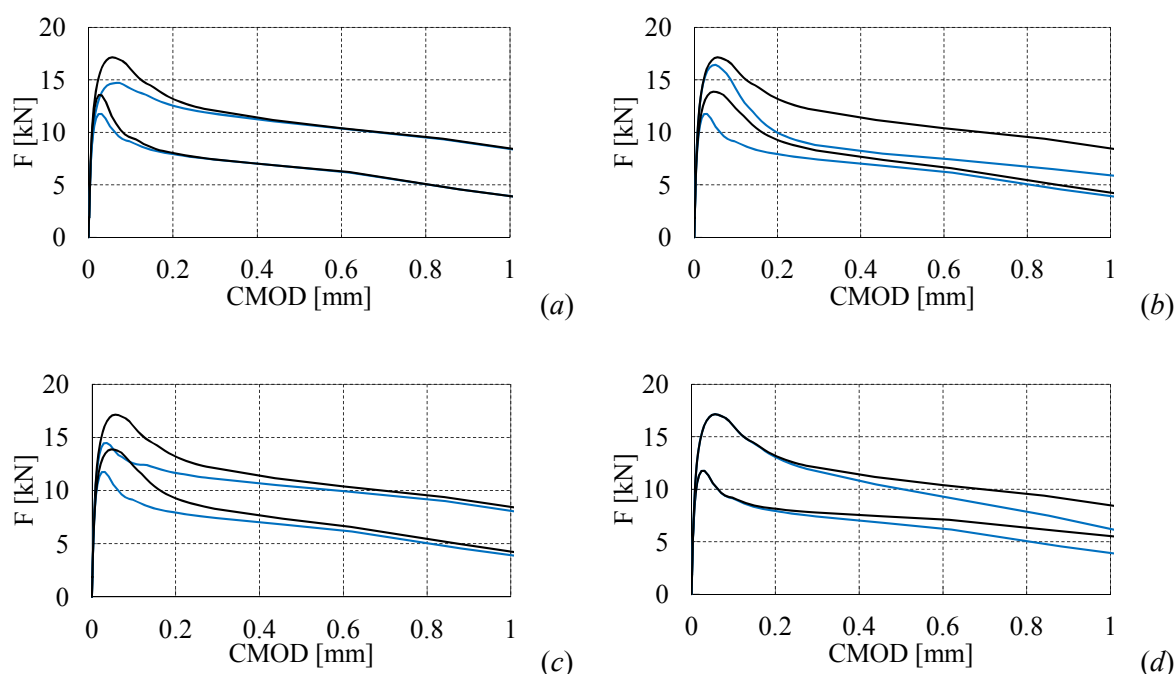


Figura 3.35: Analisi di sensitività per curve troncate considerando il modello FEM di lastra con diametro 800 mm - influenza del parametro f_{ct} (a), $\sigma_w(w_1)$ (b), w_1 (c) e w_2 (d).

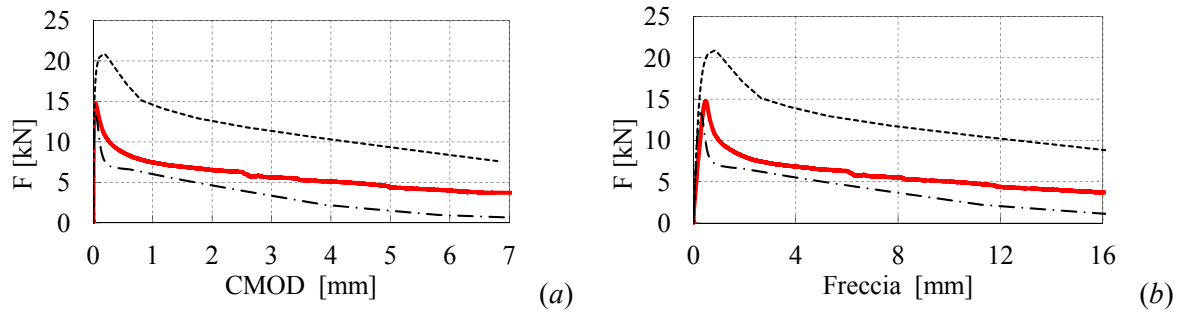


Figura 3.36: Analisi di sensitività per curve complete - confronto fra la curva sperimentale (colore rosso) ottenuta per una lastra circolare in FRC di diametro 800 mm e le curve numeriche (colore nero) individuate in seguito all'analisi di sensitività; curve forza-CMOD (a) e curve forza-freccia (b).

Come per le analisi sui provini prismatici in FRC, la funzione obiettivo H è definita come la somma pesata degli scarti al quadrato fra risultati numerici e sperimentali, in questo caso con riferimento alle curve forza-CMOD e forza-freccia. Pertanto per entrambe le curve di riferimento, si confrontano l'area sottesa, i valori massimi di forza e i valori di forza in corrispondenza di valori fissati di CMOD e di freccia. L'espressione della funzione obiettivo è di seguito riportata:

$$\begin{aligned}
 H = & \gamma_F \left(\frac{F_{\max}^s - F_{\max}^n}{F_{\max}^s} \right)^2 + \gamma_{A,CMOD} \left(\frac{A_{s,CMOD} - A_{n,CMOD}}{A_{s,CMOD}} \right)^2 + \gamma_{A,Fr} \left(\frac{A_{s,Fr} - A_{n,Fr}}{A_{s,Fr}} \right)^2 + \\
 & + \frac{\gamma_{i,CMOD}}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{F^s(CMOD_i) - F^n(CMOD_i)}{F^s(CMOD_i)} \right)^2 + \frac{\gamma_{i,Fr}}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{F^s(Fr_i) - F^n(Fr_i)}{F^s(Fr_i)} \right)^2 \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

in cui, oltre ai termini impiegati nella definizione della funzione obiettivo per i test sui provini prismatici, $A_{s,Fr}$ e $A_{n,Fr}$ rappresentano rispettivamente l'area sottesa dalla curva forza-freccia ottenuta sperimentalmente e l'area sottesa dalla curva determinata numericamente, $F^s(Fr_i)$ e $F^n(Fr_i)$ rappresentano il generico valore di forza associato ad un valore fissato di freccia rispettivamente ottenuto sperimentalmente e numericamente, N è il numero di valori fissati di CMOD e di freccia, $\gamma_{A,Fr}$ è il peso associato al contributo dell'errore relativo con riferimento alle aree sottese dalle curve forza-freccia e $\gamma_{i,Fr}$ è il peso associato al contributo dell'errore relativo con riferimento ai valori di forza associati a valori fissi di freccia. Sono state effettuate analisi assegnando pesi differenti ai termini della funzione obiettivo per cercare di investigare quanto la definizione della funzione possa influenzare i risultati finali (per i valori dei pesi si veda nel seguito la descrizione dei vari test effettuati). Durante la procedura di ottimizzazione i valori massimi di forza ottenuti sperimentalmente e determinati numericamente sono ricercati considerando solo la prima porzione delle curve, in particolare per valori di CMOD inferiori a 0.05 mm in modo da valutare con più accuratezza il ramo crescente ed il picco del legame costitutivo. Le aree

sottese dalle curve sono state calcolate numericamente adottando il metodo approssimato dei trapezi per CMOD compresi tra 0.01 e 1.05 mm e per la freccia con valori compresi tra 0.05 e 2.7 mm nel caso si considerino le curve troncate, mentre per CMOD compresi tra 0.01 e 7.00 mm nel caso si considerino le curve complete; si precisa che per le analisi sulle curve complete non è stato valutato il confronto fra le curve forza-freccia. Per le analisi sulle curve troncate, sono stati scelti 10 valori fissi di CMOD e di freccia ($CMOD_i$ pari a 0.01, 0.02, 0.035, 0.05, 0.07, 0.1, 0.15, 0.3, 0.5, 0.8 mm e freccia pari a 0.05, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 mm), la maggior parte concentrati in prossimità del picco e del primo tratto discendente della curva e alcuni distribuiti in modo omogeneo nella porzione finale del tratto discendente. Una tale distribuzione facilita un'adeguata stima delle curve di riferimento sia in prossimità del picco sia nella zona post-picco (Figura 3.37a). Per le analisi in cui sono state considerate le curve complete i punti fissi sono stati distribuiti in modo omogeneo sull'intervallo di definizione delle curve in modo da cogliere anche la porzione finale del ramo degradante; in particolare, i valori fissi di $CMOD_i$ sono 0.04, 0.1, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0 mm (Figura 3.37b).

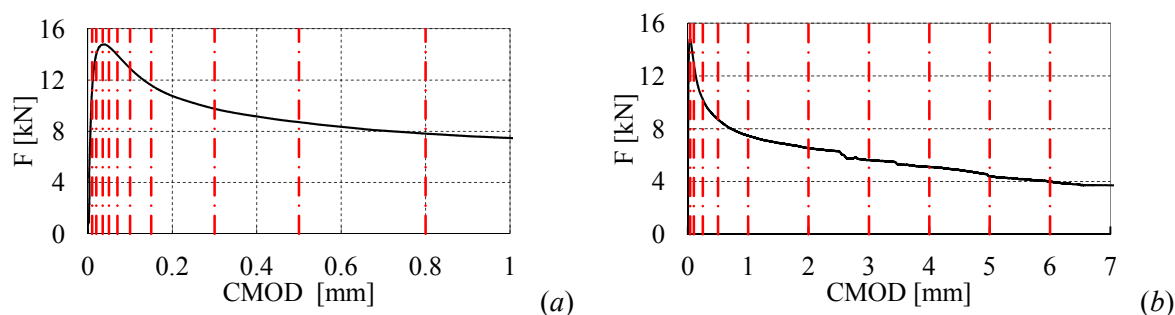


Figura 3.37: Curve forza-CMOD in cui sono evidenziati i valori di forza associati a valori fissi di CMOD per le analisi relative alle curve troncate (a) e complete (b).

Definiti i parametri incerti del problema e l'espressione della funzione obiettivo da minimizzare è possibile procedere alla risoluzione di un problema di ottimizzazione mediante l'applicazione dell'algoritmo evolutivo DE-Q. Sono stati affrontati problemi di ottimizzazione considerando come riferimento due dei quattro test sperimentali disponibili condotti su provini di diametro 800 mm. Le altre curve sperimentali a disposizione non sono state impiegate in quanto presentano un andamento molto simile a quello delle altre curve selezionate per le analisi di ottimizzazione. Per ogni analisi è stato fissato il numero di vettori della popolazione iniziale NP pari a 25, un numero massimo di iterazioni pari a 15, un limite superiore associato al primo e al secondo criterio di convergenza VTR_1 e VTR_2 pari a 0.001 e 0.01, un numero di vettori NC sui quali effettuare il controllo di convergenza pari a 2. Le analisi sono svolte considerando la strategia denominata *random*, fissando la costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation* pari a 0.60 e la costante di *Crossover* pari a 0.50. È scelto un numero di vettori NS per la calibrazione di

ciascuna superficie di risposta pari a 19. In Tabella 3.23 sono elencati i parametri necessari per definire la procedura di ottimizzazione.

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	25
NC	2
NS	19
itermax	15
F	0.60
CR	0.50
strategia	<i>random</i>

Tabella 3.23: Calibrazione legge costitutiva per lastre circolari in FRC - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

La prima analisi (denominata num 1 nel seguito) è stata condotta considerando le curve sperimentali troncate relative al primo provino di diametro 800 mm e assegnando valori unitari a tutti i pesi della funzione obiettivo. In Figura 3.38a, b si può notare una buona aderenza fra le curve numeriche (colore rosso) e sperimentali (colore nero) in termini di forza-CMOD, mentre la curva numerica forza-freccia presenta un certo sfasamento rispetto alla sperimentale. Tale scostamento potrebbe essere dovuto a deformazioni del sistema di contrasto impiegato registrate durante le prove. Infatti, le misure di apertura di fessura, effettuate con trasduttori posti in corrispondenza delle sezioni intagliate, risentono limitatamente dei possibili movimenti del sistema di prova, garantendo una buona precisione dei risultati; al contrario il rilevamento della freccia può essere maggiormente influenzato da possibili movimenti del sistema di contrasto e pertanto le misure eseguite sono caratterizzate da una precisione inferiore. A seguito di una stima della deformabilità del sistema di contrasto e depurando la curva sperimentale della quantità individuata al variare dell'entità della forza applicata, si ottiene una curva aderente ai risultati numerici individuati.

Nella seconda analisi (num 2) sono stati impiegati come riferimento gli stessi risultati sperimentali, ma non sono stati considerati nella definizione della funzione obiettivo i termini relativi alla curva forza-freccia, in quanto nell'analisi precedente lo scostamento fra le curve influenzava significativamente il valore complessivo della funzione. In Figura 3.38a, b si può notare come la curva numerica ottenuta in termini di forza-CMOD (colore blu) risulta più aderente alla curva sperimentale (curva nera) rispetto ai risultati dell'analisi precedente (curva rossa), soprattutto in prossimità del picco; mentre si mantiene lo sfasamento della curva numerica forza-freccia rispetto alla sperimentale.

In Tabella 3.24 per ogni analisi effettuata si riportano i valori dei parametri ottenuti in seguito alla procedura di ottimizzazione e il valore associato della funzione obiettivo. E' importante precisare che il valore della funzione relativo alla prima analisi non è

confrontabile con i valori ottenuti per le successive analisi poiché la definizione della funzione è differente. Infatti, per la prima analisi la funzione è calcolata considerando anche il contributo della curva forza-freccia, mentre nelle altre analisi tale contributo è stato trascurato. Se si effettua il confronto fra i singoli termini della funzione obiettivo (Tabella 3.25), la seconda analisi presenta valori inferiori di almeno un ordine di grandezza rispetto alla prima, relativamente al valore massimo di forza e alla curva forza-CMOD, a conferma del miglioramento della soluzione trovata.

Nella terza analisi (num 3), si considerano gli stessi risultati sperimentali delle analisi precedenti e nella definizione della funzione obiettivo, oltre a trascurare i termini relativi alla curva forza-freccia, è stato ridotto il numero di valori fissi di CMOD in corrispondenza dei quali valutare i valori di forza corrispondenti. In particolare, sono stati mantenuti i punti in prossimità del picco ($CMOD_i$ pari a 0.01, 0.02, 0.035, 0.05, 0.07, 0.1), mentre sono stati eliminati i punti nel ramo degradante della curva. Lo scopo è di valutare la capacità della procedura di stimare in modo accurato l'andamento del tratto degradante delle curve sperimentali confrontando solo le aree sottese. In Figura 3.38a, b si può notare come la curva numerica ottenuta dalla terza analisi in termini di forza-CMOD (colore arancio) è molto aderente alla curva numerica riferita all'analisi precedente (colore blu) in prossimità del picco o meglio nella zona in cui sono stati mantenuti i punti fissi di CMOD, mentre nel ramo degradante la curva ottenuta si discosta maggiormente sia dalla curva numerica precedente sia dalla curva sperimentale. Le modifiche all'espressione della funzione obiettivo hanno condotto ad una migliore stima dell'area sottesa dalle curve (in Tabella 3.25 si nota che il termine $H_{AreaCMOD}$ associato alla terza analisi è inferiore di un ordine di grandezza al valore ottenuto per la seconda analisi), ma ad una peggior aderenza fra le curve nel ramo degradante per la mancanza dei punti fissi in quella zona della curva. Pertanto, la definizione della funzione obiettivo influenza significativamente l'accuratezza della soluzione del problema.

Infine, la quarta analisi (num 4) è stata condotta con lo scopo di riprodurre l'andamento completo delle curve sperimentali relative al primo provino; analogamente all'ultima analisi effettuata i termini della funzione obiettivo dipendenti dalle misure di freccia sono stati trascurati. In Figura 3.38c, d sono riportate le curve ottenute dalle analisi precedenti (colore rosso per la prima analisi - num 1, colore blu per la seconda - num 2 e arancio per la terza - num 3) definite nell'intervallo completo di CMOD e confrontate con la curva sperimentale (colore nero) e con quella numerica ottenuta durante la quarta analisi (colore verde). Si può notare come le curve relative alle prime tre analisi stimano in modo molto accurato la curva sperimentale in corrispondenza del picco e nel primo tratto del ramo degradante, mentre per valori di CMOD superiori a circa 1 mm le curve numeriche hanno un rapido degrado diversamente dalla curva sperimentale che assume valori superiori di forza. Di contro, la curva numerica ottenuta dalla quarta analisi presenta

globalmente una buona aderenza alla curva sperimentale soprattutto nel ramo degradante, mentre in prossimità del picco ha una precisione inferiore, in particolare, la pendenza del tratto iniziale e il valore del picco sono ben colti, mentre l'andamento della curva è approssimato in modo poco accurato. Per migliorare la stima del comportamento post-fessurativo considerando come riferimento le curve sperimentali complete si potrebbero aggiungere punti fissi di CMOD in cui valutare i valori corrispondenti di forza soprattutto in prossimità del picco.

In Figura 3.39 è riportato il confronto fra le leggi costitutive individuate in seguito alle calibrazioni effettuate. Analogamente a quanto osservato per le curve forza-CMOD, si può notare che le leggi costitutive riferite alle analisi condotte considerando come riferimento le curve sperimentali troncate si discostano significativamente dalla curva associata alla quarta analisi in cui sono state impiegate le curve complete, soprattutto per quanto riguarda il secondo tratto della legge. Pertanto, per cogliere in modo accurato anche il ramo degradante completo delle curve sperimentali è necessario adottare una legge costitutiva che presenta un valore molto elevato di apertura di fessura w_2 . In particolare, osservando quanto riportato in Tabella 3.24 si nota come la quarta analisi ha ottenuto un valore di w_2 superiore di circa cinque volte rispetto ai valori ottenuti per le analisi precedenti, un valore di w_1 superiore di circa 2 volte e valori di f_{ct} e $\sigma_w(w_1)$ superiori rispettivamente di circa 1/6 e 1/3.

analisi	n. provino	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	w_1 [mm]	w_2 [mm]	H [-]
num 1	1	2.043	1.082	0.08	1.12	$5.36 \cdot 10^{-2}$
num 2	1	2.337	1.133	0.05	1.12	$0.77 \cdot 10^{-3}$
num 3	1	2.360	1.236	0.05	0.95	$0.66 \cdot 10^{-3}$
num 4	1	2.006	0.753	0.16	6.54	$2.66 \cdot 10^{-3}$

Tabella 3.24: Parametri individuati in seguito alle procedure di ottimizzazione per lastre circolari in FRC.

	num 1	num 2	num 3	num 4
$H_{Forza,max}$	$0.08 \cdot 10^{-2}$	$0.08 \cdot 10^{-3}$	$0.19 \cdot 10^{-3}$	$0.40 \cdot 10^{-6}$
H_{CMODi}	$0.28 \cdot 10^{-2}$	$0.68 \cdot 10^{-3}$	$0.46 \cdot 10^{-3}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$
$H_{Frecciai}$	$4.87 \cdot 10^{-2}$	-	-	-
$H_{AreaCMOD}$	$0.03 \cdot 10^{-2}$	$0.01 \cdot 10^{-3}$	$0.02 \cdot 10^{-4}$	$0.35 \cdot 10^{-3}$
$H_{AreaFreccia}$	$0.10 \cdot 10^{-2}$	-	-	-
H	$5.36 \cdot 10^{-2}$	$0.77 \cdot 10^{-3}$	$0.65 \cdot 10^{-3}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$

Tabella 3.25: Valori assunti dai termini della funzione obiettivo in seguito alle procedure di ottimizzazione per lastre circolari in FRC.

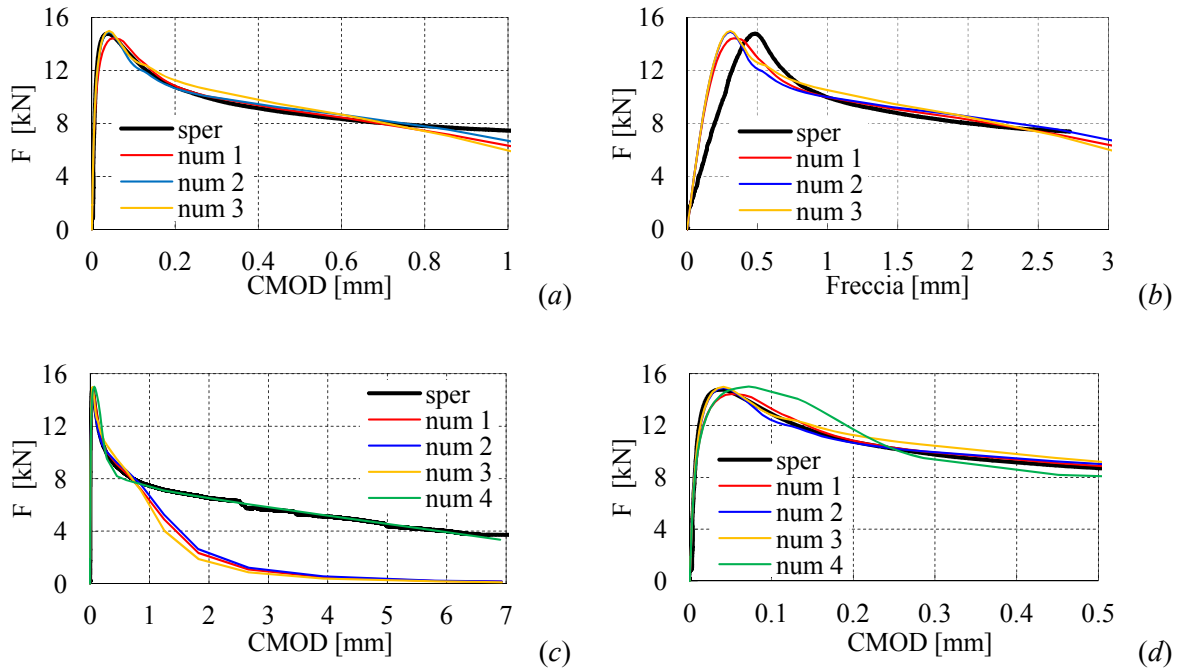


Figura 3.38: Risultati procedura di ottimizzazione per il primo provino circolare in FRC - analisi num1 (colore rosso), analisi num2 (colore blu), analisi num3 (colore arancio) e analisi num4 (colore verde) - confronto curve numeriche e sperimentali troncate (colore nero) in termini di forza-CMOD (a) e forza-freccia (b) e confronto curve numeriche e sperimentali complete in termini di forza-CMOD (c) e zoom in prossimità del picco (d).

