

Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia  
Dipartimento di Ingegneria “Enzo Ferrari”

scuola di dottorato

HIGH MECHANICS & AUTOMOTIVE DESIGN AND TECHNOLOGY

XXVIII ciclo

*Direttore: Chiar.mo Prof. Paolo Tartarini*

# **Ricerca della configurazione ottimale dei sensori per sistemi di monitoraggio permanente con incertezza nei dati**

*Optimal sensor placement under uncertainties  
for SHM purposes*

**LAURA SIMONINI**

*PhD tutor: Dott. Ing. Loris Vincenzi*



# Indice

<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Introduzione</b>	<b>21</b>
<b>1 Metodi per il posizionamento dei sensori</b>	<b>23</b>
1.1 Metodi basati sul Modal Assurance Criterion . . . . .	24
1.2 Decomposizione a valori singolari della matrice delle deformate modali	26
1.3 Effective Independence Method - EFI . . . . .	26
1.3.1 Varianti del metodo EFI . . . . .	28
1.4 Metodi energetici . . . . .	29
1.4.1 Energia di deformazione . . . . .	30
1.4.2 Energia cinetica . . . . .	31
1.4.3 Prodotto degli autovalori della matrice di forma modale . . . .	33
1.4.4 Optimum e Non-Optimum Driving Point . . . . .	33
1.5 Metodi basati su misure della varianza della matrice di forma modale	34
1.6 Information Entropy . . . . .	36
1.6.1 Applicazione alla dinamica strutturale . . . . .	38
1.6.2 Errore di predizione e matrice di covarianza . . . . .	39
1.6.3 Effetto della lunghezza di correlazione . . . . .	41
<b>2 Algoritmi di ottimizzazione</b>	<b>43</b>
2.1 Metodi deterministici . . . . .	44
2.2 Metodi di ottimizzazione combinata/combinatoria . . . . .	45
2.2.1 Algoritmi Genetici . . . . .	45
2.2.2 Algoritmi di Simulated Annealing . . . . .	46
2.2.3 Algoritmi Particle Swarm . . . . .	47
2.2.4 Algoritmi Monkey . . . . .	48
2.2.5 Algoritmi di Ant Colony . . . . .	48
2.3 Metodi di ottimizzazione sequenziale . . . . .	49

2.4	Implementazione nel caso di ottimizzazione della posizione dei sensori	53
<b>3</b>	<b>Confronto tra diverse metodologie nella determinazione della configurazione ottimale</b>	<b>55</b>
	Trave semplicemente appoggiata . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Metodo IE-dms: proposta di variazione del metodo IE</b>	<b>65</b>
4.1	Trave semplicemente appoggiata . . . . .	67
4.2	Telaio spaziale asimmetrico in pianta . . . . .	71
4.3	Passerella pedonale . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Posizionamento dei sensori in presenza di incertezze</b>	<b>83</b>
5.1	Trave semplicemente appoggiata . . . . .	86
	5.1.1 Errori a posteriori . . . . .	86
	5.1.2 Errori a priori . . . . .	95
5.2	Telaio spaziale asimmetrico in pianta . . . . .	101
5.3	Passerella pedonale . . . . .	105
	<b>Conclusioni</b>	<b>117</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>123</b>

# Abstract

Modern technologies for structural safety, system identification and damage detection require controlling systems to monitor the structural behaviour during the whole operating life. These technologies are based on the development of efficient numerical techniques for structural identification and on the adoption of increasingly reliable sensors that conjugate contained costs with performances suitable for monitoring purposes. However, the quality of the obtained information significantly depends on the number of sensors and on their placement. Usually, several sensor positions can be selected, although economic constraints and spatial restrictions tend to limit the set-up. Thus, it is necessary to optimize the position of a limited number of sensors in order to obtain the maximum amount of information from the measured data and to assure a reliable evaluation of the parameters of interest as well.