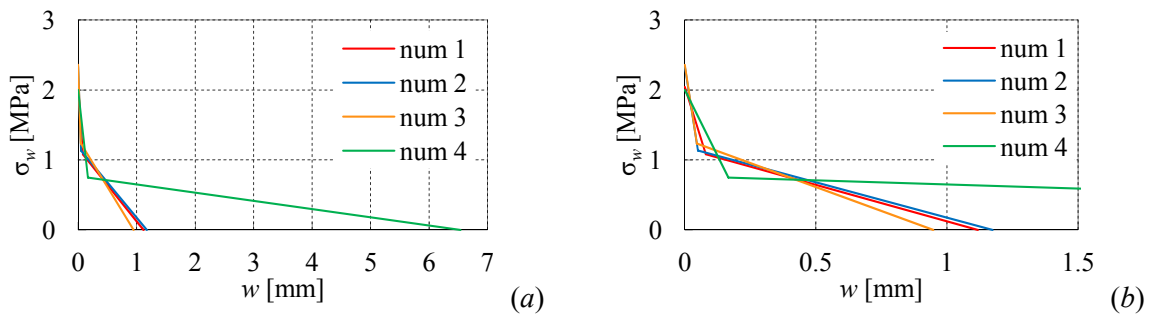


Figura 3.39: Risultati procedura di ottimizzazione per i provini circolari in FRC - num 1 - 4 - confronto fra le leggi costitutive determinate in seguito alla analisi num 1 (colore rosso), analisi num 2 (colore blu), analisi num 3 (colore arancio) e analisi num 4 (colore verde)

4 ALGORITMO DE-S

Durante questo lavoro di tesi è stato proposto un miglioramento dell'algoritmo DE-Q, denominato DE-S, con l'obiettivo di ridurre ulteriormente l'onere computazionale limitando il numero di valutazioni della funzione obiettivo senza incrementare significativamente la complessità computazione dell'algoritmo. Negli algoritmi DE e DE-Q, descritti nel paragrafo 1.2.1 e nel Capitolo 3, si è evidenziato che ad ogni iterazione, prima della selezione della nuova popolazione di vettori, la funzione deve essere valutata in corrispondenza di tutti i nuovi vettori senza un'attenta selezione. L'algoritmo DE-S sviluppato prevede l'introduzione di una strategia di selezione dei nuovi punti in cui valutare la funzione cercando di bilanciare la ricerca locale e globale, in altre parole esso garantisce sia di esplorare in modo casuale il dominio di definizione dei parametri (*global exploration*) sia di concentrare la ricerca nelle zone in cui il surrogato assume valori minimi (*local exploitation*). Per ciascuna iterazione l'algoritmo assegna un punteggio a ciascun candidato alle nuove valutazioni della funzione con lo scopo di individuare i candidati migliori. In particolare, se nell'algoritmo DE-Q ad ogni iterazione si effettua un numero di nuove valutazioni pari al numero di vettori che costituisce la popolazione, nell'algoritmo sviluppato DE-S solo per un numero limitato di punti si valuta la funzione ad ogni iterazione.

In questo modo si combina la robustezza di un algoritmo evolutivo con l'efficienza computazionale di un surrogato quadratico per approssimare la funzione e di un'innovativa strategia per selezionare i nuovi punti in cui valutare la funzione durante l'avanzamento della procedura di ottimizzazione. In particolare, l'impiego di un algoritmo evolutivo garantisce la robustezza del processo evitando i minimi locali e individuando in modo accurato il minimo globale della funzione. L'adozione di un surrogato quadratico e di una strategia di selezione dei candidati permette di raggiungere una buona efficienza computazionale riducendo il numero di nuove valutazioni della funzione e non perdendo accuratezza dei risultati né aumentando la complessità computazionale dell'algoritmo.

4.1 ARCHITETTURA DELL'ALGORITMO DE-S

L'architettura dell'algoritmo proposto è mostrata in Figura 4.1 mediante un diagramma di flusso ed è descritta nel dettaglio nel seguito. Inizialmente, la funzione obiettivo è valutata in corrispondenza dei punti appartenenti alla popolazione iniziale

definita in modo casuale. Analogamente all'algoritmo DE-Q, ad ogni iterazione vengono costruiti NP gruppi, ognuno costituito da NS vettori. Per ciascun gruppo è calibrato un surrogato quadratico seguendo la metodologia della superficie di risposta. Se la superficie di risposta è convessa (caso "A"), il *mutant vector* $\mathbf{v}_{i,G}$ è definito in corrispondenza del valore minimo \mathbf{x}^* del surrogato, in accordo con l'equazione 3.2. Al contrario, se la superficie di risposta non presenta un minimo (caso "B") il *mutant vector* si ottiene per combinazione lineare (equazione 1.33) e successivamente l'operazione di *Crossover* viene applicata per incrementare la variabilità dei vettori e agevolare l'esclusione di minimi locali.

I nuovi vettori generati nei casi "A" e "B" costituiscono i candidati per le nuove

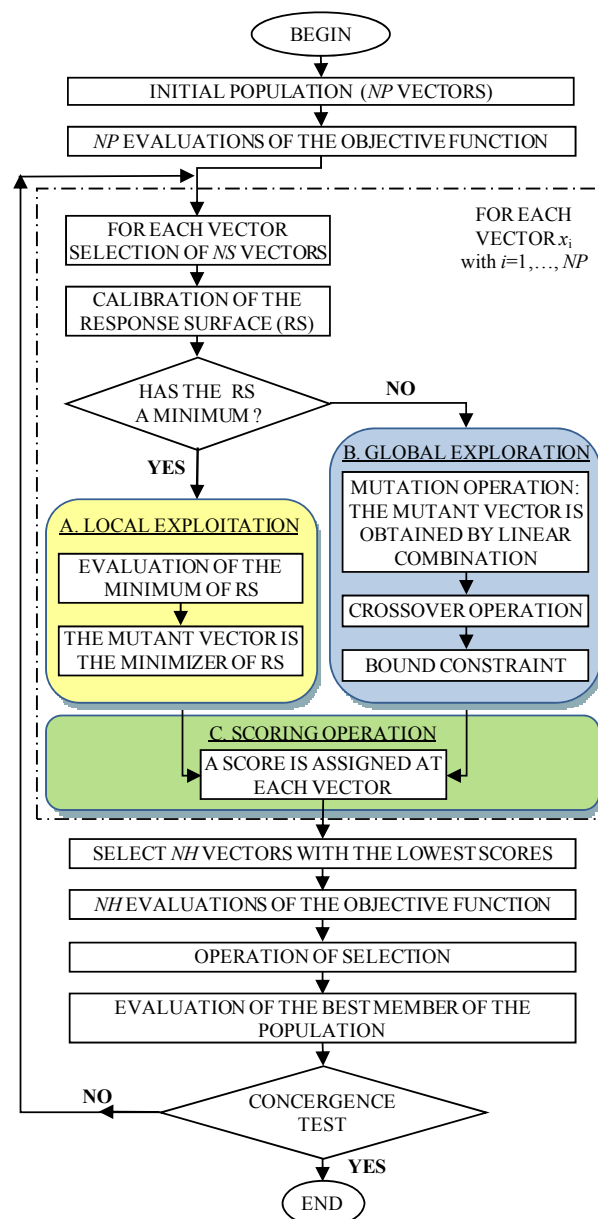


Figura 4.1: Diagramma di flusso rappresentativo dell'architettura dell'algoritmo DE-S.

valutazioni della funzione obiettivo. Ad ogni iterazione l'algoritmo DE-S assegna un punteggio W a ciascun candidato e in base al punteggio, un campione ottimale di punti è selezionato per le nuove valutazioni. Diversamente da quanto accade nell'algoritmo DE-Q, solo un numero NH limitato di punti con punteggi ridotti è selezionato e i valori corrispondenti della funzione sono valutati per ciascuna iterazione. Nel paragrafo seguente sono descritti nel dettaglio i criteri impiegati per la definizione dei punteggi da assegnare a ciascun candidato.

4.2 CRITERI PER L'ASSEGNAZIONE DI UN PUNTEGGIO

E' stata sviluppata una strategia di selezione dei candidati per le nuove valutazioni della funzione obiettivo che prevede inizialmente l'assegnazione di un punteggio per ciascun candidato. Per l' i -esimo candidato $\mathbf{v}_{i,G}$ il punteggio è definito come somma pesata di due criteri. Il primo criterio dipende dal valore della funzione obiettivo stimato dal surrogato. Il secondo criterio dipende dalle distanze del candidato dai punti già valutati dall'inizio della procedura. I due criteri sono combinati come riportato nell'espressione seguente [7]

$$W(\mathbf{v}_{i,G}) = w_R V_R(\mathbf{v}_{i,G}) + w_D V_D(\mathbf{v}_{i,G}), \quad (4.1)$$

dove w_R e V_R sono rispettivamente il peso e il punteggio associati al criterio basato sulla stima del surrogato, mentre w_D e V_D sono rispettivamente il peso e il punteggio associati al criterio basato sulle distanze. In generale, sono preferiti i candidati con valori limitati di W .

Il punteggio V_R varia tra 0 e 1 ed è calcolato considerando il valore della funzione obiettivo stimato dal surrogato quadratico. Per l' i -esimo candidato $\mathbf{v}_{i,G}$, V_R è definito come

$$V_R(\mathbf{v}_{i,G}) = 1 - e^{[-s_f^2 / (H_{best} H_{min,s})]} \quad (4.2)$$

dove s_f è il valore minimo predetto dal surrogato, H_{best} è il miglior valore della funzione obiettivo fra tutti quelli valutati dall'inizio del processo e

$$H_{min,s} = \min_{s=1,\dots,NS} (H_{\mathbf{x}_{s,G}}) \quad (4.3)$$

è il miglior valore della funzione obiettivo fra i valori associati agli NS punti $(\mathbf{x}_{s,G})$, cioè i punti adottati per la calibrazione della superficie di risposta. Con riferimento alla Figura 4.2, tanto più il valore minimo del surrogato si avvicina alla miglior valutazione della funzione locale o globale ($H_{min,s}$ e H_{best}), tanto più il valore del punteggio V_R diminuisce insieme al punteggio complessivo W e pertanto il candidato è preferito.

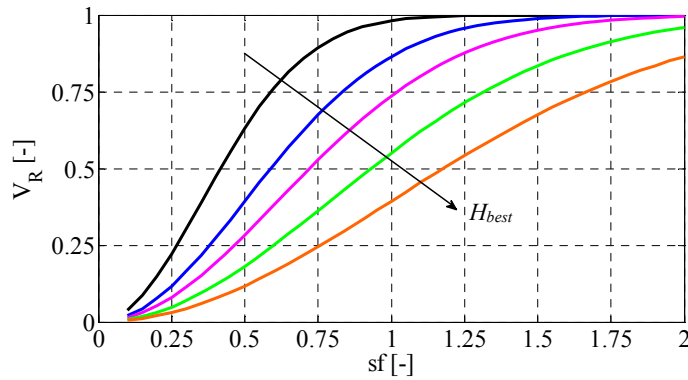


Figura 4.2: Criterio basato sulla stima del surrogato della funzione obiettivo - punteggio V_R al variare della stima del surrogato sf e del miglior valore della funzione H_{best} .

Il punteggio V_D varia tra 0 e 1 ed è determinato a partire dalle distanze del punto candidato dai punti $Z_n = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n\}$. Z_n contiene tutti i punti in corrispondenza dei quali la funzione obiettivo è già stata valutata, dall'inizio della procedura all'iterazione corrente. Per l' i -esimo candidato $\mathbf{v}_{i,G}$, la distanza euclidea $d(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l)$ è inizialmente calcolata rispetto al generico punto \mathbf{z}_l . In seguito è necessario determinare la distanza pesata $D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l)$ del punto candidato $\mathbf{v}_{i,G}$ dal generico punto \mathbf{z}_l . Sono state definite due formulazioni differenti per la distanza pesata. Considerando la prima formulazione, la distanza pesata è posta uguale alla distanza euclidea, cioè

$$D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l) = d(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l), \quad (4.4)$$

mentre la seconda formulazione aggiunge il contributo dei valori assunti dalla funzione obiettivo ed è definita attraverso l'espressione seguente

$$D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l) = d(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l) \sqrt{H_{best} / H(\mathbf{z}_l)}, \quad (4.5)$$

dove H_{best} è la miglior valutazione della funzione ottenuta dall'inizio della procedura fino all'iterazione corrente e $H(\mathbf{z}_l)$ è la valutazione della funzione effettuata in corrispondenza del generico vettore \mathbf{z}_l . Successivamente, vengono calcolati il valore minimo e il valore massimo delle distanze pesate, rispettivamente

$$\Delta_{\min} = \min_{l=1, \dots, n} D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l) \quad (4.6)$$

$$\Delta_{\max} = \max_{l=1, \dots, n} D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l). \quad (4.7)$$

Infine, il punteggio V_D associato al generico candidato $\mathbf{v}_{i,G}$ dipende dai valori minimo e massimo delle distanze pesate ed è definito secondo la seguente espressione:

$$V_D(\mathbf{v}_{i,G}) = 1 - \frac{\Delta_{\min}}{\Delta_{\max}}. \quad (4.8)$$

La condizione ottimale, corrispondente a valori di V_D molto bassi, si raggiunge quando il valore massimo delle distanze (Δ_{\max}) si avvicina al valore minimo (Δ_{\min}). Considerando la formulazione per $D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_i)$ dipendente solo dalle distanze euclidee (equazione 4.4), la condizione ottimale si ottiene quando il candidato alla nuova valutazione si trova lontano o in una posizione intermedia rispetto i punti già valutati, dunque in una zona non ancora esplorata del dominio della quale varrebbe la pena approfondire la conoscenza attraverso nuove valutazioni. Nel caso si adotti la formulazione per $D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_i)$ dipendente sia dalle distanze euclidee sia dalle valutazioni della funzione obiettivo (equazione 4.5), si considera anche l'influenza dei valori assunti dalla funzione. Pertanto, il punteggio V_D aumenta se punti vicini al candidato hanno associati valori elevati della funzione, mentre diminuisce se i punti lontani sono associati a valori elevati della funzione. Più nel dettaglio, se un candidato si trova lontano da punti ai quali corrispondono valori elevati della funzione obiettivo, la probabilità che il candidato stesso si trovi in una zona del dominio in cui la funzione possa assumere valori inferiori è più elevata rispetto alla probabilità relativa al caso di un candidato lontano da punti associati a valori della funzione bassi. Viceversa, se il candidato è vicino a punti associati a valori ridotti della funzione, vale più la pena continuare ad investigare quella zona rispetto al caso di vicinanza con punti associati a valori elevati della funzione.

Nel paragrafo seguente si riporta una discussione riguardo la combinazione dei pesi da assegnare ai criteri per la definizione del punteggio in base alla concavità delle funzioni approssimanti.

4.3 BILANCIAMENTO FRA *LOCAL EXPLOITATION* E *GLOBAL EXPLORATION*

I pesi w_R e w_D sono scelti nell'intervallo $0 \leq w_R, w_D \leq 1$, con $w_R + w_D = 1$. Se w_D si avvicina all'unità, l'esplorazione globale (*global exploration*) ha una maggior influenza rispetto alla ricerca locale; pertanto sono preferiti i candidati posizionati in una zona del dominio pressoché inesplorata. Al contrario, se il valore di w_R è elevato, si attribuisce un peso maggiore alla ricerca locale (*local exploitation*) e pertanto sono preferiti i candidati associati a valori limitati stimati dal surrogato. Nell'algorithm proposto, sono individuate differenti combinazioni di pesi da associare ai criteri in base alla concavità del surrogato quadratico. In particolare, nel caso "A", cioè quando il surrogato presenta un minimo e il candidato per una nuova valutazione corrisponde al vettore a cui è associato il minimo, potrebbe valer la pena investigare in modo più approfondito la regione del dominio in cui

si trova il minimo del surrogato, effettuando in questo modo una ricerca locale (*local exploitation*) con la possibilità di raggiungere più velocemente il valore ottimale della funzione obiettivo. In questo caso, un peso maggiore è assegnato al criterio basato sulla stima del surrogato. Si sottolinea che il criterio dipendente dalle distanze viene comunque applicato in modo tale da determinare se il candidato si trova vicino a punti in cui la funzione è già stata valutata o in alternativa, in una zona del dominio scarsamente conosciuta. Nel caso "B", cioè se il surrogato non presenta un minimo, solo il criterio basato sulle distanze è impiegato e i pesi w_D e w_R sono fissati pari a 1 e 0 rispettivamente, con lo scopo di effettuare un'esplorazione globale del dominio.

Dopo aver assegnato un punteggio a ciascun candidato, tutti i candidati sono ordinati in base al proprio punteggio e solo alcuni di questi con punteggi ridotti sono selezionati per le nuove valutazioni. Pertanto, ad ogni iterazione non si valuta la funzione obiettivo per tutti i *mutant vectors* (candidati), ma si seleziona un numero limitato di candidati per le nuove valutazioni che nell'operazione di *Selection* sostituiranno i vettori della popolazione precedente solo se associati a valori migliori (inferiori) della funzione. Pertanto, con l'avanzare della procedura ciascun vettore appartenente alla popolazione precedente è mantenuto nella popolazione successiva se non viene rimpiazzato da un vettore migliore. Generalmente, il numero di nuove valutazioni ad ogni iterazione viene fissato inferiore al numero di candidati, con l'obiettivo di limitare il numero complessivo di valutazioni. Fondamentale specificare che le informazioni relative ai punti già valutati che vengono sostituiti da punti migliori si mantengono in memoria poiché per il calcolo del punteggio V_D è necessario valutare la distanza dei candidati da tutti i punti in cui è stata valutata la funzione obiettivo; in questo modo risulta possibile definire se i candidati si trovano in zone inesplorate o meno del dominio.

La selezione dei candidati per le nuove valutazioni permette di escludere punti del dominio in cui la probabilità di migliorare la conoscenza della funzione è limitata, ad esempio punti posizionati in zone già esplorate o in zone in cui già altri punti valutati risultano associati a valori della funzione elevati. Si trascurano anche quei candidati corrispondenti a valori stimati della funzione molto distanti dai valori della funzione valutati in altri punti del dominio. Al contrario si mantengono punti che si trovano in zone in cui i punti già valutati assumono valori della funzione limitati. Generalmente si ottiene una procedura che inizialmente tende a esplorare il dominio di definizione dei parametri poiché le valutazioni sono in numero ancora limitato per decidere di concentrarsi in una zona del dominio rispetto che in un'altra. All'avanzare della procedura ci si concentrerà maggiormente nell'investigare alcune zone del dominio in cui i valori della funzione sono limitati e si escluderanno zone in cui la funzione assume valori elevati e in cui la concentrazione dei punti già valutati è alta. Dal punto di vista operativo, inizialmente si scelgono candidati provenienti sia dal caso "A" sia dal caso "B", rispettivamente ottenuti

dalla minimizzazione del surrogato e attraverso combinazione lineare, e durante le ultime iterazioni generalmente si selezionano candidati corrispondenti ai valori minimi delle funzioni approssimanti. In altre parole, all'avanzare della procedura, ad ogni iterazione saranno calibrate superfici di risposta a partire da punti concentrati maggiormente in prossimità del minimo globale della funzione; in questo modo i surrogati permetteranno di cogliere in modo sempre più accurato la forma della funzione in una zona limitata del dominio.

Una precisione da riportare riguarda la strategia per effettuare l'operazione di *Mutation*. Come descritto nel paragrafo 1.2 con riferimento all'algoritmo DE, per eseguire l'operazione di *Mutation* è possibile scegliere fra tre strategie distinte: la prima *random*, la seconda *best* e la terza *best-to-rand*, intermedia fra le prime due. Per l'algoritmo DE-S si suggerisce la strategia *random* da impiegare nel caso in cui il surrogato non presenti un minimo e si proceda all'applicazione dell'operazione di *Mutation* (caso "B"). Come già ampiamente descritto, nel caso "B" si individuano i candidati alle nuove valutazioni per garantire l'esplorazione del dominio di definizione dei parametri, pertanto l'obiettivo è quello di definire nuovi punti non localizzati a ridosso dei migliori punti già valutati, come accadrebbe se venisse adottata la strategia *best* ad esempio.

In Figura 4.3 è mostrato un esempio di funzione obiettivo $H(x)$ a un parametro che presenta più minimi locali evidenziando i termini introdotti all'interno delle formulazioni dei punteggi V_R e V_D ; si riportano a titolo esemplificativo due situazioni che si possono presentare in base alla concavità del surrogato. Gli indicatori di colore nero corrispondono alle valutazioni della funzione obiettivo effettuate dall'inizio della procedura fino all'iterazione corrente. Gli indicatori di colore blu sono selezionati per calibrare una superficie di risposta. Nel primo caso (Figura 4.3a) il surrogato presenta un minimo e pertanto il *mutant vector* $v_{i,G}$ è il vettore corrispondente al minimo del surrogato s_f , mentre nel secondo caso (Figura 4.3b) il surrogato non ha un minimo e il *mutant vector* si ottiene

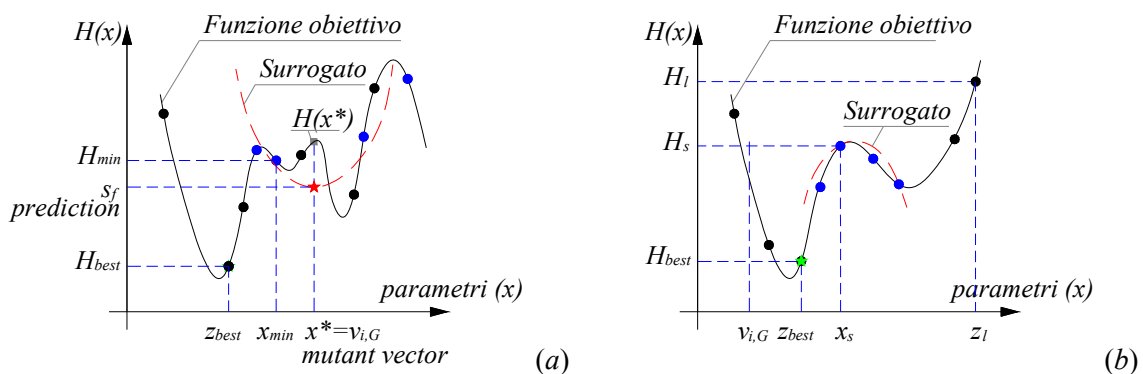


Figura 4.3: Esempio di funzione obiettivo con indicazione dei termini introdotti nelle espressioni dei punteggi V_R e V_D nel caso in cui il surrogato presenti (a) o meno (b) un minimo.

per combinazione lineare. Successivamente, un punteggio è assegnato a ciascun *mutant vector* che risulta un candidato per le nuove valutazioni.

4.4 ANALISI DI SENSITIVITÀ DEI PARAMETRI CHE GOVERNANO L'ALGORITMO DE-S

E' stata condotta un'analisi di sensitività in modo tale da valutare l'influenza di alcuni parametri che controllano l'algoritmo DE-S proposto sull'efficienza della procedura di ottimizzazione e sull'accuratezza dei risultati. In generale, prima di avviare un processo di ottimizzazione adottando un algoritmo risolutivo è necessario scegliere una serie di parametri. Nel caso dell'algoritmo DE-S i principali parametri che devono essere fissati e che si ritiene possano maggiormente influenzare la procedura sono il numero NP di vettori che compongono la popolazione iniziale, il numero NH di nuove valutazioni della funzione obiettivo per ciascuna iterazione e i pesi w_R e w_D associati a ciascun criterio per la definizione del punteggio da assegnare ai candidati alle nuove valutazioni. L'obiettivo è definire la miglior combinazione di parametri da fissare all'avvio di una generica procedura di ottimizzazione in modo da limitare il numero complessivo di valutazioni garantendo l'accuratezza della soluzione.

Come riferimento per l'analisi di sensitività, sono stati considerati problemi di ricerca del minimo globale di due differenti funzioni benchmark che presentano più minimi locali e che spesso vengono adottate per testare le performance di algoritmi di ottimizzazione. Nel seguito si riportano le formulazioni matematiche e le caratteristiche delle funzioni considerate e i risultati delle analisi effettuate. In prima istanza, sono state condotte batterie di test considerando differenti combinazioni tra il numero di nuove valutazioni NH e la dimensione della popolazione iniziale NP . Successivamente, è stata indagata l'influenza dei pesi associati a ciascun criterio per la definizione del punteggio da assegnare a ciascun candidato alle nuove valutazioni.

4.4.1 Descrizione delle funzioni benchmark

Sono stati considerati problemi di ricerca del minimo globale di due differenti funzioni benchmark che presentano più minimi locali. La prima funzione benchmark considerata è una funzione non convessa, a due parametri che presenta tre minimi locali e un minimo globale in corrispondenza del vettore dei parametri $\mathbf{x}^* = (-4.454, -4.454)$. La funzione in oggetto presenta la seguente espressione:

$$H(x_i) = 5.233 + 0.01 \sum_{i=1,2} (x_i - 0.5)^4 - 30x_i^2 - 20x_i \quad (4.9)$$

dove $-6.0 \leq x_i \leq +6.0$ con $i = 1, 2$. In Figura 4.4 sono riportate le rappresentazioni mediante curve di livello e tridimensionale della funzione descritta. La ricerca del minimo globale della funzione non è banale per la presenza di più minimi locali che assumono valori della funzione vicini al valore assunto dal minimo globale. Se non si garantisce una buona esplorazione del dominio durante il processo di ottimizzazione, può capitare che i punti di ricerca si concentrino all'avanzare della procedura in uno dei quattro minimi e ciò può portare alla convergenza del processo in corrispondenza di un minimo locale della funzione.

La seconda funzione benchmark è una funzione di Ackley shiftata, caratterizzata da diversi minimi locali e un minimo globale. Un generico problema di Ackley si basa sull'individuazione di un vettore dei parametri $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_D]$ effettuando la minimizzazione della seguente espressione [49]

$$H(x_i) = 20 - 20 \cdot e^{\left[-0.2 \sqrt{\frac{1}{D} \sum (x_i - 1)^2}\right]} - e^{\left[\frac{1}{D} \sum \cos(2\pi(x_i - 1))\right]} + e \quad (4.10)$$

dove D indica la dimensione del problema. In questo esempio si considera un problema a due parametri ($D = 2$) in cui il minimo globale si trova in corrispondenza del vettore $\mathbf{x}^* = (+1.0, +1.0)$ e $-6.0 \leq x_i \leq +6.0$ con $i = 1, 2$. In Figura 4.5 sono riportate le rappresentazioni mediante curve di livello e tridimensionale della funzione di Ackley considerata. Si può notare come la funzione presenti una curvatura globale parabolica che può facilitare il successo della procedura e aumentare la velocità di convergenza grazie all'adozione di un'approssimazione quadratica della funzione obiettivo.

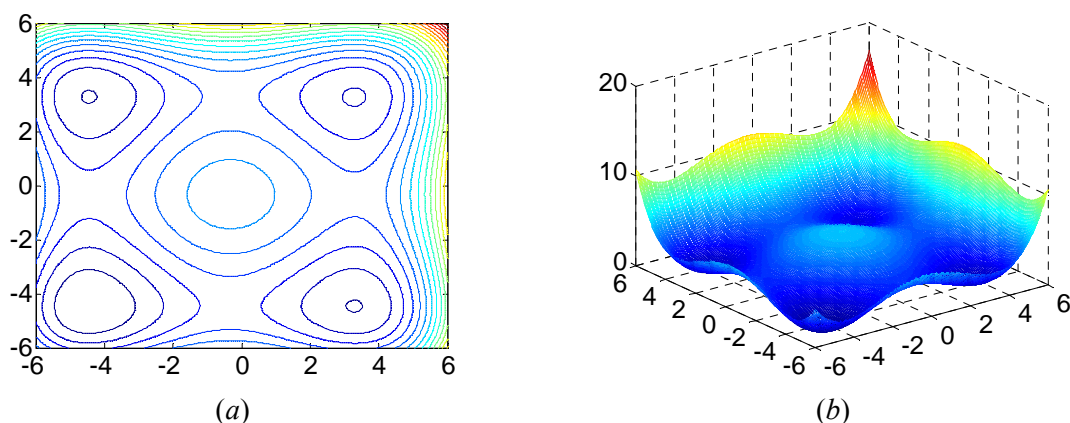


Figura 4.4: Funzione benchmark 1 - curve di livello (a) e rappresentazione tridimensionale (b).

4.4.2 Variabilità del numero di nuove valutazioni NH e del numero degli elementi della popolazione NP

Una serie di analisi è stata condotta variando il numero NH di nuove valutazioni e il numero NP di componenti della popolazione iniziale. L'obiettivo è definire il numero ottimale di nuove valutazioni da effettuare ad ogni iterazione in modo da limitare il numero complessivo di valutazioni garantendo l'accuratezza del risultato.

In Figura 4.6 e Figura 4.7 si riportano i risultati ottenuti ricercando il minimo globale della funzione benchmark 1 in termini di numero complessivo di valutazioni o iterazioni o errori al variare di NH e di NP , considerando entrambi i criteri per la definizione del punteggio V_D . Analogamente, in Figura 4.8 e Figura 4.9 si riportano i risultati per la funzione benchmark 2. Nelle figure, ciascun punto rappresenta il valore medio del numero di valutazioni o iterazioni o errori su 5000 analisi ripetute considerando gli stessi parametri che controllano la procedura. Per quanto riguarda la definizione della distanza $D(\mathbf{v}_{i,G}, \mathbf{z}_l)$, le analisi sono state ripetute utilizzando sia il criterio basato sulle distanze descritto nell'equazione 4.4, in cui per ciascun candidato la distanza pesata dipende solo dalle distanze Euclidee tra il candidato e i punti già valutati dall'inizio del processo, sia considerando il criterio descritto nell'equazione 4.5, in cui per ciascun candidato si aggiungono alle distanze Euclidee i contributi del miglior valore della funzione obiettivo trovato fino a quel punto del processo e dei valori della funzione associati a tutti i punti già valutati. Sono mostrati i risultati ottenuti dalle analisi effettuate per valori pari di NP compresi fra 10 e 24, in quanto si è constatato che con NP inferiori non si ottiene la soluzione esatta per una percentuale media di casi molto elevata, mentre per valori superiori di NP risulta eccessivo il numero di valutazioni della funzione obiettivo. In Tabella 4.1 sono elencati i parametri mantenuti fissi per ciascuna analisi effettuata in questa fase; in particolare sono mostrati i limiti superiori associati al primo e al secondo criterio di convergenza (VTR_1 e VTR_2), il numero di vettori sui quali effettuare il controllo di convergenza (NC), il numero massimo di iterazioni (itermax), la costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation*, la costante di *Crossover* CR , la strategia adottata, i

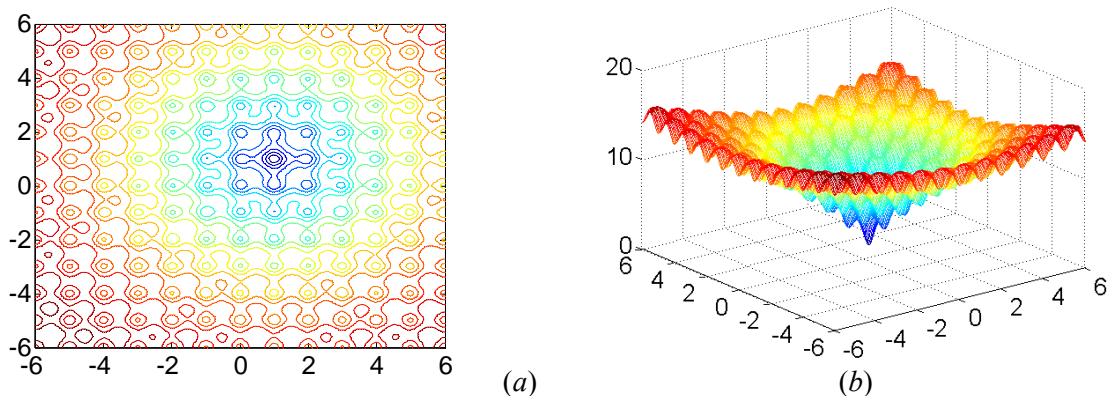


Figura 4.5: Funzione benchmark 2 - curve di livello (a) e rappresentazione tridimensionale (b).

pesi associati al criterio legato al valore stimato della funzione obiettivo (w_{rL} e w_{dL}) e i pesi associati al criterio basato sulle distanze (w_{rG} e w_{dG}).

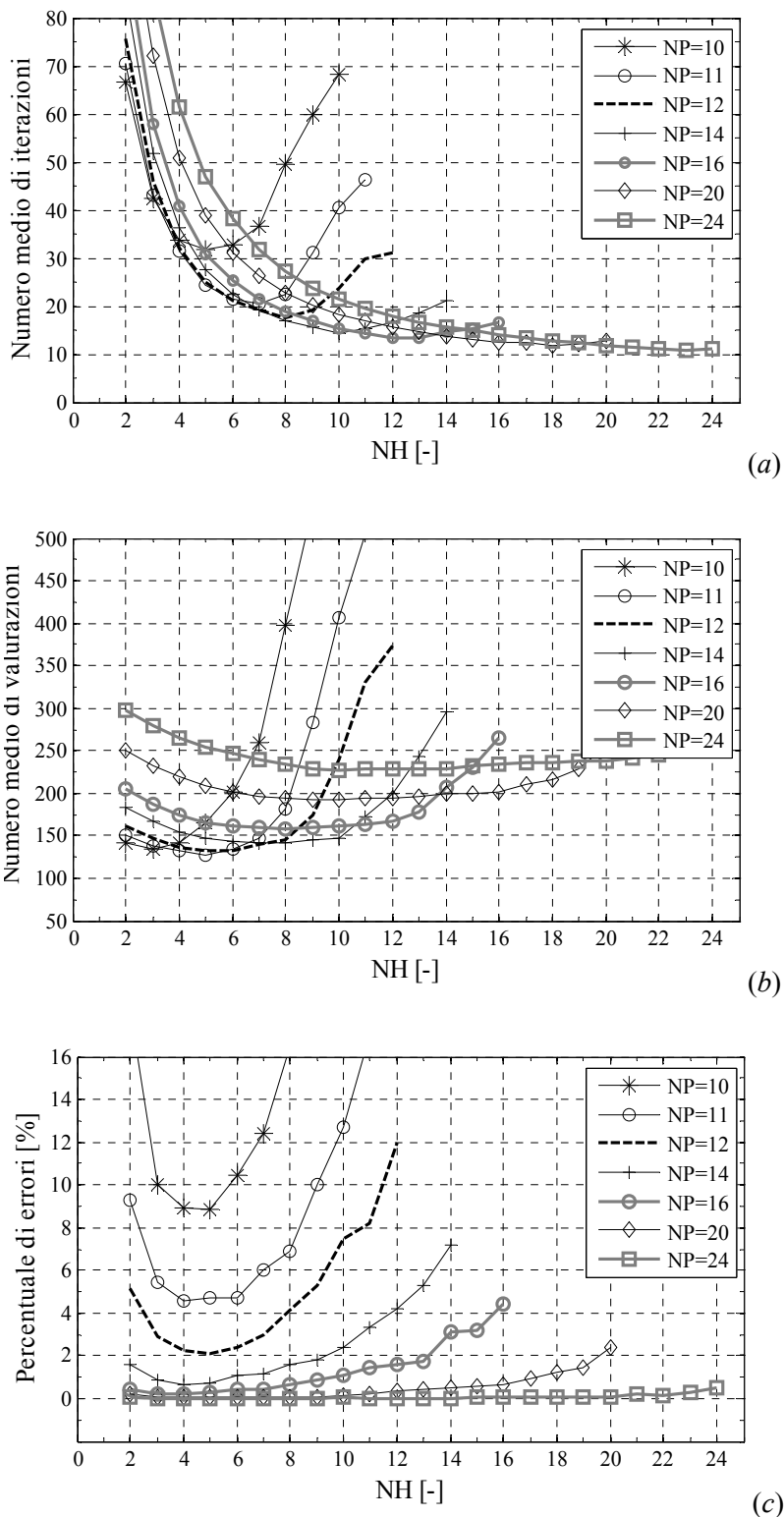


Figura 4.6: Funzione benchmark 1 – distanza D ottenuta secondo il criterio dell'equazione 4.4. Numero medio di iterazioni (a), numero medio di valutazioni della funzione obiettivo (b) e percentuale di test considerati errati (c) al variare di NH e NP .

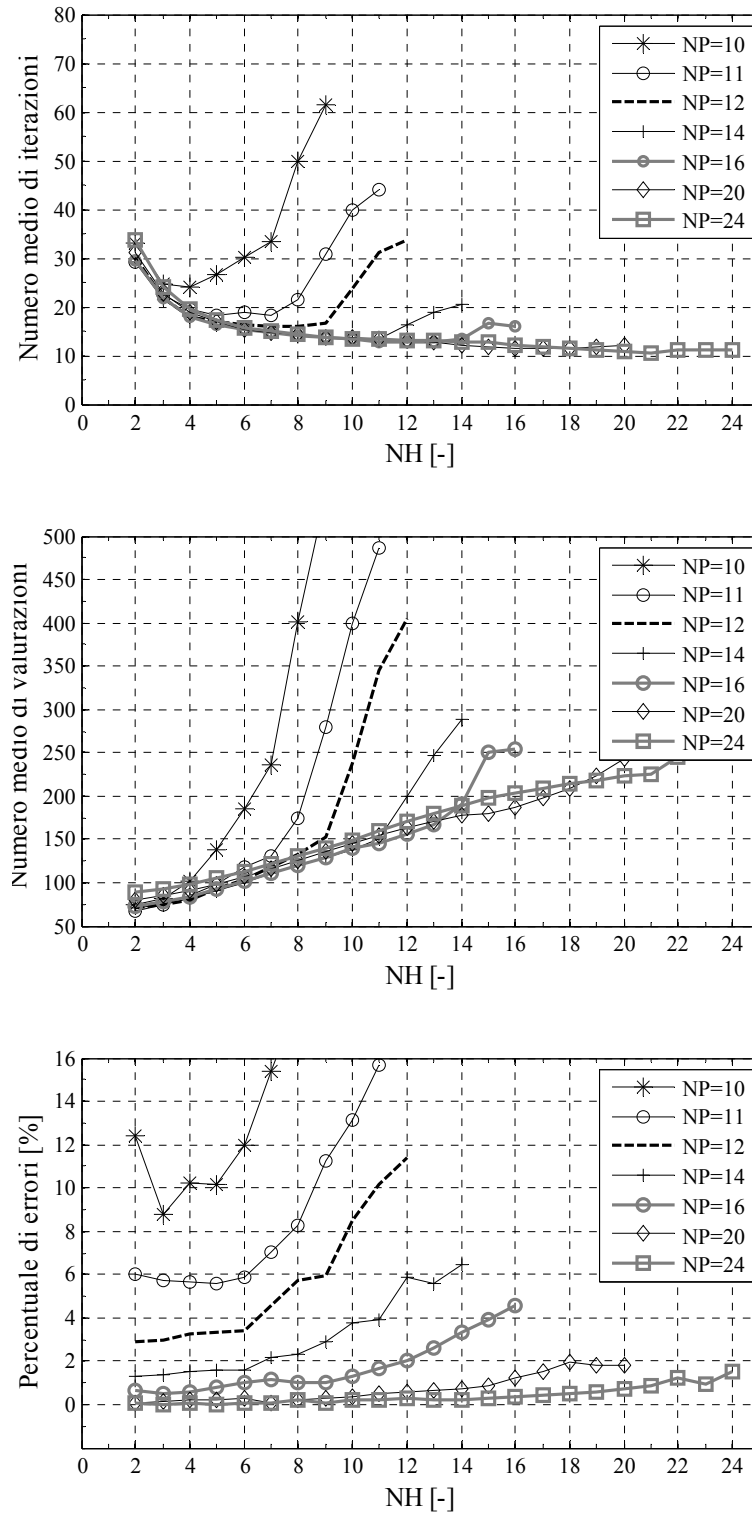


Figura 4.7: Funzione benchmark 1 – distanza D ottenuta secondo il criterio dell'equazione 4.5. Numero medio di iterazioni (a), numero medio di valutazioni della funzione obiettivo (b) e percentuale di test considerati errati (c) al variare di NH e NP .

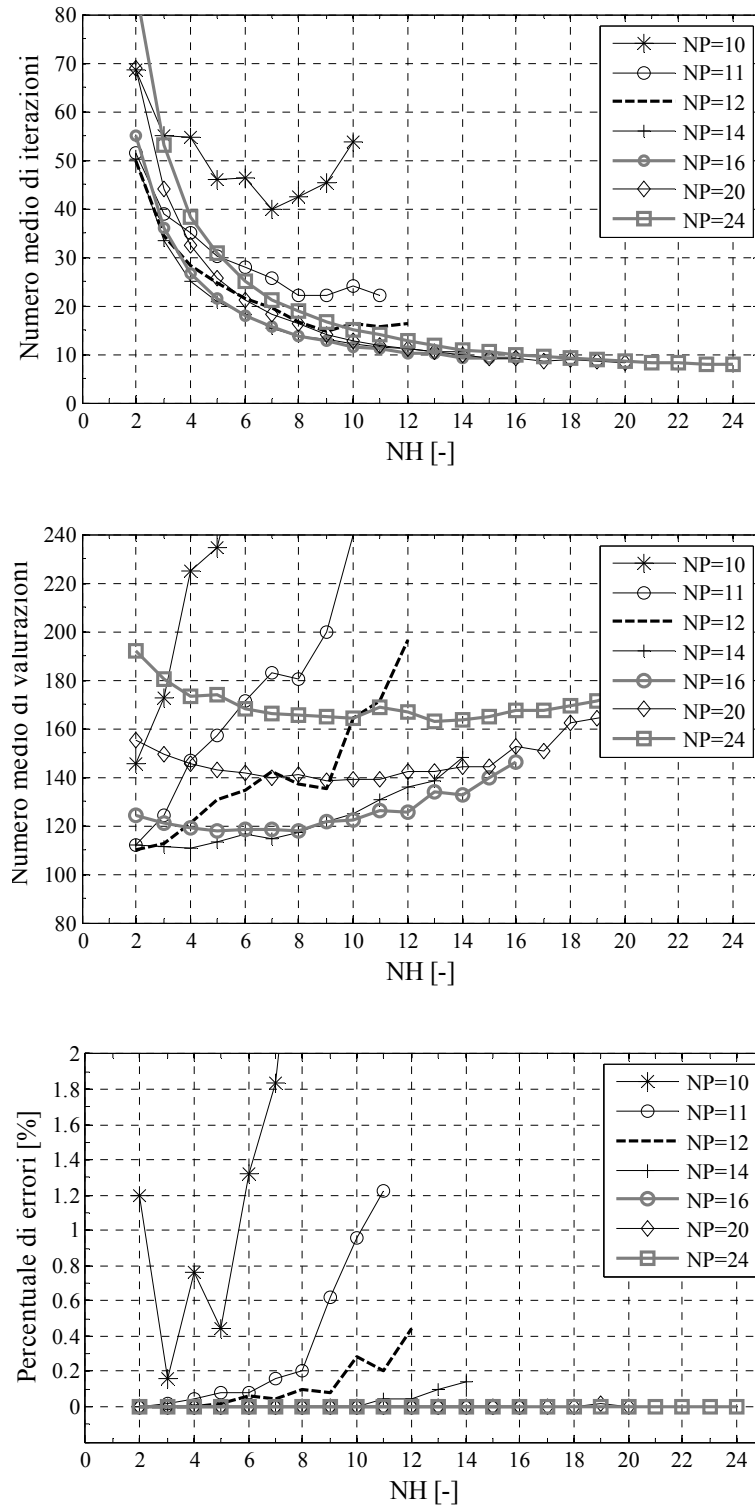


Figura 4.8: Funzione benchmark 2 – distanza D ottenuta secondo il criterio dell'equazione 4.4. Numero medio di iterazioni (a), numero medio di valutazioni della funzione obiettivo (b) e percentuale di test considerati errati (c) al variare di NH e NP .