In the past, the optimal sensor placement problem was solved through practical considerations, e.g. placing sensors as near as possible to points where maximum displacements were expected. In the last decades, several approaches has been proposed and developed to find a sensor configuration that allows to optimize the number and the position of sensors on structures.

Numerical experiments carried out in this work highlight affinities and differences among several sensor placement procedures considering benchmark application as a simply supported beam and a spatial frame. Kinetic Energy, Effective Independence, Driving Point Residue, and Information Entropy methods are applied. Since results of optimization and placement process considerably depend on the covariance matrix of prediction error and on the definition of signal correlation, different proposal of the definition of covariance matrix are also compared. Then a new proposal of the correlation function depending from both the distance and modal vectors is presented; a comparison of results between the proposed method and some of the most effective methods is performed.

A measure of the quality of the sensor configurations is necessary in order to

numerically compare the obtained results. Then, independent assessment criteria are selected to evaluate the suitability of sensor position: the determinant of Fisher Information Matrix, a criterion based on the Modal Assurance Criterion and the so called Condition Number.

As a matter of facts, sensor placement is a priori problem where only analytical data are available and they are obtained, for instance, by means of a Finite Element Model. Then in a general sensor placement procedure, the estimate of the optimal positioning is sensitive to errors and uncertainties mainly due to limitations of the adopted numerical model to represent the behaviour of the real structure (model errors) and the presence of uncertainties in measures whether experimental data are used (measurement errors). Moreover, model errors can be further classified in two groups: parametric uncertainties and model form uncertainties. The parametric uncertainties are associated with the discrepancies between the values of actual physical systems and the input parameters in the analysis. Model form uncertainties are associated with the lack of accurate modelling of the physical system. These uncertainties can alter the optimal locations of sensors and limit the efficiency of the monitoring systems. In recent years, much research has focused on incorporating the uncertainties associated with real structures into the numerical simulation for reliable predictions. Despite this, only few studies have considered the optimal placement of sensors with model errors.

Afterwards the role of parametric and model uncertainties in sensor placement is investigated in this work. The reliability and the robustness of the proposed correlation function in the case of model error is tested forcing an alteration (distortion) in a constraint condition, and comparing set-up obtained from different methods. Benchmark examples and an application to a 5 span real footbridge are also reported.

## Related Works

In the past, the optimal sensor placement problem was solved through practical considerations, that consists in placing sensors as near as possible to points where maximum displacements were expected [1]. In the last decades, several approaches has been proposed and developed to find a sensor configuration that allows to optimize the number and the position of sensors. An overview of the optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure was given in [2]. One set of criteria was derived from the modal assurance criterion (MAC) originally introduced by [3]. With the aim of leading in uncorrelated mode shapes, [4] proposed to minimize the off diagonal terms of the MAC matrix.

---

The MAC or the mass-weighted MAC were recommended as validation criterion, by several authors (see for instance [5]). In the field of optimal sensor placement, [6] proposed to minimize both the average of all the off-diagonal elements and the highest value in all of them.

In [7] a priori analysis is performed; the proposed approach to determine the optimal sensor placement is based on the difference among modal information acquired with or without the contribution of preselected sensor. A lack of information about the  $i$ -th sensor implies that the mode shape component is estimated by a linear interpolation. An optimisation procedure is then performed to minimize the distance between the measured and reconstructed data for a defined number of sensors. However, the same sensor configuration has to identify more than one mode shape so that the solution is reached solving a combinatorial optimisation problem.

The Effective Independence (EFI) method [8,9] was developed for spatial structures on orbit. It determines the position of each candidate sensor maximizing the determinant of the Fisher Information Matrix (FIM) defined as the product of the mode shape matrix and its transpose. The aim of the EFI method is to select measurement positions that make the mode shapes a readings of interest as linearly independent as possible. The EFI method is extensively discussed in papers [9–13]. The Fisher matrix can also be weighted by the use of the mass matrix carried out by a finite element model. In the EFI method, the number of sensors is iteratively reduced from an originally large candidate set to the desired number, by removing those sensors which do not contribute significantly to the independent information of the mode partition [14]. In the end, the remaining sensors are judged as the optimal sensor set. In [9] it is shown that maximizing the FIM determinant means maximizing the mode shape signal strength and spatial independence.

The determinant of the Fisher Information matrix is often directly considered as the objective function to be minimized; other authors suggest to maximize the smallest eigenvalue of the FIM, or to minimize the trace of inverse of the FIM, or to maximize the norm of the FIM [15,16]. Different variants based on the EFI method were also proposed [17]: for instance, the EFI-DPR (Driving Point Residue) was developed to identify the damage in mechanical elements, [8,9,18] and the modes are weighted by corresponding driving-point residues.

Several other sensor placement methods are based on energy measures of a structure. These methods usually select locations with high amplitude responses to increase the signal to noise ratio. The Kinetic Energy Method (KEM) [19] maximizes the kinetic energy measure of the structure; however, it is shown that it should be brought back to the maximization of the Fisher matrix determinant [8]. Other

energy-driven methods are the Eigenvalue Vector Product (EVP) [8] and the Non-Optimal Driving Point (NODP) [20].

Stephan [15] presented a fast sub-optimal algorithm and he used two criteria based both on observability of mode shapes and on information shared by sensors. A set of sensors is obtained by maximizing the norm of the FIM and by avoiding the redundancy of information within the selected degrees of freedom. As this method is mainly devoted to analysis of large finite element models, a fast sensor expansion algorithm provides sub-optimal sets.

Some methods are also based on the maximization of the determinant of the diagonal elements of mode shape correlation matrix, ranking the sensor contributions by Hankel singular values (HSVs). In [21] an analytical formulation of the singular value decomposition for a candidate-block Hankel matrix using subspace correlation techniques was tested. For the purpose of determining the optimal positions of sensors and actuator, the use of the controllability and observability matrices is proposed also in [22, 23].

Papadimitriou [24] introduces the Information Entropy (IE) as a performance measure of the sensor configuration. The method generalizes several other sensor placement procedures and it demonstrates to be efficient and robust. Based on the Bayesian approach, the Information Entropy provides for a scalar measure of the uncertainty in the estimate of some model parameters and it depends on the covariance matrix of prediction error. The optimal sensor configuration is the one that minimizes uncertainties, that is the IE.

## The Information Entropy

For a linear vibratory system, the measured response  $\mathbf{y}(t)$ , depending on the time  $t$ , is related to the model response  $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta})$  by the observation equation

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta}) \quad (1)$$

where the vector  $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta})$  is the response displacement and  $\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta})$  is the prediction error due to the model error and the measurement error;  $\mathbf{L}$  is the observation matrix, composed of zeros and ones, that specifies which DOFs of the system are measured. Moreover,  $\boldsymbol{\theta}$  are parameters characterizing the dynamic structural behaviour. According to the Bayesian theory, the Probability Density Function  $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)$  of

parameters  $\boldsymbol{\theta}$ , obtained from the data  $D$  measured on the system, is given by [24]:

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) = \frac{c}{\sqrt{2\pi^N} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_t)}} \exp\left(-\frac{NN_s \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)}{2}\right) \quad (2)$$

where  $\pi$  is a priori distribution of the parameter  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $c$  is a normalizing constant chosen such that the Probability Density Function (PDF) integrates to one and  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  is the covariance matrix of the prediction error  $\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta})$ .