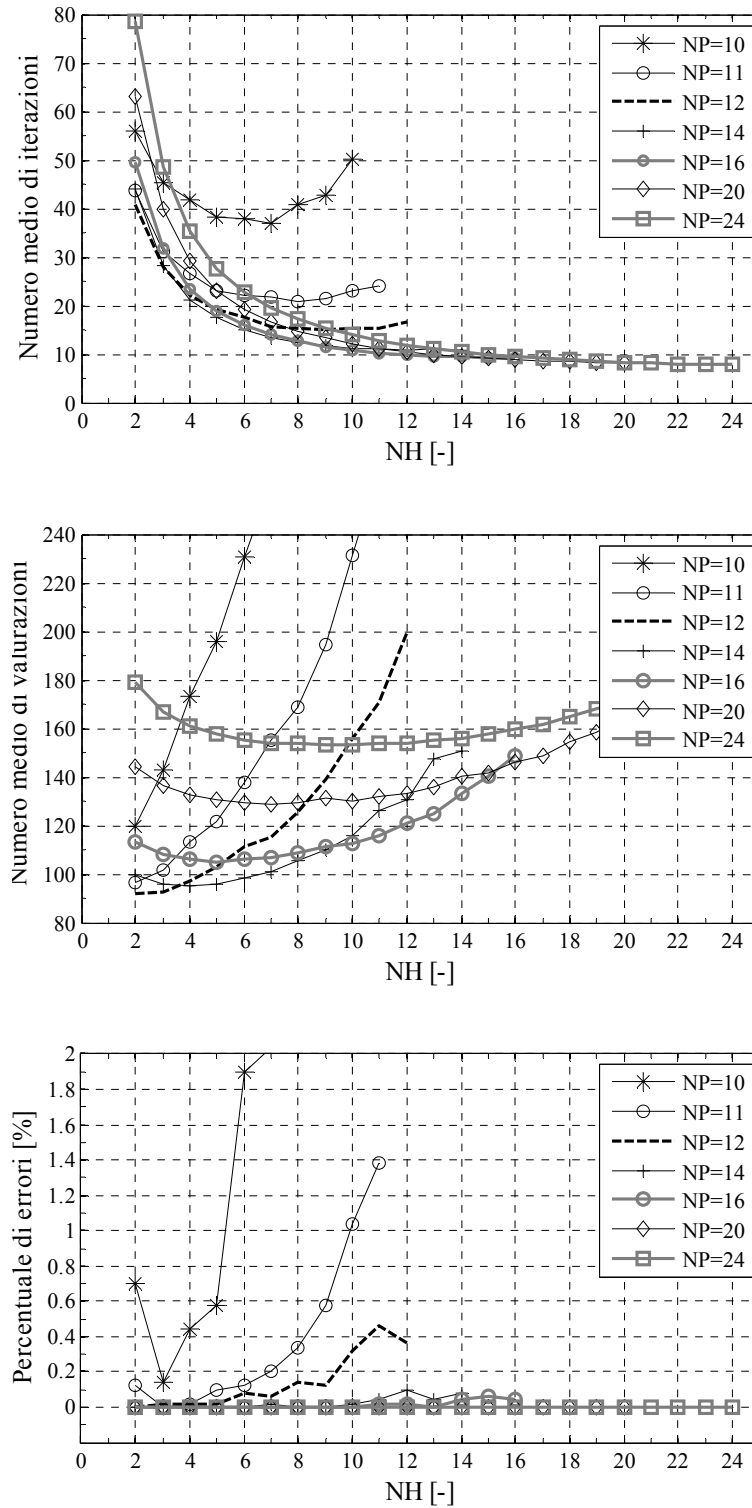


Figura 4.9: Funzione benchmark 2 – distanza D ottenuta secondo il criterio dell'equazione 4.5. Numero medio di iterazioni (a), numero medio di valutazioni della funzione obiettivo (b) e percentuale di test considerati errati (c) al variare di NH e NP .

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NC	2
itermax	200
F	0.6
CR	0.5
strategia	<i>rand</i>
w_{rL}	2/3
w_{dL}	1/3
w_{rG}	0
w_{dG}	1

Tabella 4.1: Analisi di sensitività - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

Per prima cosa si sottolinea che su 5000 analisi effettuate per ciascuna combinazione di NP e NH si individuano casi in cui non si ottiene la soluzione corretta del problema, ma la convergenza si raggiunge in corrispondenza di un minimo locale della funzione. La percentuale degli errori è molto limitata se si valutano i risultati della funzione benchmark 2, considerando entrambe le formulazioni per V_D mentre crescono significativamente per la funzione benchmark 1. Per limitare il numero di analisi convergenti a minimi locali, è necessario assumere un numero di elementi che compongono la popolazione NP non inferiore a 14.

I risultati mostrano che all'aumentare di NP , il numero complessivo di iterazioni diminuisce ma il numero complessivo di valutazioni della funzione obiettivo ha un andamento non monotono. In generale, l'aumento di NP comporta un numero maggiore di valutazioni in corrispondenza della popolazione iniziale di vettori, pertanto viene esplorato maggiormente il dominio di definizione dei parametri all'inizio della procedura e ciò può agevolare l'individuazione di valori migliori della funzione obiettivo in fase iniziale e di conseguenza rendere necessario un numero inferiore di successive valutazioni per raggiungere la convergenza rispetto a casi con NP inferiore. Inoltre, un aumento di NP comporta un incremento del numero di surrogati quadratici che devono essere calibrati per ogni successiva iterazione; ciò permette di migliorare la conoscenza della forma della funzione obiettivo grazie alla presenza di un numero sempre maggiore di superfici approssimanti e di conseguenza di velocizzare la convergenza del processo. Pertanto, in alcuni casi vale la pena effettuare un numero maggiore di valutazioni iniziali poiché ciò può garantire una convergenza più rapida del processo. D'altra parte, una dimensione eccessiva di NP porta ad un incremento del numero complessivo delle valutazioni.

Inoltre, fissata la dimensione NP della popolazione iniziale, si nota che il numero complessivo di valutazioni varia al variare del numero di nuove valutazioni NH . In particolare si può individuare un valore NH ottimale in corrispondenza di circa un terzo di NP . NH ottimale è associato al numero minimo di valutazioni necessarie per raggiungere la

convergenza richiesta ed è individuato per ciascun valore di NP fra tutte le analisi effettuate al variare di NH . Questo dato può essere interpretato nel seguente modo. Se si sceglie NH troppo piccolo ad ogni iterazione si effettuano poche nuove valutazioni della funzione obiettivo, con un più alto rischio di convergere ad un minimo locale. Infatti, ad ogni iterazione, la definizione di NP nuove superfici di risposta a partire da una popolazione costituita sostanzialmente dagli stessi punti della popolazione precedente, non garantisce di migliorare la conoscenza del dominio di definizione dei parametri poiché i nuovi punti potrebbero non aggiungere informazioni rilevanti. Al contrario se NH è grande l'architettura dell'algoritmo DE-S si avvicina molto a quella dell'algoritmo DE-Q; in particolare, ad ogni iterazione vengono valutati molti nuovi punti probabilmente in numero sovrabbondante; pertanto il numero complessivo di valutazioni generalmente risulta elevato. Come già riportato, la condizione ottimale si ottiene per NH circa pari a $1/3 NP$ che permette di raggiungere un compromesso fra le due situazioni appena descritte.

Effettuando un numero di nuove valutazioni ad ogni iterazione né sovrabbondante né troppo limitato, la calibrazione di superfici di risposta avviene considerando sia punti appartenenti alla popolazione precedente sia nuovi punti e ciò può garantire una descrizione più accurata del dominio limitando il numero complessivo di valutazioni.

In Figura 4.10 è riportato l'andamento del valore ottimale di nuove valutazioni NH individuato a partire dai risultati ottenuti dalle analisi appena descritte al variare del numero NP di vettori appartenenti alla popolazione iniziale.

Infine un numero inferiore di valutazioni è richiesto se V_D è definito considerando sia le distanze Euclidee sia i valori della funzione obiettivo; pertanto si può affermare che introdurre all'interno della formulazione di V_D la dipendenza dai valori assunti dalla funzione obiettivo corrisponde ad aggiungere informazioni riguardo i punti già valutati e ciò comporta una riduzione del numero complessivo di valutazioni per raggiungere la convergenza richiesta.

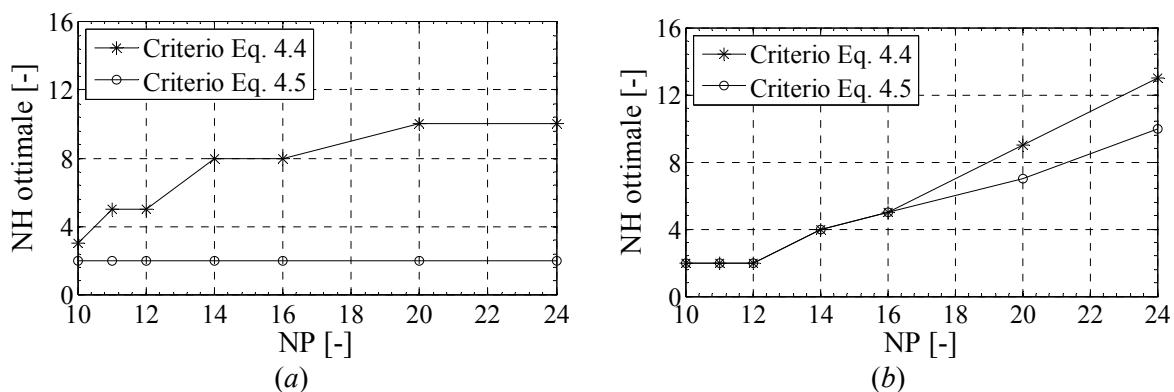


Figura 4.10: Funzioni benchmark 1 (a) e 2 (b) - NH ottimale al variare di NP .

4.4.3 Variabilità dei pesi associati ai criteri per l'assegnazione dei punteggi ai candidati alle nuove valutazioni

Sono state condotte diverse analisi per la minimizzazione delle funzioni benchmark al variare del rapporto fra il peso associato al criterio basato sulla distanza e il peso attribuito al criterio dipendente dai valori predetti della funzione. Le analisi sono impostate modificando il rapporto fra i pesi e fissando il numero di nuove valutazioni NH . Come già ampiamente illustrato nei paragrafi precedenti, al variare della forma della funzione con particolare riferimento al quantitativo e alla disposizione di minimi locali è fondamentale definire un rapporto appropriato fra i pesi associati ai criteri per la definizione del punteggio da assegnare a ciascun candidato alle nuove valutazioni in modo tale da raggiungere un equilibrio fra ricerca locale e globale. In Tabella 4.2 e in Figura 4.11 sono riportati i valori dei pesi adottati nelle analisi parametriche; con riferimento alla Figura 4.11, sono riportati l'andamento del rapporto fra i pesi w_{rL} e w_{dL} adottato per le diverse analisi effettuate e gli andamenti dei valori assunti da w_{dL} e w_{rL} nelle stesse analisi.

Sono state effettuate simulazioni Montecarlo ciascuna con 5000 analisi, variando il rapporto fra i pesi, il valore di NH (2 o 6) e il valore di NP (12, 14 o 16). Le analisi sono state ripetute considerando entrambi i criteri per la definizione di V_D . In Figura 4.12 sono riportati i risultati in termini di numero complessivo di valutazioni per raggiungere la convergenza desiderata al variare del rapporto fra i pesi per entrambe le funzioni benchmark. Con il colore grigio sono mostrate le curve ottenute definendo V_D dipendente

w_{rL}	0.00	0.25	0.33	0.50	0.66	0.75	1.00
w_{dL}	1.00	0.75	0.66	0.50	0.33	0.25	0.00
w_{rL} / w_{dL}	0.0	0.33	0.5	1.0	2.0	3.0	Inf.

Tabella 4.2: Analisi di sensitività - combinazioni dei pesi w_{dL} e w_{rL} associate alle analisi effettuate.

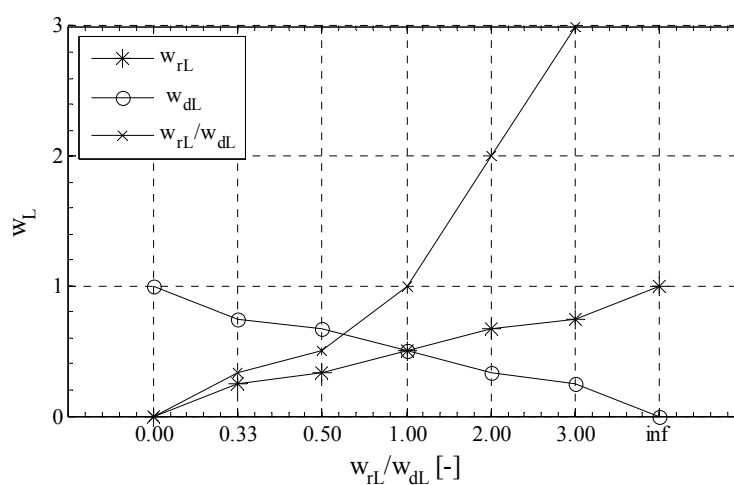


Figura 4.11: Analisi di sensitività - combinazioni dei pesi w_{dL} e w_{rL} associate alle analisi effettuate.

solo dalle distanze Euclidee, mentre con il colore nero le curve ottenute considerando V_D dipendente anche dai valori predetti delle funzione obiettivo. Ciascuna curva corrisponde ad un valore fissato di NH . Si può notare una limitata variabilità del numero complessivo di valutazioni al variare dei pesi; ciò a dimostrazione della robustezza dell'algoritmo che non risulta particolarmente influenzato dai parametri su cui è basata la risoluzione della procedura.

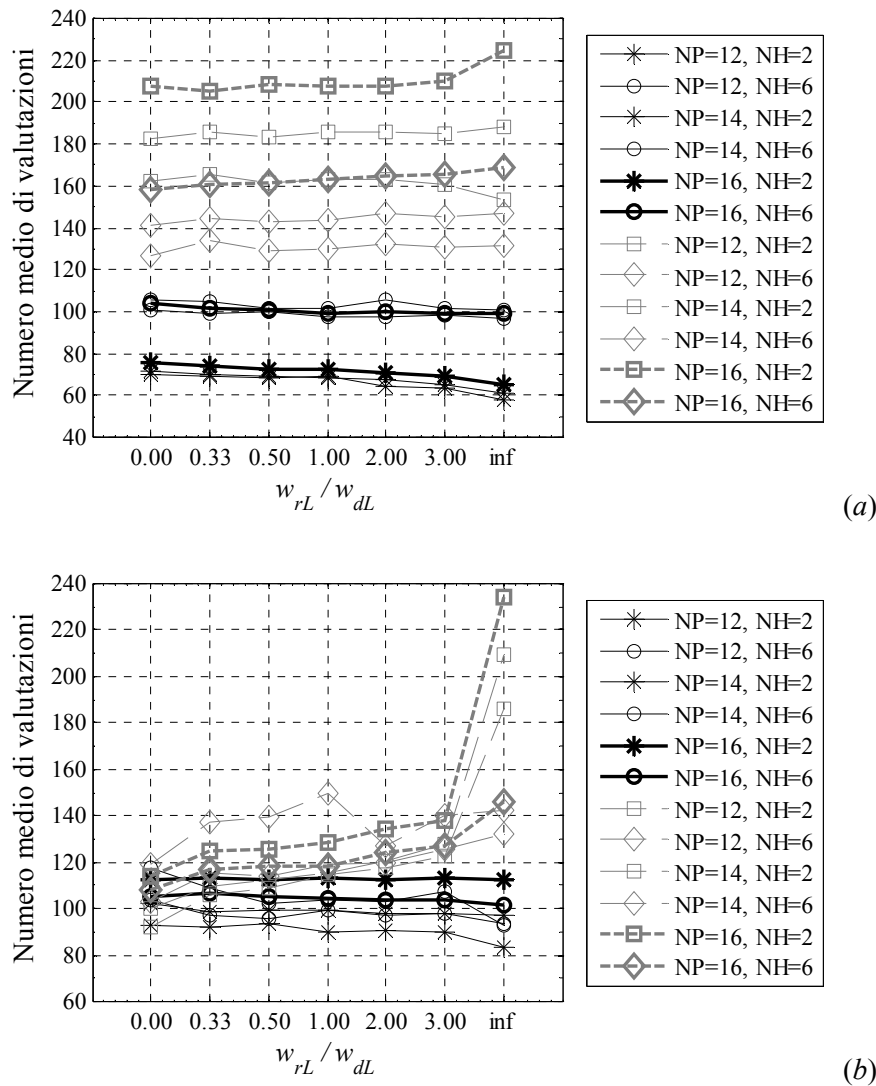


Figura 4.12: Analisi di sensitività: variabilità dei pesi - funzione benchmark 1 (a) e 2 (b) - numero complessivo di valutazioni al variare del rapporto fra i pesi (con le linee tratteggiate in color grigio si indicano i risultati ottenuti adottando V_D dipendente dalle sole distanze Euclidee mentre con le linee continue nere adottando V_D dipendente dalle distanze Euclidee e dai valori della funzione obiettivo).

5 CONFRONTO FRA GLI ALGORITMI EVOLUTIVI STUDIATI E L'ALGORITMO PROPOSTO

In questo capitolo si riporta una serie di risultati ottenuti testando le prestazioni dell'algoritmo DE-S sviluppato in confronto a quelle degli altri algoritmi studiati, affrontando problemi di ottimizzazione di differente natura e complessità. Inizialmente sono stati risolti problemi analitici semplici riguardanti la ricerca del minimo globale di funzioni benchmark; le analisi sono state ripetute più volte per garantire una rappresentazione statistica dei risultati. Successivamente, sono stati affrontati semplici problemi d'identificazione dinamica di una struttura a telaio e di un ponte a singola campata considerando come riferimento valori numerici esatti. Infine, è stato considerato un problema di calibrazione del comportamento post-fessurativo di calcestruzzi fibrorinforzati utilizzando come riferimento prove sperimentali di laboratorio.

5.1 MINIMIZZAZIONE DI FUNZIONI BENCHMARK

Le prestazioni dell'algoritmo proposto DE-S sono state testate attraverso la risoluzione di problemi di ricerca del minimo globale di due funzioni benchmark, già introdotte nel capitolo 4. I risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti impiegando altri algoritmi evolutivi, in particolare gli algoritmi DE e DE-Q.

Per entrambe le funzioni sono state condotte 5000 analisi, fissando per ciascuna un numero NP di punti iniziali scelti in modo casuale nello spazio di ricerca. Considerando quanto illustrato nel Capitolo 4, il numero NP di punti è stato mantenuto costante e pari a 14, mentre il numero NH di nuove valutazioni da effettuare per ciascuna iterazione dell'algoritmo DE-S è stato posto pari a 5. Il numero NS di punti necessari per calibrare le superfici di risposta è stato fissato pari a 8 per gli algoritmi DE-Q e DE-S. I pesi da associare ai criteri per l'assegnazione del punteggio ai candidati per le nuove valutazioni sono stati fissati pari a $w_{dL} = 1/3$ e $w_{rL} = 2/3$ nel caso di *local exploitation* e $w_{dG} = 1$ e $w_{rG} = 0$ nel caso di *global exploration*. In Tabella 5.1 sono riportati i parametri mantenuti fissi per ciascuna analisi, tra cui, oltre a quelli appena definiti, i limiti superiori associati al primo e al secondo criterio di convergenza (VTR_1 e VTR_2), il numero di vettori sui quali effettuare il controllo di convergenza (NC), il numero massimo di iterazioni (itermax), la

costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation*, la costante di *Crossover* CR e la strategia adottata.

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	14
NH	5
NC	2
itermax	100
F	0.6
CR	0.5
strategia	<i>rand</i>
w_{rL}	2/3
w_{dL}	1/3
w_{rG}	0
w_{dG}	1

Tabella 5.1: Funzioni benchmark - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

Di seguito (Tabella 5.2 e Tabella 5.3) si mostrano le elaborazioni statistiche dei risultati ottenuti per le due funzioni benchmark considerate. In particolare, si riportano i valori medi e i coefficienti di variazione relativi ai valori ottimali dei parametri (x_1 e x_2) ottenuti al termine del processo di ottimizzazione, al numero complessivo di valutazioni della funzione necessarie per raggiungere la convergenza e la percentuale di errori cioè il numero di volte in cui la procedura non raggiunge la soluzione corretta del problema rispetto al numero totale di test.