$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)$  is the Fisher Information Matrix (FIM) and it represents the distance between the measured data and the model response

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) = \frac{1}{NN_s} \sum_{k=1}^N [\mathbf{y}_k \mathbf{L} \mathbf{x}_k(\boldsymbol{\theta})]^T \boldsymbol{\Sigma}_t^{-1} [\mathbf{y}_k \mathbf{L} \mathbf{x}_k(\boldsymbol{\theta})] \quad (3)$$

$N_s$  is the number of the sensors and  $N$  is the time interval length. Since the PDF is a measure of uncertainties in parameter values, the Information Entropy (IE)

$$\mathbf{h}(L, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) = E_\theta[-\ln(p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D))] = - \int \ln(p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)) p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) d\boldsymbol{\theta} \quad (4)$$

provides a unique scalar measure of the uncertainty in the evaluation of structural parameters.  $E_\theta$  denotes the expected value of  $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)$  towards  $\boldsymbol{\theta}$ . An asymptotic approximation of  $\mathbf{h}(L, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)$  is available for a large number of acquired data, i.e. for  $N \cdot N_s \rightarrow \infty$

$$\mathbf{h}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) \approx \mathbf{H}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} N_s \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}))) \quad (5)$$

where  $\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta})$  is the Fisher Matrix. Its asymptotic approximation is

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) \approx \sum_{k=1}^N [\mathbf{L} \nabla_\theta \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})]^T [\mathbf{L} \boldsymbol{\Sigma}_t \mathbf{L}^T] [\mathbf{L} \nabla_\theta \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})] \quad (6)$$

in which  $\nabla_\theta$  is the gradient operator. The optimal sensor configuration is selected as the one that minimizes the Information Entropy since it gives a direct measure of uncertainty in the model parameter estimate. The asymptotic approximation of the IE easily shows that minimize the Information Entropy corresponds to maximize the determinant of the Fisher Matrix

$$\mathbf{L}_{best} = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{h}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmax}} \det \mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}). \quad (7)$$

If the aim of the structural monitoring is the modal identification, then the best sen-

sensor position provides for the best amount of information on the modal coordinate vector  $\boldsymbol{\xi}$ . Thus, the model parameter vector corresponds to the modal coordinate vector,  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\xi}$ . Using the coordinate transformation, the structural response displacement vector is related to the modal coordinate vector by the mode shape matrix  $\boldsymbol{\Phi}$ :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta} \quad (8)$$

Considering that  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}$ , the Fisher Information matrix takes the form

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t) = (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{L}^T)^{-1} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}) . \quad (9)$$

Therefore, the Fisher Information matrix is independent from the modal coordinates  $\boldsymbol{\xi}$  and it is connected to the sensor positions both by the observation matrix  $\mathbf{L}$  and by the mode shape matrix  $\boldsymbol{\Phi}$ .

The definition of the covariance matrix  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  of the prediction error  $\boldsymbol{e}(t, \boldsymbol{\theta})$  is a crucial issue for the optimal sensor position, especially in presence of model uncertainties. In general, the prediction error depends on a term counting the measurement error, usually unrelated to the sensor position, and on a term that considers the model error [25]. Assuming the independence between these two errors, the covariance  $\boldsymbol{\Sigma}_t$  is given by

$$\boldsymbol{\Sigma}_t = \overline{\boldsymbol{\Sigma}} + \boldsymbol{\Sigma} . \quad (10)$$

where  $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$  and  $\boldsymbol{\Sigma}$  are respectively the measurement error (for instance noise on measures) and model error covariance matrices. The measurement error matrix  $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$  is usually independent from the sensor position and, in common applications, it is assumed diagonal. Off diagonal terms could be considered only for multi-axial digital sensors where measures are collected by sensors physically allocated on the same chip. Generally the model error covariance matrix  $\boldsymbol{\Sigma}$  depends on the distance between sensors; therefore, the prediction error of the structural response has a correlation among the measures acquired in neighbouring points. In [25] an exponential correlation function for DOFs  $i$  and  $j$  is assumed:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \sqrt{\boldsymbol{\Sigma}_{ii}\boldsymbol{\Sigma}_{jj}} \exp[-\delta_{ij}/\lambda], \quad (11)$$

where  $\delta_{ij}$  is the spatial distance between the DOFs  $i$  and  $j$ , and  $\lambda$ , called correlation length, is a measure of the spatial correlation in signals. The auto-correlation terms  $\boldsymbol{\Sigma}_{ii}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_{jj}$  are assumed equal to one.  $\boldsymbol{\Sigma}_{ij}$  elements of covariance matrix span from one to zero. They are equal to one in the case of perfect spatial correlation and tend

to zero when the distance between sensors increases. In [25] the role of correlation length is investigated, considering different constant values of  $\lambda$ .