Per valutare se la soluzione trovata è accettabile è stato considerato uno scostamento

		x_1	x_2	n. valutazioni	n. errori [%]
DE	Valore medio	-4.454	-4.454	586.29	1.28
	CV%	0.20	0.20	8.72	-
DE-Q	Valore medio	-4.453	-4.454	199.62	5.68
	CV%	0.11	0.09	34.80	-
DE-S	Valore medio	-4.453	-4.453	90.5	1.56
	CV%	0.10	0.10	39.9	-

Tabella 5.2: Funzione benchmark 1 – risultati statistici.

		x_1	x_2	n. valutazioni	n. errori [%]
DE	Valore medio	1.000	1.000	614.94	0.00
	CV%	0.27	0.27	8.47	-
DE-Q	Valore medio	1.000	1.000	479.79	0.22
	CV%	0.14	0.14	56.53	-
DE-S	Valore medio	1.000	1.000	96.1	0.0
	CV%	0.05	0.06	72.8	-

Tabella 5.3: Funzione benchmark 2 – risultati statistici.

ammissibile del 1% tra la soluzione esatta e il risultato di una generica analisi. Inoltre per meglio comparare le performance dell' algoritmo proposto DE-S e degli algoritmi DE e DE-Q con riferimento alla velocità di convergenza, si riportano in Figura 5.1 e Figura 5.2 gli andamenti dei valori assunti dalla funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni. A titolo esemplificativo, per ciascun algoritmo è riportato un andamento tipico; ciascuna linea connette i valori migliori assunti dalla funzione in corrispondenza di ciascuna iterazione. Confrontare il numero d' iterazioni necessarie per raggiungere la convergenza richiesta non è significativo per la differente architettura degli algoritmi considerati; in particolare, negli algoritmi DE e DE-Q per ogni iterazione si effettuano NP nuove valutazioni, mentre nell' algoritmo DE-S si effettuano $NH < NP$ valutazioni.

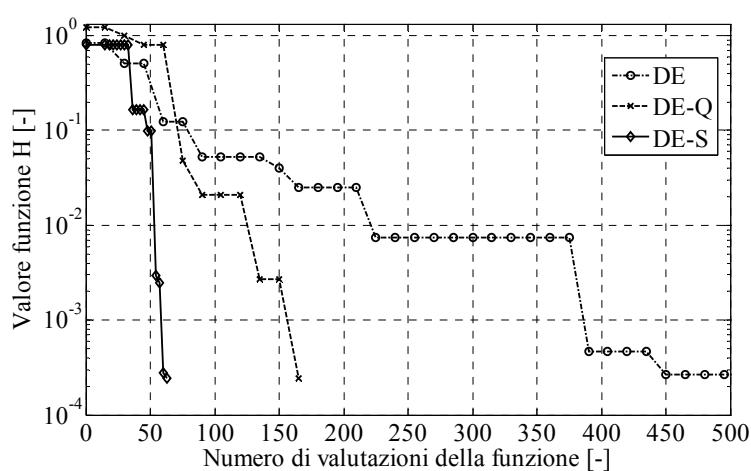


Figura 5.1: Funzione benchmark 1 - valori della funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni.

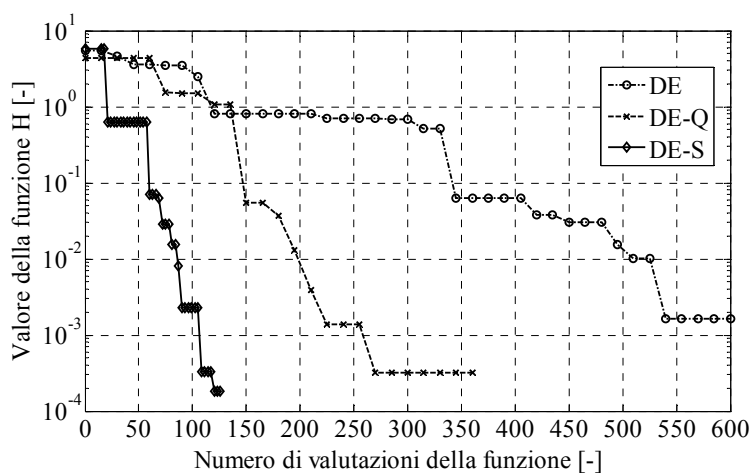


Figura 5.2: Funzione benchmark 2 - valori della funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni.

Per quanto riguarda i valori ottimali dei parametri individuati in seguito alle procedure di ottimizzazione, si può notare come il valore medio di ciascun parametro si avvicini molto al corrispondente valore esatto con coefficienti di variazione contenuti (inferiori a 0.3%) per tutti gli algoritmi testati. In particolare, per la funzione benchmark 1 i coefficienti di variazione presentano lo stesso ordine di grandezza considerando tutti e tre gli algoritmi, mentre per la funzione benchmark 2 si ha una riduzione di circa un ordine di grandezza adottando l'algoritmo DE-Q rispetto all'algoritmo DE, mentre i valori sono paragonabili fra l'algoritmo DE-Q e l'algoritmo DE-S. Infatti, gli algoritmi DE-Q e DE-S garantiscono una rapida convergenza verso la soluzione del problema una volta identificata la zona del dominio in cui ha sede il minimo globale, diversamente da quanto accade per l'algoritmo DE.

Inoltre, i risultati mostrano un significativo miglioramento in termini di velocità di convergenza dell'algoritmo DE-S rispetto agli altri algoritmi, in quanto esso necessita di un numero inferiore di valutazioni della funzione per raggiungere la convergenza richiesta rispetto agli altri algoritmi. In particolare, per quanto riguarda la funzione benchmark 1 sono necessarie 90 valutazioni per l'individuazione della soluzione del problema se si adotta l'algoritmo DE-S, mentre il numero complessivo di valutazioni cresce fino a 199 se si considera l'algoritmo DE-Q e a 586 per l'algoritmo DE. Pertanto, il numero di valutazioni necessarie considerando l'algoritmo DE-S si riduce oltre la metà rispetto all'algoritmo DE-Q e di circa 7 volte considerando l'algoritmo DE. Risultati simili si ottengono considerando la funzione benchmark 2.

Osservando gli andamenti del valore assunto dalla funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni, si può notare come per la funzione benchmark 1 entro le prime 50 valutazioni i valori della funzione risultano paragonabili in quanto adottando tutti e tre gli algoritmi è comunque necessario effettuare una prima fase di individuazione del minimo globale della funzione (fase di esplorazione). Successivamente, l'algoritmo DE raggiunge il risultato del problema con una limitata velocità di convergenza tanto che capita spesso che il miglior valore assunto dalla funzione obiettivo rimanga invariato anche dopo diverse valutazioni della funzione. Di contro, l'introduzione di un surrogato quadratico nell'algoritmo DE-Q e l'inserimento di una strategia di selezione dei punti in cui effettuare nuove valutazioni nell'algoritmo DE-S comporta un incremento della velocità di convergenza del processo; pertanto il minimo globale viene raggiunto più velocemente adottando gli algoritmi DE-Q e DE-S rispetto all'algoritmo DE. Con riferimento alla funzione benchmark 2, la condizione appena descritta si può individuare mettendo a confronto gli algoritmi DE e DE-Q per i quali i valori della funzione obiettivo risultano comparabili fino a circa 150 valutazioni e in seguito si osserva un significativo incremento dell'efficienza dell'algoritmo DE-Q. Per quanto riguarda l'algoritmo DE-S in questo caso si nota una riduzione dei valori assunti dalla funzione di circa un ordine di grandezza già

dopo poco più di 20 valutazioni a conferma dell'ulteriore incremento di velocità di convergenza della procedura. Osservazioni analoghe a quelle riportate per la funzione benchmark 1 possono essere effettuate riguardo l'andamento della curva riferita all'algoritmo DE.

Per quanto riguarda il numero di errori dell'algoritmo DE-S, su 5000 analisi effettuate si ottengono valori ottimi per entrambe le funzioni; in particolare per la funzione benchmark 2 il numero di errori è pari a zero mentre per la funzione benchmark 1 si riscontrano alcuni errori, comunque in numero inferiore all'1.5%. La percentuale sale leggermente se si guarda il numero di test errati utilizzando l'algoritmo DE-Q.

5.1.1 Confronto fra la distribuzione dei punti di ricerca nel dominio di definizione dei parametri durante la procedura di ottimizzazione

Le migliori performance dell'algoritmo proposto DE-S rispetto agli altri algoritmi studiati possono essere ulteriormente verificate confrontando le posizioni dei punti di ricerca in corrispondenza d'iterazioni successive. In particolare, in Figura 5.3, Figura 5.4 e in Figura 5.5 sono riportate le curve di livello della funzione benchmark 1 con la distribuzione dei punti relativa a differenti fasi della procedura, rispettivamente considerando l'algoritmo DE, l'algoritmo DE-Q e l'algoritmo DE-S.

Per quanto riguarda le curve di livello riferite all'algoritmo DE-S, gli indicatori rossi rappresentano i punti in cui la funzione obiettivo è valutata, appartenenti alla popolazione iniziale per la prima iterazione e appartenenti alla popolazione precedente con riferimento alle successive iterazioni. Gli indicatori blu corrispondono ai punti candidati alle successive valutazioni individuati in base alla concavità della superficie quadratica approssimante, o per combinazione lineare o in corrispondenza del valore minimo stimato dal surrogato. Gli indicatori cerchiati in verde rappresentano i nuovi punti valutati, selezionati in seguito all'operazione di *Scoring*, mentre gli indicatori cerchiati in nero corrispondono ai punti selezionati per far parte della popolazione successiva in seguito all'operazione di *Selection*, individuati in base ai valori associati della funzione obiettivo fra i vettori della popolazione precedente e i nuovi candidati in cui la funzione è valutata. In particolare, fra i punti appartenenti alla popolazione precedente (indicatori rossi), solo alcuni punti sono mantenuti per l'iterazione successiva, mentre altri sono scartati in quanto risultano associati a valori della funzione obiettivo superiori rispetto ai valori calcolati per alcuni candidati selezionati per le nuove valutazioni. Inoltre, fra i candidati in corrispondenza dei quali si effettuano le nuove valutazioni (indicatori blu cerchiati in verde) solo alcuni sono selezionati per far parte della popolazione successiva, mentre altri vengono scartati in quanto non corrispondono a valori migliori della funzione rispetto a quelli già valutati nelle fasi precedenti.

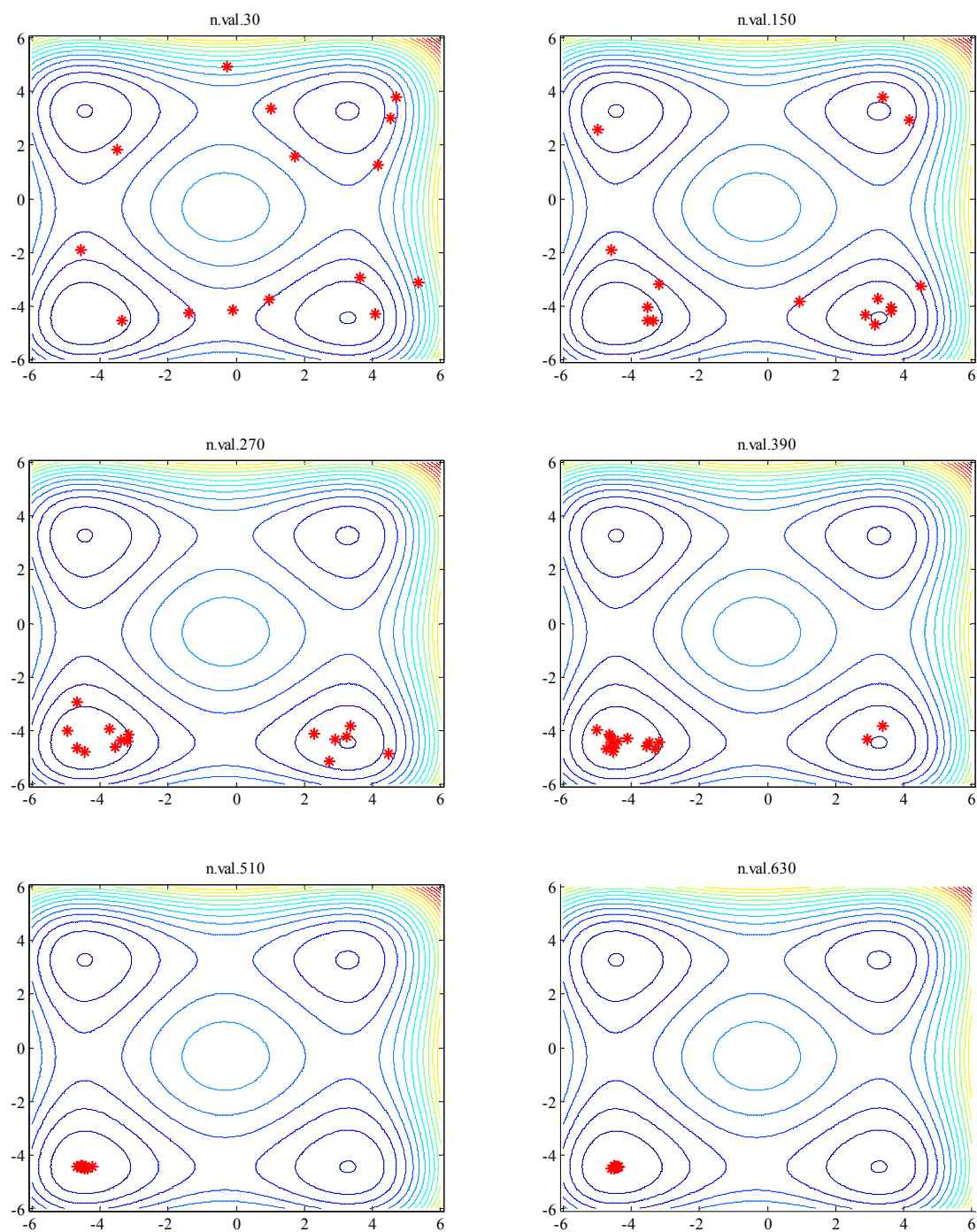


Figura 5.3: Funzione benchmark 1 - individuazione dei punti in cui è valutata la funzione obiettivo durante la procedura di ottimizzazione - algoritmo DE.

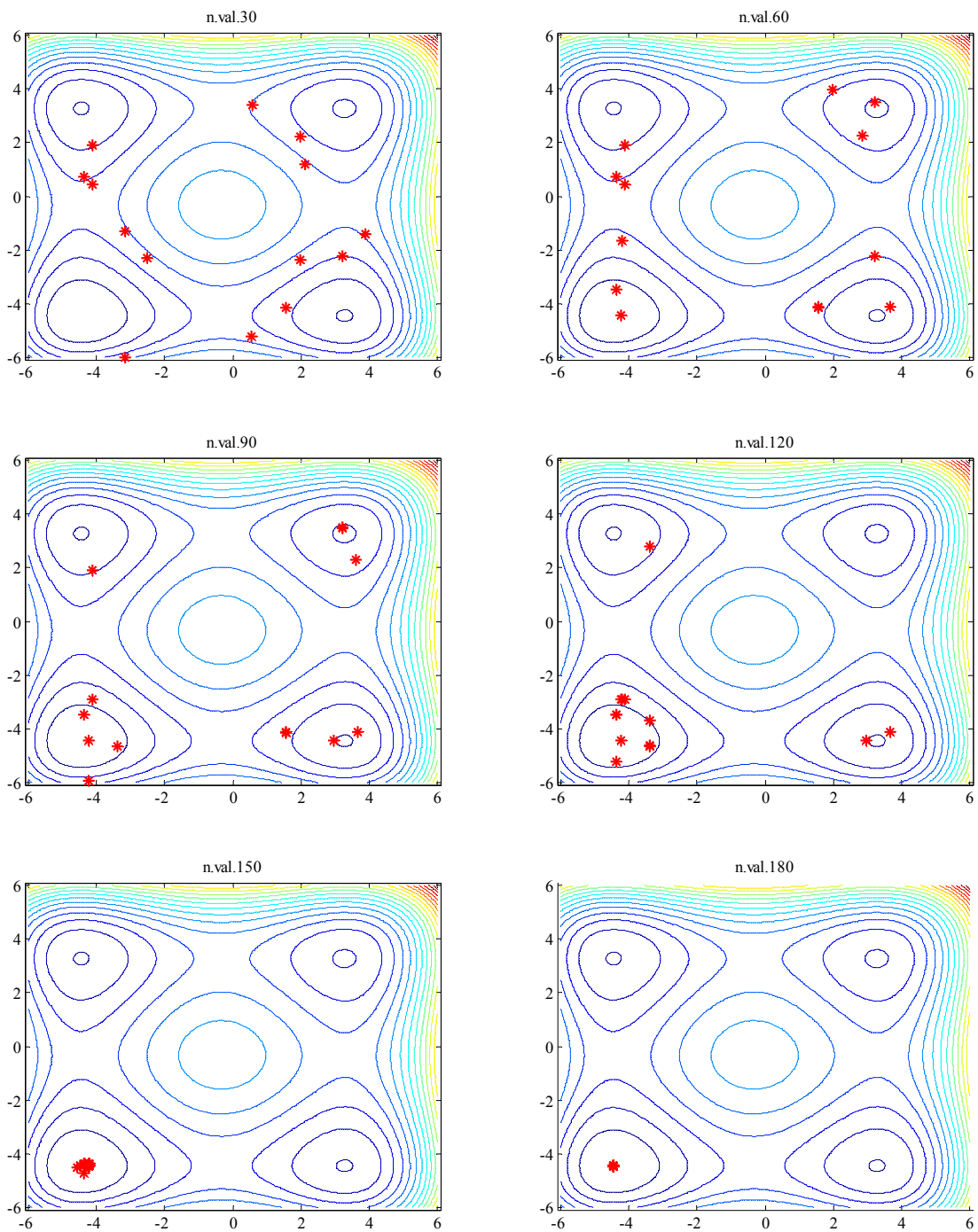


Figura 5.4: Funzione benchmark 1 - individuazione dei punti in cui è valutata la funzione obiettivo durante la procedura di ottimizzazione - algoritmo DE-Q.

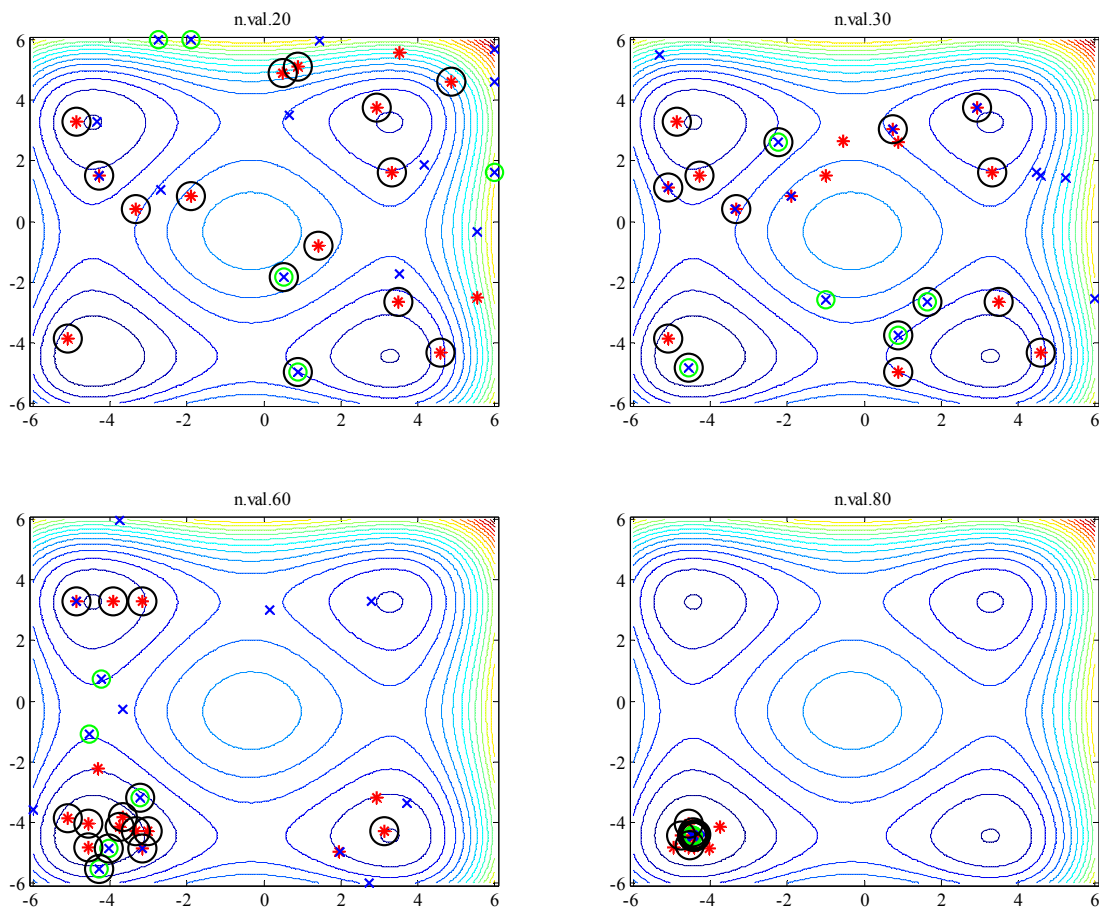


Figura 5.5: Funzione benchmark 1 - individuazione dei punti in cui è valutata la funzione obiettivo durante la procedura di ottimizzazione - algoritmo DE-S.