## The proposed correlation function

Results obtained by some case studies investigated in the first part of the thesis show that the correlation function proposed by Papadimitriou [25] is efficient and remarkable but it is sensitive to the choice of the correlation length  $\lambda$ ; moreover, guided by the aim to well separate the position of each sensor, the Information Entropy method assigns sensors also close to nodal positions, when the parameter  $\lambda$  is not properly selected. No useful information about mode shapes is substantially added even if sensors are well spaced. A new correlation function depending from both the distance between sensors and modal vectors is proposed to avoid the placement of sensors in modal position. For two given position  $i$  and  $j$ , elements of the model error covariance matrix are assumed as

$$\Sigma_{ij} = \varphi_i \varphi_j^T \exp(-\delta_{ij}/\bar{\delta}). \quad (12)$$

where  $\bar{\delta}$  represents an average distance among sensors and it is defined as the ratio between the greatest distance of all DOFs and the number of sensors, and  $\varphi_i = [\varphi_{i1} \varphi_{i2} \dots \varphi_{iN_M}]$  and  $\varphi_j = [\varphi_{j1} \varphi_{j2} \dots \varphi_{jN_M}]$  are vectors whose terms are:

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \frac{\phi_{ik}}{\max(\phi_{ik}; \phi_{jk})} \\ \varphi_{jk} &= \frac{\phi_{jk}}{\max(\phi_{ik}; \phi_{jk})} \end{aligned} \quad (13)$$

The distance between two sensors is thus combined with information given by mode shapes, computed in the  $i$ -th and  $j$ -th position ( $\phi_{ik}$  and  $\phi_{jk}$  respectively) for each contributing mode  $k$ . The vector could be interpreted as a normalized mode shape that is each component spans between 0 and 1. Afterwards the terms  $\varphi_{ik}$  and  $\varphi_{jk}$  vary between 0 and 1, giving a weight for the distance-dependent factor  $\exp(-\delta_{ij}/\bar{\delta})$ . The greater mode shapes are correlated, the greater these terms tend to one. In the case of the indeterminate solution  $\varphi_{ik} = \frac{0}{0}$  the value of  $\varphi_{ik}$  is imposed equal to one because the acquired signals are fully correlated. The product  $\varphi_i \varphi_j^T$  varies between 0 and the number of modes. The value of the element  $\Sigma_{ij}$  assumes the maximum value equal to the number of modes when sensor signal is totally correlated and it decreases if correlation decreases. If a sensor is far from the others the correlation is small; on the other hand, for orthogonal eigenvectors, that are

totally uncorrelated mode shapes, the product  $\varphi_i \varphi_j^T$  is zero, and  $\Sigma_{ij}$  is equal to 0 even if the distance between sensors is small.

Several algorithms are available to find the configuration that minimize the Information Entropy (or maximize the determinant of the Fisher Matrix). The most common algorithms are Genetic (GA) and Evolutionary algorithms (EA) [18, 26], Simulated Annealing algorithm (SA) [27] and Particle Swarm Optimization algorithm (PSO), which imitate natural evolution by assigning a fitness value to each candidate and applying the principle of gene survival or other natural development to find the optimal solution [28]. The main issue of the optimization process is to find an efficient searching solution in order to generate acceptable results in reasonable time. The Sequential Sensor Positioning procedures (SSP) are much more computationally efficient with respect to exhaustive search methods and to nature-inspired algorithms. The sensor configuration computed by the SSP algorithm cannot be guaranteed to be the optimal one, however numerical applications show that results coincide with, or are very close to the exact solution [29].