Si può notare come all'inizio della procedura per tutti e tre gli algoritmi, i punti sono distribuiti in modo casuale all'interno del dominio di definizione dei parametri. Dopo circa 60 valutazioni per l'algoritmo DE-S, 120 per l'algoritmo DE-Q e 390 per l'algoritmo DE, i punti di ricerca sono raggruppati vicino al minimo globale e ad alcuni minimi locali. Le successive iterazioni sono necessarie per individuare il minimo globale della funzione con la precisione richiesta dai criteri di convergenza impostati. L'algoritmo DE-S fornisce risultati migliori più velocemente in quanto permette di scegliere nuovi punti in cui valutare la funzione in posizioni sempre più vicine al minimo globale.

In Figura 5.6 sono riportate le curve di livello della funzione benchmark 2 insieme ai punti in cui la funzione obiettivo è valutata considerando differenti fasi della procedura condotta mediante l'ausilio dell'algoritmo DE-S. La notazione adottata è la medesima descritta per la funzione benchmark 1.

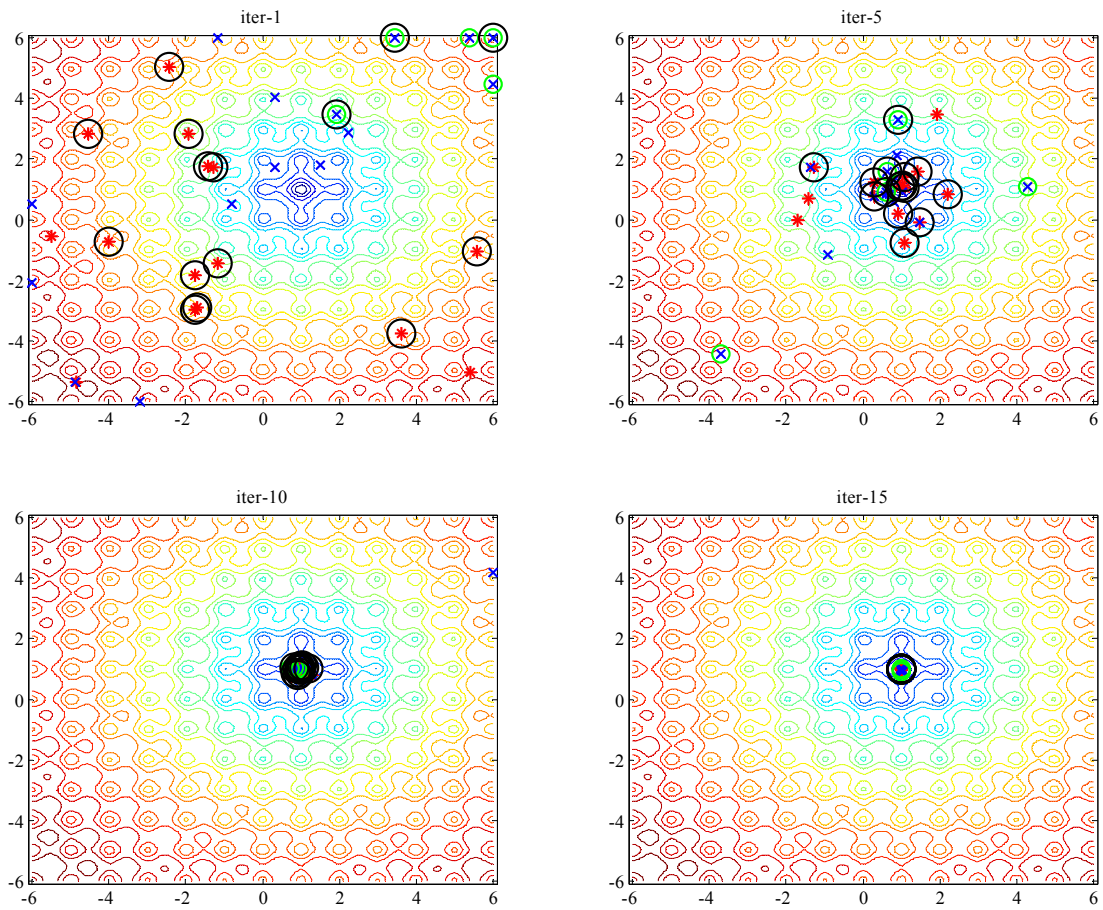


Figura 5.6: Funzione benchmark 2 - individuazione dei punti in cui è valutata la funzione obiettivo durante la procedura di ottimizzazione - algoritmo DE-S.

5.2 IDENTIFICAZIONE DI UN TELAIO A TRE PIANI E SINGOLA CAMPATA

L'algoritmo DE-S proposto è stato testato per la risoluzione di un semplice problema d'identificazione dinamica di un modello numerico di un telaio a tre piani e singola campata in cemento armato, considerando come riferimento i valori esatti delle frequenze proprie. I risultati sono stati confrontati con quelli analoghi ottenuti mediante altri algoritmi evolutivi studiati.

Il telaio è assimilato alla tipologia shear-type ed è costituito da due colonne di sezione 30x45 cm² e da travi infinitamente rigide. Il modulo elastico del calcestruzzo è fissato ad un valore di 30000 MPa, mentre i valori di massa di piano sono scelti pari a 41000 kg per il primo piano e 16000 kg per il secondo ed il terzo piano. Il primo impalcato è posto ad una quota di 4.1 m dalla sezione incastrata; l'altezza di interpiano dei piani superiori è pari a 2.4 metri e 2.8 metri. Effettuando un'analisi modale della struttura, si ottengono le seguenti frequenze proprie ($\omega_1 = 2.794$ Hz; $\omega_2 = 10.23$ Hz e $\omega_3 = 20.00$ Hz) e le deformate modali corrispondenti. Le caratteristiche modali così determinate rappresentano la soluzione di riferimento nei processi di ottimizzazione condotti. Le caratteristiche geometriche e meccaniche del telaio sono riportate in Tabella 5.4.

Lo scopo di questo semplice problema di identificazione parametrica è quello di studiare un problema meccanico facilmente controllabile; pertanto, sono stati scelti due soli parametri incogniti, la massa e l'altezza del primo impalcato, in modo da poter visualizzare l'andamento della funzione obiettivo attraverso curve di livello. Per ciascun parametro incognito è stato individuato un intervallo significativo dal punto di vista fisico in modo da limitare la ricerca. In particolare, sono stati fissati vincoli alla massa complessiva dei primi due piani e alla somma delle altezze dei primi due piani secondo la relazione:

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= 57000 \text{ kg} \\ H_1 + H_2 &= 6500 \text{ mm} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pertanto, la massa del primo impalcato è stata ricercata nell'intervallo [5000 kg, 55000 kg], mentre l'altezza del primo piano nell'intervallo [1.3 m, 4.8 m]. Per convenienza numerica, all'interno della procedura di ottimizzazione si ricercano valori normalizzati dei

	Massa di piano, M [kg]	Sezione dei pilastri [mm ²]	Altezza, di interpiano, H [m]
Impalcato 1	41000	300x450	4100
Impalcato 2	16000	300x450	2400
Impalcato 3	16000	300x450	2800

Tabella 5.4: Identificazione telaio a tre piani - caratteristiche geometriche e meccaniche del telaio.

parametri all'interno dell'intervallo $[-1, +1]$; in questi termini la soluzione ricercata è $(+0.60, +0.438)$ corrispondente alla coppia di valori $(2.4 \text{ m}, 16000 \text{ kg})$.

Definizione della funzione obiettivo

Come già anticipato la definizione della funzione obiettivo da minimizzare condiziona il processo di identificazione, rendendo più o meno regolare la funzione stessa e accentuando o meno zone con bassa sensitività ai parametri ricercati. In questo problema, la funzione obiettivo può essere definita come la somma degli errori relativi fra frequenze numeriche e di riferimento, secondo quanto riportato nelle espressione seguente:

$$H = \sum_{i=1}^N \cdot \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2, \quad (5.2)$$

oppure come somma degli errori relativi in termini non solo di frequenza ma anche di deformate modali, come illustrato, ad esempio, nelle applicazioni del paragrafo 3.2 (equazione 3.3). Nell'equazione 5.2 N corrisponde al numero di modi propri della struttura, mentre ω_i e $\bar{\omega}_i$ rappresentano rispettivamente la frequenza propria ottenuta numericamente e di riferimento.

Anche se l'utilizzo congiunto di frequenze e forme modali nella definizione della funzione obiettivo risulta generalmente più appropriato [40] rispetto all'impiego delle sole frequenze, in questo problema si è scelto di non considerare le forme modali in modo da ottenere una funzione con più di un minimo e rendere la risoluzione del problema più complessa, ma controllabile dal punto di vista computazionale. Nel seguito si riportano per differenti valori di massa a altezza del primo impalcato le curve di livello della funzione obiettivo definita inizialmente considerando il contributo sia delle frequenze sia delle deformate modali (Figura 5.7a) e in secondo luogo escludendo gli errori in termini di deformata modale (Figura 5.7b). Si può notare come nel primo caso la funzione presenti un solo minimo ben definito, confermando il fatto che l'utilizzo delle componenti delle deformate modali riduce sensibilmente le incertezze del processo di identificazione. Nel secondo caso invece la funzione presenta tre minimi dei quali due locali. La presenza di minimi locali è dovuta al fatto che i due parametri incogniti influenzano in modo differente i modi propri della struttura e ciò comporta che in corrispondenza di distinte combinazioni di parametri si ottiene un valore limitato della funzione obiettivo.

Considerando come dati di input i valori esatti delle caratteristiche modali, la procedura di identificazione conduce ad un valore della funzione obiettivo nullo se si utilizzano i valori esatti dei parametri incogniti, a prescindere dalla definizione della funzione stessa. La dispersione attorno al valore esatto dei risultati ottenuti risolvendo un certo numero di volte il problema di ottimizzazione dipende dalla robustezza dell'algoritmo e dalla sensitività della funzione ai parametri da identificare.

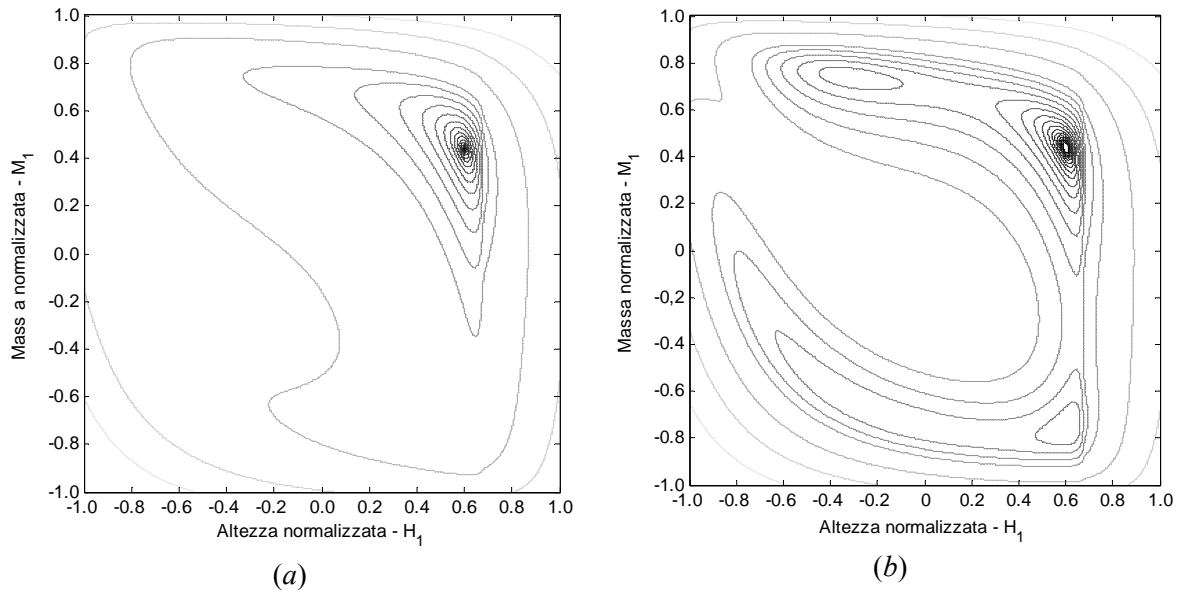


Figura 5.7: Identificazione telaio a tre piani - curva di livello della funzione obiettivo definita considerando il contributo delle frequenze e delle deformate modali (a) e curva di livello della funzione obiettivo definita considerando solo il contributo delle frequenze (b).

5.2.1 Risoluzione del problema di identificazione

In prima analisi gli algoritmi DE, DE-Q e DE-S sono stati adottati per condurre la procedura di identificazione dei due parametri descritti in precedenza: la massa in termini di densità equivalente e l'altezza del primo impalcato. La funzione obiettivo è stata definita considerando solo i valori esatti delle frequenze dei primi due modi di vibrare. In particolare, ciascun algoritmo è stato applicato per la risoluzione di un set di 2000 analisi

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	14
NH	5
NC	2
NS	8
itermax	500
F	0.85
CR	1.00
strategia	<i>rand</i>
w_{rL}	2/3
w_{dL}	1/3
w_{rG}	0
w_{dG}	1

Tabella 5.5: Identificazione telaio a tre piani - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

per cercare di effettuare una valutazione media della capacità degli algoritmi di identificare i valori attesi dei parametri incogniti. Per ogni analisi è stato fissato il numero di vettori della popolazione iniziale NP pari a 14, un numero massimo di iterazioni pari a 500, i limiti superiori associati al primo e al secondo criterio di convergenza VTR_1 e VTR_2 pari a 0.001 e 0.01, un numero di vettori NC sui quali effettuare il controllo di convergenza pari a 2. Le analisi sono state svolte considerando la strategia denominata *random*, fissando la costante F che controlla l'ampiezza dell'operazione di *Mutation* pari a 0.85 e la costante di *Crossover* pari a 1. Per gli algoritmi DE-Q e DE-S è stato scelto un numero di vettori NS per la calibrazione di ciascuna superficie di risposta pari a 8. Nel caso dell'algoritmo DE-S sono stati fissati il numero di nuove valutazioni (NH) ad ogni iterazione pari a 5 e il peso associato al criterio legato al valore stimato della funzione obiettivo pari a $2/3$ se la concavità del surrogato è positiva. In Tabella 5.5 sono elencati i parametri necessari per definire la procedura di ottimizzazione.

Nella Tabella 5.6 sono confrontati i risultati ottenuti adottando i tre algoritmi; sono riportati il valore medio e il coefficiente di variazione (CV%) associati a ciascuno dei 2 parametri e il numero medio di valutazioni totali necessarie per raggiungere la convergenza richiesta. Si può notare come tutti e tre gli algoritmi identificano perfettamente i parametri incogniti con coefficienti di variazione circa pari a 1%. Il numero complessivo di valutazioni della funzione obiettivo al termine delle procedure di ottimizzazione adottando l'algoritmo DE-Q risulta circa un quarto rispetto al numero totale di valutazioni necessarie applicando l'algoritmo DE; mentre si raggiunge un numero di valutazioni ancora inferiore considerando i risultati ottenuti con l'impiego dell'algoritmo DE-S (circa il 17% rispetto ai valori ottenuti con l'algoritmo DE). In tabella si riporta, per ciascun algoritmo, il numero di errori commessi nell'identificazione dei parametri incogniti sui 2000 test effettuati. Un test è stato considerato errato quando l'errore relativo su almeno un parametro è superiore a 5%. Si può notare come il numero di test errati è molto contenuto, attorno a 1% per gli algoritmi DE e DE-S, poco superiore al 2% per DE-Q. In questo problema, il fallimento di un'analisi corrisponde alla convergenza del processo nel minimo locale della funzione obiettivo.

		$x_1 = H_1$ [-]	$x_2 = M_1$ [-]	n. valutazioni [-]	n. errori [%]
DE	Valore medio	0.600	0.440	498.68	0.34
	CV%	0.62	1.41	15.03	-
DE-Q	Valore medio	0.600	0.438	133.19	2.36
	CV%	0.96	1.71	25.17	-
DE-S	Valore medio	0.600	0.438	87.39	1.10
	CV%	0.39	1.29	23.15	-

Tabella 5.6: Identificazione telaio a tre piani - analisi statistica dei risultati ottenuti adottando gli algoritmi DE, DE-Q e DE-S.

5.3 IDENTIFICAZIONE DEL DANNO IN UNA STRUTTURA DA PONTE IN SISTEMA MISTO ACCIAIO-CALCESTRUZZO

L'algoritmo DE-S proposto è stato poi applicato a un problema numerico d'identificazione del danno di un ponte a singola campata in struttura mista acciaio-calcestruzzo a partire da valori di riferimento esatti di frequenze e deformate modali.

Il ponte è costituito da una singola campata di lunghezza 30 metri e larghezza 12 metri. L'impalcato è realizzato con una soletta in calcestruzzo avente spessore costante di 300 mm con un incremento di peso in corrispondenza dei marciapiedi laterali corrispondente a ulteriori 300 mm. L'impalcato è sostenuto da due travi in acciaio con sezione a "I" di altezza pari a 1600 mm e larghezza di 600 mm, irrigidite da piastre in corrispondenza dell'anima. Nella direzione trasversale all'impalcato, le travi longitudinali sono collegate mediante controventi verticali e disposti a "X" costituiti da profili angolari accoppiati. Il comportamento dinamico della struttura è caratterizzato con un modello a elementi finiti costruito con elementi elastici lineari bidimensionali per le travi e la soletta dell'impalcato, monodimensionali per i controventi. In Figura 5.8 è riportata una sezione trasversale del ponte e il modello a elementi finiti della struttura.

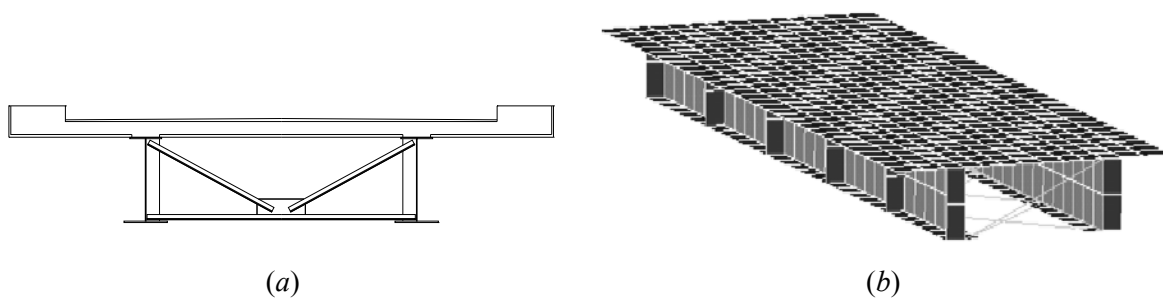


Figura 5.8: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - sezione trasversali (a) e modello FEM (b).

Definizione del problema di ottimizzazione

E' stato studiato un problema di ottimizzazione a 6 parametri del modello a elementi finiti del ponte, in cui il danno strutturale è stato rappresentato in modo approssimato come riduzione del modulo elastico della soletta in calcestruzzo, per simulare la riduzione della rigidezza flessionale dell'impalcato strutturale. I parametri incogniti sono pertanto i moduli di Young del calcestruzzo in diverse posizioni dell'impalcato. In particolare, il danno è stato modellato adottando le cosiddette *Damage Functions* [50] secondo le quali la riduzione di rigidezza è definita attraverso un modello con un limitato numero di parametri da ottimizzare. L'identificazione del danno attraverso la calibrazione di un modello a

elementi finiti e l'utilizzo congiunto delle *Damage Functions* costituiscono un approccio generale che permette di raggiungere una soluzione semplice e il più possibile realistica. Pertanto, con riferimento a tali funzioni, la soletta è stata suddivisa trasversalmente in 6 bande, ognuna delle quali ha associato un valore costante del modulo di Young del calcestruzzo, E_c (Figura 5.9a).

La combinazione ottimale dei parametri incerti del modello è stata ottenuta risolvendo un problema di ottimizzazione dove la funzione obiettivo è definita come differenza fra risultati numerici e di riferimento. Sono stati utilizzati come riferimento valori esatti di frequenze e deformate ottenuti mediante un'analisi modale sul modello a elementi finiti danneggiato. Generalmente, il danneggiamento di una struttura comporta variazioni della rigidezza con conseguente modifica delle caratteristiche dinamiche in termini di frequenze e deformate modali; pertanto si è scelto di confrontare, durante la procedura di ottimizzazione, le proprietà modali della struttura al variare dello stato di danneggiamento del ponte. Simulando quanto può essere ottenuto in test sperimentali di identificazione dinamica, si sono considerati valori di riferimento in termini di caratteristiche modali (frequenze e forme modali) della struttura. In particolare, per estrarre le componenti delle deformate modali del modello, sono stati considerati 12 punti di misura suddivisi in numero eguale in tre allineamenti in corrispondenza della sezione in mezzzeria e delle sezioni ai quarti (Figura 5.9b). Per ciascun allineamento sono stati scelti quattro punti di cui due in corrispondenza delle travi longitudinali e due alle estremità della soletta. Per ciascun punto si estraggono i valori di spostamento verticale e trasversale per ogni modo di vibrare. La soluzione di riferimento del problema d'identificazione è stata ottenuta considerando due bande danneggiate con un ridotto modulo di elasticità e quattro bande non danneggiate. Il dominio di ricerca dei parametri incerti è stato definito nell'intervallo $E_C = [0.7 \cdot 10^4 \text{ MPa}, 4.2 \cdot 10^4 \text{ MPa}]$. Per convenienza numerica durante la procedura di ottimizzazione, per tutti i parametri incogniti sono stati considerati i valori normalizzati all'unità, pertanto l'intervallo in cui ricercare la soluzione è così definito $[-1, +1]$. La soluzione di riferimento prevede un valore del modulo di Young non danneggiato E_{Cud} uguale a $3.5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ e un valore del modulo danneggiato E_{Cd} pari a $2.1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, che corrisponde al 40% del valore non danneggiato. Il vettore normalizzato all'unità dei parametri di riferimento è $\mathbf{x}^* = (-0.2, -0.2, 0.6, 0.6, 0.6, 0.6)$.

Ad ogni iterazione del processo, si individuano differenti combinazioni di parametri; per ciascuna combinazione si attribuiscono i parametri al modello a elementi finiti e successivamente si effettua un'analisi modale. I modi propri individuati numericamente e quelli di riferimento si accoppiano utilizzando il *MAC* e si calcola un valore della funzione obiettivo. La funzione obiettivo H da minimizzare durante la procedura d'identificazione è stata definita come l'errore relativo tra frequenze e deformate modali ottenute adottando

una generica combinazione di parametri nel modello a elementi finiti (ω_i, Φ_i) e la soluzione di riferimento $(\bar{\omega}_i, \bar{\Phi}_i)$, cioè

$$H(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \left[w_1 \left(\frac{\omega_i - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}_i} \right)^2 + w_2 NMD_i^2 \right] \quad (5.3)$$

dove N è il numero di modi propri considerati, w_1 e w_2 sono i pesi associati rispettivamente alla componente di errore in termini di frequenze e a quella relativa alle deformate modali, \mathbf{x} è il vettore dei parametri incerti e NMD è il cosiddetto *Normalized Modal Difference* definito come

$$NMD_i = \sqrt{\frac{1 - MAC(\Phi_i, \bar{\Phi}_i)}{MAC(\Phi_i, \bar{\Phi}_i)}}. \quad (5.4)$$

Cinque modi propri sono stati utilizzati come riferimento nella procedura di ottimizzazione (si faccia riferimento alle deformate modali riportate in Figura 5.10): i primi due modi flessionali, i primi due modi torsionali e un modo locale che coinvolge solo la soletta dell'impalcato. Le frequenze di riferimento associate ai modi considerati sono riportate in Tabella 5.7. Infine, in Tabella 5.8 sono riportati i parametri da impostare per garantire un corretto funzionamento degli algoritmi impiegati nelle procedure di ottimizzazione. In particolare, il numero di punti NP per ciascuna popolazione è fissato pari a 40, il numero di punti NS necessari per calibrare una generica superficie di risposta è posto pari a 16 e il numero NH di nuovi punti in cui valutare la funzione obiettivo per ciascuna iterazione è scelto pari a 10. I pesi da assegnare ai criteri per l'assegnazione del punteggio ai candidati per le nuove valutazioni sono fissati $w_{dL} = 1/15$ e $w_{rL} = 14/15$ nel caso di *local exploitation*. Le costanti da assegnare ai criteri di convergenza sono fissate $VTR_1 = 10^{-3}$ e $VTR_2 = 10^{-2}$.

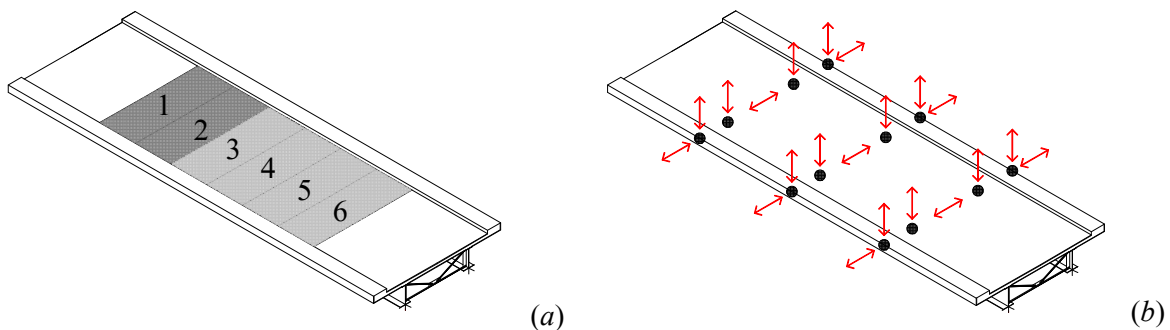


Figura 5.9: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - modello FEM, configurazione di riferimento (a) e disposizione dei punti per la definizione delle deformate modali (b).

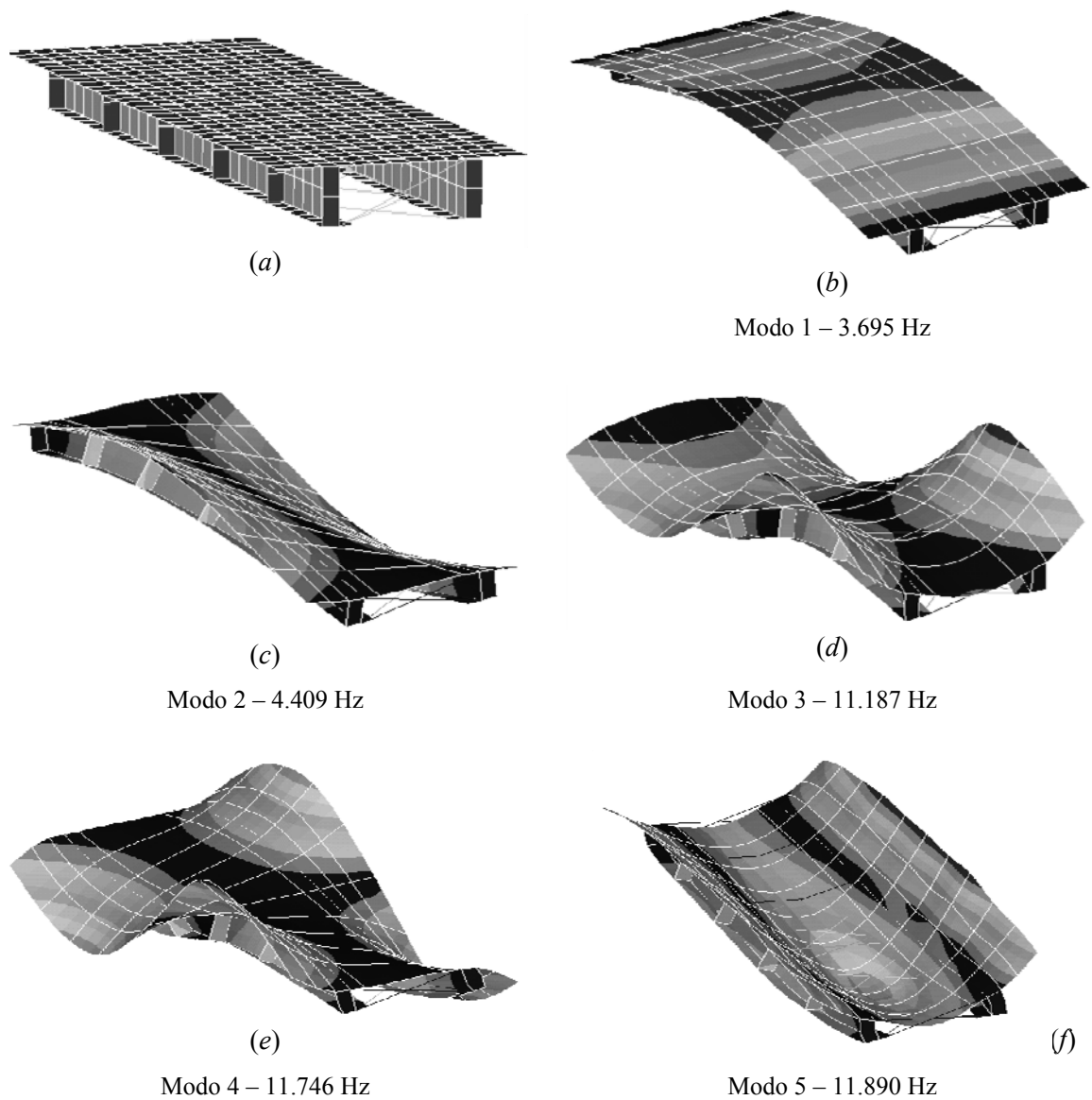


Figura 5.10: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - modello FEM in configurazione indeformata (a) e modi propri della struttura considerati come riferimento nella procedura di ottimizzazione (b-f).

N. modo	Freq. rif. [Hz]	Freq. num. [Hz]	Err. [%]	MAC [%]
1	3.695	3.695	$+0.99 \cdot 10^{-4}$	100.0
2	4.409	4.409	$+0.72 \cdot 10^{-4}$	100.0
3	11.187	11.187	$-3.93 \cdot 10^{-4}$	99.9
4	11.746	11.746	$+2.64 \cdot 10^{-4}$	99.9
5	11.890	11.890	$+2.17 \cdot 10^{-4}$	99.9

Tabella 5.7: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - confronto fra frequenze numeriche e di riferimento.

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	40
NH	10
NC	3
NS	16
itermax	1000
F	0.60
CR	0.50
strategia	rand
w_{rL}	14/15
w_{dL}	1/15
w_{rG}	0
w_{dG}	1

Tabella 5.8: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

5.3.1 Risultati del problema di ottimizzazione

I risultati ottenuti applicando l'algoritmo DE-S sono confrontati con quelli determinati impiegando l'algoritmo DE-Q. I valori della funzione obiettivo assunti durante il processo di ottimizzazione sono mostrati in Figura 5.11 e Figura 5.12, rispettivamente adottando come approssimazione della funzione un surrogato quadratico in forma completa e in forma ridotta. Per costruire una superficie di risposta quadratica in forma completa individuando i parametri del surrogato attraverso il metodo dei minimi quadrati è necessario un numero ridondante di valutazioni della funzione obiettivo. Per velocizzare le analisi si è tentato di considerare un surrogato quadratico in forma ridotta eliminando i termini misti nella formulazione della superficie approssimante in modo da limitare lo sforzo computazionale per la calibrazione del surrogato stesso.

Si può notare come la velocità di convergenza dell'algoritmo DE-S è significativamente superiore rispetto all'algoritmo DE-Q; in particolare, dopo circa 500 (1500 se si considera un surrogato quadratico in forma ridotta) valutazioni il valore della funzione obiettivo raggiunto con l'algoritmo DE-S risulta un ordine di grandezza inferiore (circa la metà se si considera un surrogato quadratico in forma ridotta) di quello ottenuto con l'algoritmo DE-Q. Il numero di valutazioni necessarie per raggiungere la convergenza nel caso si adotti un surrogato quadratico in forma ridotta è dunque superiore rispetto al numero individuato considerando un surrogato quadratico in forma completa. Pertanto, in questo caso se si adotta un surrogato quadratico in forma ridotta, si limita lo sforzo computazionale per la calibrazione del modello approssimante, ma sono necessarie più valutazioni per raggiungere la convergenza richiesta. In Tabella 5.7 si riporta il confronto fra i risultati numerici e di riferimento in termini di errore relativo e valori dell'indice MAC.

Si può notare come le frequenze numeriche sono pressoché coincidenti con quelle di riferimento. Inoltre, si mostra una quasi perfetta correlazione tra le deformate modali numeriche e di riferimento con valori dell'indice MAC > 0.99.

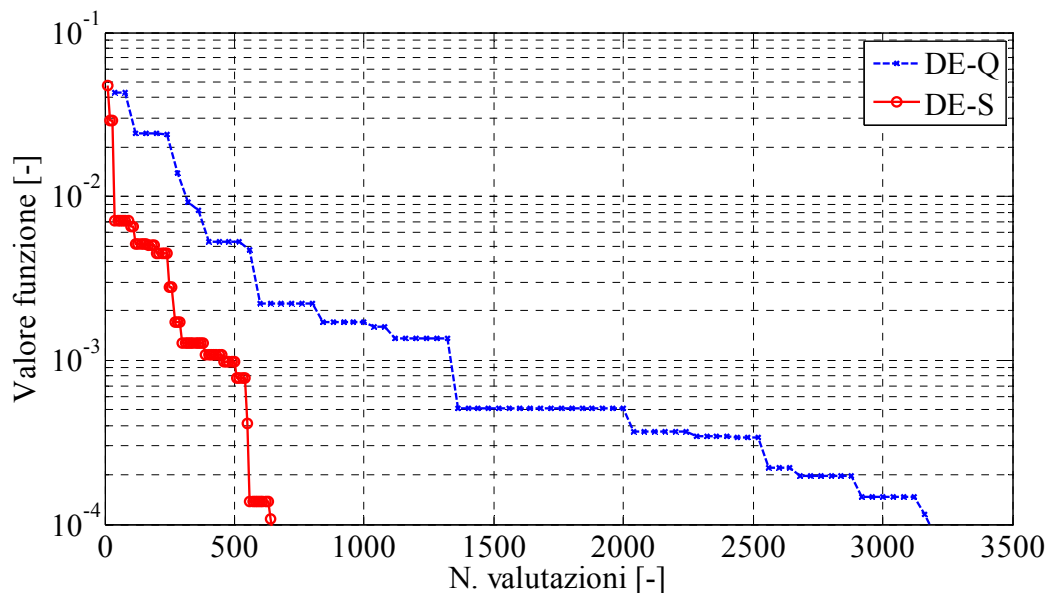


Figura 5.11: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - valori assunti dalla funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni (surrogato quadratico in forma completa).

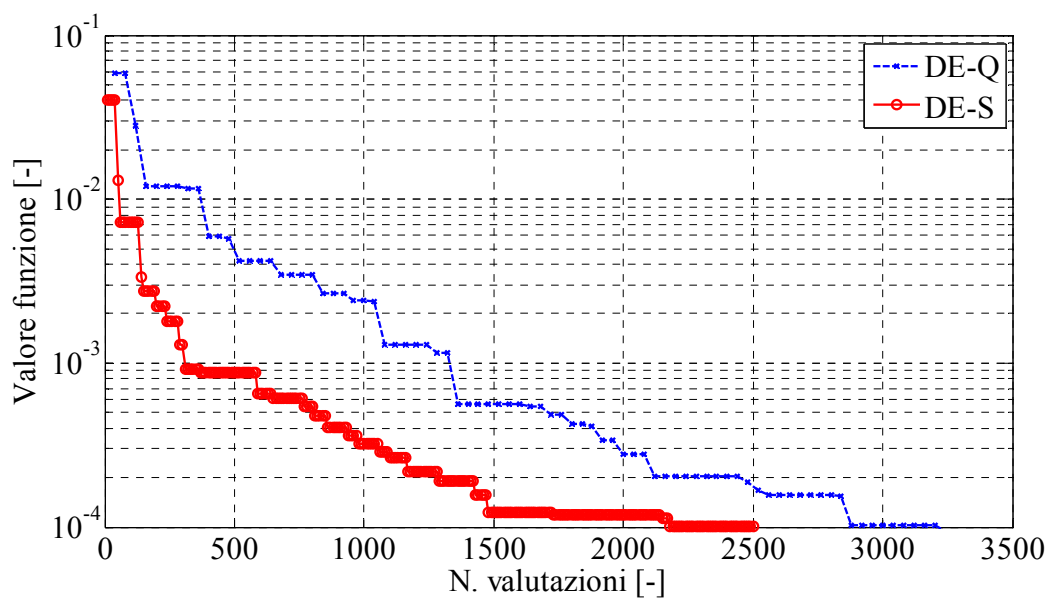


Figura 5.12: Ponte in struttura mista acciaio-calcestruzzo - valori assunti dalla funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni (surrogato quadratico in forma ridotta).

5.4 CALIBRAZIONE DI LEGAMI COSTITUTIVI DI CALCESTRUZZI FIBRORINFORZATI

Di seguito si riporta il confronto fra i risultati ottenuti applicando l'algoritmo DE-Q e DE-S a problemi di calibrazione di leggi costitutive di elementi in calcestruzzo fibrorinforzato. L'obiettivo è di testare le prestazioni dell'algoritmo proposto per un problema complesso in cui si considerano come riferimento risultati sperimentali e non è nota a priori la forma della funzione obiettivo. Inoltre il problema è articolato in quanto per descrivere il comportamento reale degli elementi strutturali in FRC è necessario effettuare una modellazione accurata dei provini e impiegare leggi costitutive dei materiali non lineari con comportamento degradante. Ciò comporta una complessità e un'onerosità computazionale non trascurabile. Con riferimento alla trattazione completa riportata al paragrafo 3.3, sono stati selezionati un test per un provino prismatico in FRC e un test per una lastra circolare in FRC.

Confronto fra i risultati ottenuti applicando algoritmi evolutivi per la calibrazione di leggi costitutive di travetti in FRC

Gli algoritmi DE-Q e DE-S sono stati impiegati per la calibrazione della legge costitutiva di un provino prismatico in FRC costituito da una miscela di calcestruzzo e fibre macro-sintetiche con un dosaggio di 4.8 kg/m^3 . La funzione obiettivo è stata definita in modo analogo a quanto effettuato per i test del paragrafo 3.3, così anche per quanto riguarda la definizione dei range dei parametri incogniti. In Tabella 5.9 sono riportati i parametri da impostare per garantire un corretto funzionamento degli algoritmi impiegati nelle procedure di ottimizzazione. In particolare, il numero di punti NP per ciascuna popolazione è stato fissato pari a 25, il numero di punti NS necessari per calibrare una generica superficie di risposta è stato posto pari a 19 e il numero NH di nuovi punti in cui valutare la funzione obiettivo per ciascuna iterazione è stato scelto pari a 5. I pesi da assegnare ai criteri per l'assegnazione del punteggio ai candidati per le nuove valutazioni sono stati fissati $w_{dL} = 1/3$ e $w_{rL} = 2/3$ nel caso di *local exploitation*. Le costanti da assegnare ai criteri di convergenza sono state fissate $VTR_1 = 10^{-3}$ e $VTR_2 = 10^{-2}$.

I risultati sono rappresentati in Figura 5.13 in termini di valori assunti dalla funzione all'avanzare della procedura. Per ciascun algoritmo è stata ripetuta la procedura di ottimizzazione 10 volte in modo tale da ottenere una rappresentazione statistica dei risultati. Nella figura si riportano le linee di inviluppo superiori e inferiori per ciascun algoritmo. Si può notare un significativo incremento della velocità di convergenza dell'algoritmo DE-S rispetto all'algoritmo DE-Q: per un fissato numero di valutazioni, il valore assunto dalla funzione considerando l'algoritmo DE-S è inferiore rispetto all'algoritmo DE-Q ad eccezione delle prime fasi del processo.

VTR_1	0.001
VTR_2	0.01
NP	25
NH	5
NC	2
NS	19
$iter_{max}$	30
F	0.6
CR	0.5
strategia	random
w_{rL}	2/3
w_{dL}	1/3
w_{rG}	0
w_{dG}	1

Tabella 5.9: Calibrazione di una legge costitutiva per provini prismatici in FRC - fibre macrosintetiche, 4.8 kg/m^3 - confronto algoritmo DE-S e DE-Q - parametri per la gestione del processo di ottimizzazione.

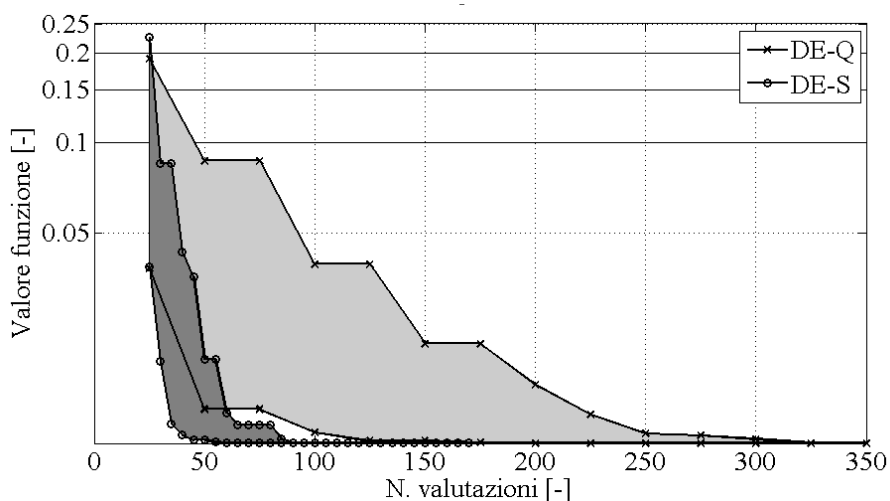


Figura 5.13: Calibrazione di una legge costitutiva per provini prismatici in FRC - fibre macrosintetiche, 4.8 kg/m^3 - confronto fra gli algoritmi DE-S e DE-Q in termini di valori assunti della funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni.

Confronto fra i risultati ottenuti applicando algoritmi evolutivi per la calibrazione di leggi costitutive di lastre circolari in FRC

Sono state confrontate le prestazioni degli algoritmi DE-Q e DE-S per la calibrazione della legge costitutiva della terza lastra circolare in FRC a disposizione di diametro 800 mm, realizzata durante le prove di laboratorio con la miscela descritta al paragrafo 3.3. La funzione obiettivo è stata definita trascurando i contributi legati alle curve forza-freccia e considerando la curva forza-CMOD completa.

Per la risoluzione del problema, il numero di punti NP per ciascuna popolazione è stato fissato pari a 25, il numero di punti NS necessari per calibrare una generica superficie di risposta è stato posto pari a 19 e il numero NH di nuovi punti in cui valutare la funzione obiettivo per ciascuna iterazione è stato scelto pari a 5. I pesi da assegnare ai criteri per l'assegnazione del punteggio ai candidati per le nuove valutazioni sono stati fissati $w_{dL} = 1/3$ e $w_{rL} = 2/3$ nel caso di *local exploitation*. Le costanti da assegnare ai criteri di convergenza sono state fissate $VTR_1 = 10^{-3}$ e $VTR_2 = 10^{-2}$.

In Figura 5.14a, b si riporta il confronto fra la curva sperimentale (colore nero) in termini di forza-CMOD e le curve numeriche determinate in seguito alle analisi effettuate applicando l'algoritmo DE-Q (colore blu) e DE-S (colore rosso). Si può notare una buona aderenza fra le due curve numeriche per tutto lo sviluppo e fra le curve numeriche e la curva sperimentale soprattutto per quanto riguarda il ramo degradante, mentre in prossimità del picco la corrispondenza fra le curve è inferiore. In Figura 5.14c si riporta il confronto fra l'andamento della funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni per entrambi gli algoritmi. Si può notare che le prestazioni dell'algoritmo DE-S sono superiori; in particolare, già dopo circa 50 valutazioni si raggiungono valori della funzione molto limitati (dell'ordine di 10^{-3}), mentre per ottenere valori paragonabili sono necessarie più di 100 valutazioni della funzione per l'algoritmo DE-Q. Pertanto, anche affrontando un problema più complesso e considerando come riferimento risultati sperimentali l'algoritmo proposto conserva delle prestazioni molto buone rispetto alle versioni precedenti dell'algoritmo. In Tabella 5.10 si riportano i parametri individuati adottando i due algoritmi distintamente, i valori associati della funzione obiettivo, il numero di valutazioni necessarie per raggiungere la convergenza e gli errori relativi ottenuti confrontando i valori dei parametri. Si può notare che gli errori sono limitati: inferiori a 1% per i primi tre parametri, mentre per il terzo l'errore cresce a 1.86%.

algoritmo	f_{ct} [MPa]	$\sigma_w(w_1)$ [MPa]	w_1 [mm]	w_2 [mm]	H [-]	n. valutazioni [-]
DE-Q	2.0142	0.6953	0.1604	5.5837	$6.18 \cdot 10^{-3}$	550
DE-S	2.0245	0.6886	0.1596	5.6877	$6.27 \cdot 10^{-3}$	257

Tabella 5.10: Calibrazione di una legge costitutiva per lastre circolari in FRC - fibre macro-sintetiche, 4.8 kg/m^3 - confronto algoritmo DE-S e DE-Q - parametri individuati in seguito alle procedure di ottimizzazione.

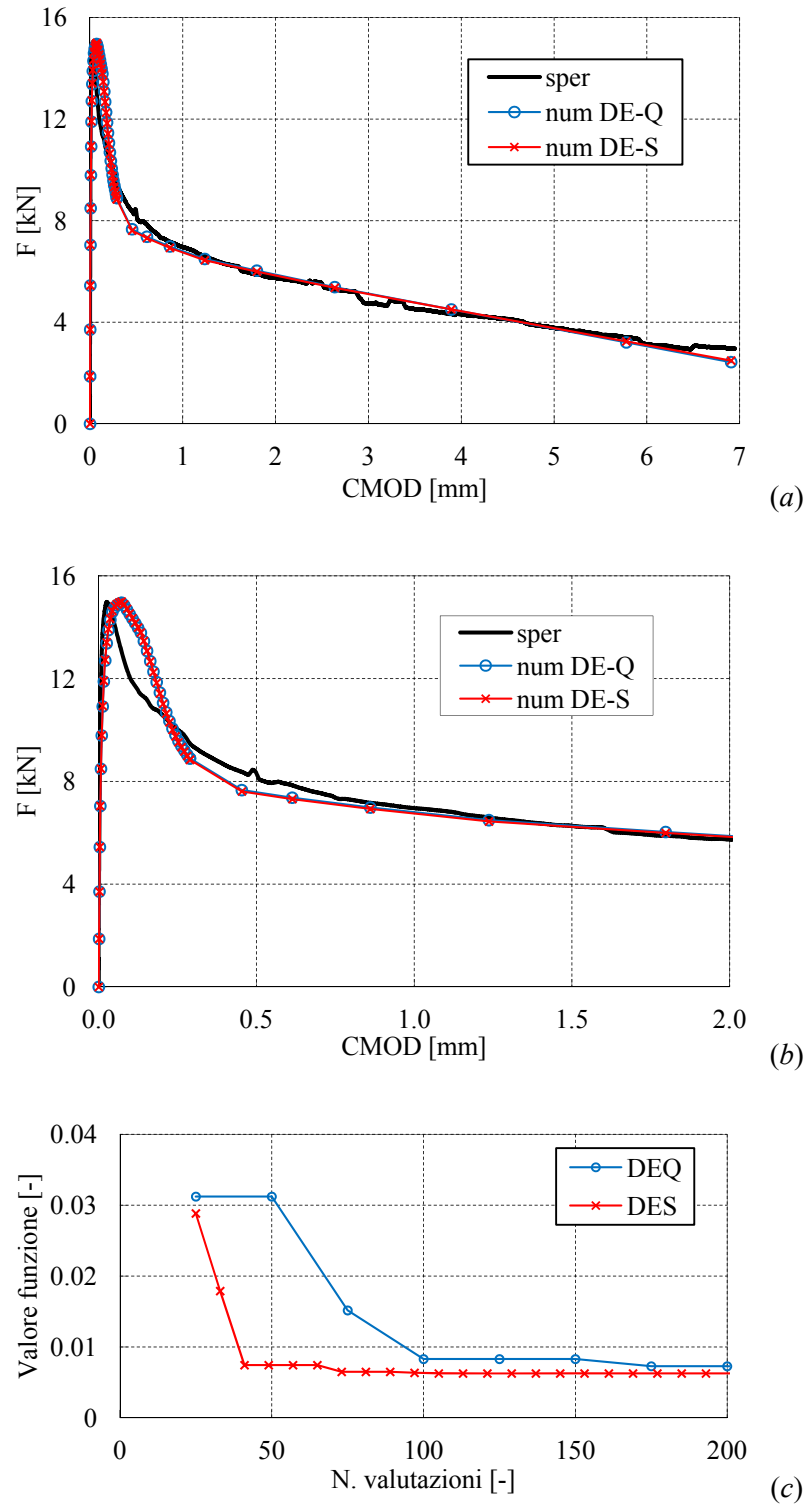


Figura 5.14: Calibrazione di una legge costitutiva per lastre circolari in FRC - fibre macro-sintetiche, 4.8 kg/m^3 - confronto algoritmo DE-S e DE-Q - (a, b) confronto fra la curva sperimentale completa forza-CMOD (colore nero) e le curve numeriche ottenute applicando l'algoritmo DE-Q (colore blu) e DE-S (colore rosso) e (c) confronto fra l'andamento del valore della funzione obiettivo al variare del numero di valutazioni per l'algoritmo DE-Q e DE-S.

CONCLUSIONI

In questo elaborato di tesi è stato proposto e sviluppato un algoritmo di ottimizzazione basato su un algoritmo evolutivo con il supporto di un surrogato quadratico per ridurre l'onere computazionale necessario per la calibrazione di modelli numerici complessi in ambito civile. La necessità di avere una procedura di ottimizzazione basata su un algoritmo efficace ed efficiente è dovuta al fatto che le funzioni obiettivo per la calibrazione di modelli numerici a elementi finiti sono definite implicitamente, non sono regolari e possono presentare più minimi locali. Inoltre, una singola valutazione della funzione può essere anche molto onerosa dal punto di vista computazionale a causa della risoluzione del problema agli elementi finiti soprattutto se il modello è complesso o deve simulare comportamenti non lineari delle strutture.

L'attività di ricerca condotta ha portato allo sviluppo di un algoritmo evolutivo di ottimizzazione denominato DE-S che garantisce di evitare la convergenza in minimi locali e permette di raggiungere la soluzione del problema con un numero limitato di valutazioni della funzione. L'algoritmo combina la robustezza di un classico algoritmo evolutivo con l'efficienza computazionale di un surrogato quadratico; inoltre, un'opportuna strategia per selezionare i punti in cui valutare la funzione durante l'avanzamento della procedura di ottimizzazione appositamente studiata e messa a punto permette di ridurre lo sforzo computazionale, non perdendo accuratezza dei risultati né aumentando significativamente la complessità computazionale dell'algoritmo.

Nella prima parte dell'elaborato, sono mostrati i risultati ottenuti su test effettuati applicando l'algoritmo DE-Q [14], che combina il tradizionale algoritmo evolutivo DE con un surrogato quadratico. In particolare, l'algoritmo studiato è stato adottato per risolvere problemi di calibrazione di modelli numerici rappresentanti strutture al vero (passerelle pedonali, ponti stradali) considerando come riferimento risultati sperimentali ottenuti in seguito a campagne di monitoraggio e problemi d'identificazione di leggi costitutive di provini in calcestruzzo fibrorinforzato considerando come riferimento test di laboratorio. Per tutti i casi affrontati sono state individuate le soluzioni ai problemi di ottimizzazione raggiungendo una buona corrispondenza fra risultati numerici e sperimentali, in termini di errori in frequenza e di stima delle deformate modali per i problemi di ottimizzazione dei modelli numerici e in termini di corrispondenza fra valori numerici e sperimentali per i problemi di valutazione del comportamento post-fessurativo di provini in FRC soggetti a prove di carico monotone.

L'algoritmo DE-S proposto nasce dalla combinazione fra l'algoritmo DE-Q con una strategia di selezione dei nuovi punti in cui valutare la funzione obiettivo, con lo scopo di ridurre ulteriormente l'onere computazionale dei processi di ottimizzazione. La strategia è definita cercando di bilanciare la ricerca locale (*local exploitation*) e globale (*global exploration*); in altre parole, garantendo sia l'esplorazione di tutto il dominio di definizione dei parametri sia concentrando la ricerca nelle zone in cui il surrogato presenta un minimo. L'algoritmo DE-S è in grado di ridurre fortemente l'onere computazione complessivo per la calibrazione dei modelli numerici. In particolare, l'algoritmo assegna un punteggio a ciascun candidato considerando due criteri: il primo dipende dal valore della funzione obiettivo stimato dal surrogato, mentre il secondo dipende dalle distanze del candidato dai punti già valutati dall'inizio della procedura.

L'analisi di sensitività effettuata ha permesso di valutare l'influenza di alcuni parametri che governano l'algoritmo DE-S sull'accuratezza dei risultati e sull'efficienza della procedura. Sono stati considerati problemi di ricerca del minimo globale di due differenti funzioni benchmark che presentano più minimi locali. In seguito ad una serie di analisi variando il numero NH di nuove valutazioni e il numero NP di componenti della popolazione iniziale è stato definito un numero ottimale di nuove valutazioni da effettuare ad ogni iterazione, pari a circa un terzo di NP . Il valore proposto permette di limitare il numero complessivo di valutazioni, mantenendo minimo il numero medio di errori, valutato considerando simulazioni di Montecarlo. Inoltre, si è mostrata una limitata variabilità del numero complessivo di valutazioni al variare dei pesi associati ai criteri per la definizione dei punteggi da assegnare ai candidati; ciò a dimostrazione della robustezza dell'algoritmo che non risulta particolarmente influenzato dal valore dei parametri caratterizzanti la procedura.

Sono state confrontate le prestazioni dell'algoritmo sviluppato DE-S rispetto a quelle degli altri algoritmi studiati (DE e DE-Q), affrontando problemi di ottimizzazione di differente natura e complessità: ricerca del minimo globale di funzioni benchmark, problemi d'identificazione dinamica di una struttura a telaio e di un ponte a singola campata considerando come riferimento valori numerici esatti, problemi di calibrazione del comportamento post-fessurativo di travetti e lastre circolari in FRC utilizzando come riferimento prove sperimentali di laboratorio. In alcuni di questi problemi, sono state considerate formulazioni diverse per la definizione della funzione obiettivo in modo da valutare quanto il processo di ottimizzazione ne risultasse influenzato. In generale, i risultati mostrano un significativo miglioramento in termini di velocità di convergenza dell'algoritmo DE-S rispetto agli altri algoritmi, in quanto esso necessita di un numero inferiore di valutazioni della funzione per raggiungere la convergenza richiesta. In particolare, il numero di valutazioni necessarie considerando l'algoritmo DE-S si riduce oltre la metà rispetto all'algoritmo DE-Q e di circa 6 o 7 volte considerando l'algoritmo

originario DE. L'algoritmo sviluppato, oltre a raggiungere la convergenza con numero di valutazioni notevolmente inferiore rispetto a quanto richiesto dagli altri algoritmi considerati, garantisce una stima accurata della soluzione. Infatti, l'analisi statistica dei risultati sui vari casi studio ha mostrato che il numero di test falliti in una batteria di 5000 analisi ripetute è paragonabile a quello ottenuto per gli altri algoritmi considerati.

Come sviluppo futuro, potrebbero essere effettuati ulteriori miglioramenti all'architettura dell'algoritmo DE-S con lo scopo di rendere ancora più efficiente ed efficace la procedura. Ad esempio si potrebbe intervenire ulteriormente sulla strategia di selezione dei candidati per le successive valutazioni. Quando il surrogato presenta un minimo, potrebbero essere introdotti ulteriori punti di ricerca, ottenuti perturbando il vettore associato al minimo. Inoltre, sarebbe interessante definire un criterio per modificare il numero di nuove valutazioni da effettuare ad ogni iterazione. Una prima proposta prevede nuove valutazioni in corrispondenza dei candidati a cui è associato un punteggio inferiore ad una soglia fissata, calcolata ad esempio considerando la distribuzione statistica dei pesi oppure dei valori assunti dai parametri o dalla funzione obiettivo. La soglia risulterebbe dunque variabile all'avanzare della procedura, in modo da selezionare un numero significativo di candidati nella fase iniziale in cui generalmente si tende ad esplorare il dominio di definizione dei parametri e ridurre il numero di valutazioni nelle fasi successive in cui si predilige la ricerca locale. Infine, l'introduzione di un punteggio basato sull'*Expected Improvement* potrebbe contribuire ad una ulteriore riduzione del numero di valutazioni.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Moré JJ, Wright SJ. Optimization Software Guide: Society for Industrial and Applied Mathematics; 1993.
- [2] Keane A, Nair P. Computational approaches for aerospace design: the pursuit of excellence: John Wiley & Sons; 2005.
- [3] Holland JH. Adaptation in natural and artificial systems: MIT Press; 1992.
- [4] Titurus B, Friswell MI, Starek L. Damage detection using generic elements: part I. Model updating. Computers and Structures 2003;81:2273–86.
- [5] Goldberg DE. Genetic algorithms in search, optimization and machine learning: Addison-Wesley; 1989.
- [6] Jin Y. Surrogate-assisted evolutionary computation: Recent advances and future challenges. Swarm and Evolutionary Computation 2011;1:61-70.
- [7] Mueller J, Shoemaker CA, Piche RA. SO-MI: Surrogate Model Algorithm for Computationally Expensive Nonlinear Mixed-Integer, Black-Box Global Optimization Problems. Computers and Operations Research 2013;40:1383-400.
- [8] Zongzhao Z, Yew Soon O, Nair PB, Keane AJ, Kai Yew L. Combining Global and Local Surrogate Models to Accelerate Evolutionary Optimization. Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on 2007;37:66-76.
- [9] Jones DR. A Taxonomy of Global Optimization Methods Based on Response Surfaces. Journal of Global Optimization 2001;21:345-83.
- [10] Forrester A, Sobester A, Keane A. Engineering Design via Surrogate Modelling: A Practical Guide: Wiley; 2008.
- [11] Buche D, Schraudolph NN, Koumoutsakos P. Accelerating evolutionary algorithms with Gaussian process fitness function models. Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on 2005;35:183-94.
- [12] Emmerich MTM, Giannakoglou KC, Naujoks B. Single- and multiobjective evolutionary optimization assisted by Gaussian random field metamodells. Evolutionary Computation, IEEE Transactions on 2006;10:421-39.
- [13] Storn R, Price K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. Journal of Global Optimization 1997;11:341-59.

[14] Vincenzi L, Savoia M. Coupling Response Surface and Differential Evolution for Parameter Identification Problems. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 2015;30:376-93.

[15] Rao SS. *Engineering Optimization: Theory and Practice*: Wiley; 1996.

[16] Nocedal J, Wright S. *Numerical Optimization*: Springer New York; 2000.

[17] Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP. Optimization by Simulated Annealing. *Science* 1983;220:671-80.

[18] Levin RI, Lieven NAJ. Dynamic finite element model updating using simulated annealing and genetic algorithms. *Mechanical Systems and Signal Processing* 1998;12:91-120.

[19] Vincenzi L. Identificazione dinamica delle caratteristiche modali e delle proprietà meccaniche di strutture mediante algoritmi di ottimizzazione. *Tesi di Dottorato: Università degli Studi di Bologna*; 2007.

[20] Box GEP, Draper NR. *Empirical model-building and response surfaces*: Wiley; 1987.

[21] Box GEP, Winson KB. On the experimental attainment of optimum conditions. *J R Statist Soc* 1951;Series B, 13:1-45.

[22] Myers RH, Montgomery DC. *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*. New York: John Wiley & Sons; 1995.

[23] Fang SE, Perera R. Damage identification by response surface based model updating using D-optimal design. *Mechanical Systems and Signal Processing* 2011;25:717-33.

[24] Khuri A, Cornell JA. *Response surfaces. Designs and analyses*. New York: Marcel Dekker Inc.; 1996.

[25] Kaymax I, McMahon CA. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis. *Probabilistic Engineering Mechanics* 2005;20:11-7.

[26] Grefenstette JJ, Fitzpatrick JM. Genetic Search with Approximate Function Evaluation. *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*: L. Erlbaum Associates Inc.; 1985. p. 112-20.

[27] Ratle A. Accelerating the Convergence of Evolutionary Algorithms by Fitness Landscape Approximation. *Proceedings of the 5th International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*: Springer-Verlag; 1998. p. 87-96.

[28] Tenne Y, Goh C-K. *Computational Intelligence in Expensive Optimization Problems*: Springer Publishing Company, Incorporated; 2010.

[29] Bach F, Jenatton R, Mairal J, Obozinski G. Optimization with sparsity-inducing penalties. *Foundations and Trends in Machine Learning* 2011;4:1-106.

-
- [30] Cherkassky VS, Mulier F. Learning from Data: Concepts, Theory, and Methods: John Wiley & Sons, Inc., Chichester; 1998.
- [31] Vapnik VN. Statistical learning theory: John Wiley & Sons, Inc., New York; 1998.
- [32] Lin TW, Wang CH. A hybrid genetic algorithm to minimize the periodic preventive maintenance cost in a series-parallel system. *Journal of Intelligent Manufacturing* 2012;23:1225-36.
- [33] Branke J, Schmidt C. Faster convergence by means of fitness estimation. *Soft Computing* 2003;9:13-20.
- [34] Emmerich M, Giotis A, Özdemir M, Bäck T, Giannakoglou K. Metamodel-Assisted Evolution Strategies. *Parallel problem solving from nature: LNCS Springer*; 2002. p. 361-70.
- [35] Filho FM, Gomide F. Fuzzy Clustering in Fitness Estimation Models for Genetic Algorithms and Applications. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems2006*. p. 1388-95.
- [36] Gutmann H-M. A Radial Basis Function Method for Global Optimization. *Journal of Global Optimization* 2001;19:201-27.
- [37] Regis R, Shoemaker C. A Stochastic Radial Basis Function Method for the Global Optimization of Expensive Functions. *INFORMS Journal on Computing* 2007;19:497-509.
- [38] Abboud K, Schoenauer M. Surrogate Deterministic Mutation: Preliminary Results. *Artificial Evolution: Springer Berlin Heidelberg*; 2002. p. 104-16.
- [39] Jin Y. A comprehensive survey of fitness approximation in evolutionary computation. *Soft Computing* 2003;9:3-12.
- [40] Savoia M, Vincenzi L. Differential evolution algorithm for dynamic structural identification. *Journal of Earthquake Engineering* 2008;12:800-21.
- [41] Vincenzi L, Bassoli E, Gambarelli P. Dynamic behaviour of a steel footbridge under pedestrian loads *Proceedings of the 11th International Conference on Vibration Problems. Lisbon2013*.
- [42] Ewins DJ. *Modal Testing, Theory, Practice, and Application: John Wley & Sons, New York; 2000*.
- [43] Bassoli E, Gambarelli P, Simonini L, Vincenzi L, Savoia M. Dynamic monitoring of the Pasternak footbridge using MEMS-based sensing system. *7th International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure. Turin, Italy2015*.
- [44] Savoia M, Vincenzi L, Bassoli E, Gambarelli P, Betti R, Testa R. Identification of the Manhattan bridge dynamic properties for fatigue assessment. *Safety, Reliability, Risk and Life-Cycle Performance of Structures and Infrastructures: CRC Press; 2014*. p. 4667-74
- [45] Buratti N, Mazzotti C, Savoia M. Post-cracking behaviour of steel and macro-synthetic fibre-reinforced concretes. *Construction and Building Materials* 2011;25:2713-22.

[46] Ciancio D, Mazzotti C, Buratti N. Evaluation of fibre-reinforced concrete fracture energy through tests on notched round determinate panels with different diameters. *Construction and Building Materials* 2014;52:86-95.

[47] Olesen J. Fictitious Crack Propagation in Fiber-Reinforced Concrete Beams. *Journal of Engineering Mechanics* 2001;127:272-80.

[48] Hillerborg A. Analysis of fracture by means of the fictitious crack model, particularly for fibre reinforced concrete. *International Journal of Cement Composites* 1980;2:177-84.

[49] Ackley DH. A connectionist machine for genetic hillclimbing. Boston: Kluwer Academic Publishers; 1987.

[50] Teughels A, Maeck J, De Roeck G. Damage assessment by FE model updating using damage functions. *Computers and Structures* 2002;80:1869-79.