In this work the Forward Sequential Sensor Placement (FSSP) procedure is applied. The FSSP procedure is a sub-case of SSP algorithm and, differently from the Backward Sequential Sensor Placement, it puts sensors on the structure one at a time, evaluating, for each subsequent sensor, which position maximizes the objective function. The computational effort involved in the FSSP procedure is much smaller than the ones involved for a direct search method, especially when a large discard between the DOF number and the number of sensors is considered [25].

When the optimization algorithm is applied to minimize the Information Entropy, some numerical problems could occur. In particular, the optimization process exhibits indeterminate solution in the case of a limited number of sensors [30]: the determinant of the FIM is zero for all sensor configurations if the number of sensor is smaller than the contributing mode number. To avoid the aforementioned indetermination, a proper numerical procedure has to be adopted.

As a diagonalizable matrix is similar to a diagonal matrix with the eigenvalues on the diagonal; the determinant of a diagonal matrix is simply the product of the diagonal elements. Papadimitriou and Lombeart [25] proposed to solve the problem maximizing only the non-zero eigenvalue product of the FIM, instead of maximizing the product of all eigenvalues. However, for numerical approximations in the diagonalization procedure and in the evaluation of the term  $(\mathbf{L}\mathbf{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1}$ , some near-zero values could appear. They can be taken into consideration or neglected depending on the imposed threshold value, giving wide fluctuations to results. In this work, a more robust procedure is applied, here described and proposed. The FIM

and, thus, the term  $(\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1}$  is a positive definite matrix. A Cholesky factorization of this term is firstly performed

$$(\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T \quad (14)$$

so obtaining

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (15)$$

where  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})$ . Then, the Singular Value Decomposition of  $\mathbf{A}$  is evaluated; the square of the  $i$ -th singular value of  $\mathbf{A}$  called  $\sigma_i(\mathbf{A})$  is equal to positive eigenvalues of  $\mathbf{Q}$  matrix. Finally, it is possible to determine the best configuration as indicated

$$\mathbf{L}_{best} = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmax}} \det \mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmax}} \prod_i \sigma_i(\mathbf{A}). \quad (16)$$

The proposed procedure has lower computational effort and gives more stable results instead of considering non-zero eigenvalues product.

## Numerical examples

Simple numerical case studies are presented to investigate differences among literature methods, e.g. the Effective Independence Method (EFI), the EFI-dpr method, the Kinetic Energy Method (KEM), the Information Entropy theory, and the proposed IE-dms. The FSSP sequential sensor placement search method is employed and the proposed procedure described previously is implemented. The Cholesky factorization and the singular value decomposition are performed to give more stability of results and to solve numerical problems when the number of sensor is smaller than the number of modes of interest.

The first example refers to a simply supported beam; this simply structure is chosen to compare results in a perfectly controlled benchmark case study. Then a asymmetrical spatial frame is analysed, to investigate the proposed correlation function also in 3D cases. Optimal sensor location are finally designed for a real footbridge recently built in Correggio (Italy), in order to test the procedure also in a real case study.

It is highly desirable to establish a criterion to assess the quality of any set of chosen measurement location; moreover, a measure of the quality of the sensor configurations is necessary to numerically compare the results obtained by different placement methods. Three independent assessment criteria are selected to evaluate

the suitability of selected sensor position: a criterion based on the Modal Assurance Criterion (*rms*), the so called Condition Number (*cn*) and the determinant of Fisher Information Matrix ( $\det(FIM)$ ). These criteria are independent one from another and they are considered very reliable [31]. These criteria are briefly described below. Further information can be found in [5].

The Modal Assurance Criterion (MAC [14]) is traditionally used to correlate numerical mode shapes to those obtained by experimental tests. In the field of optimal sensor placement, the mode shape data are really useful when measured modes can be distinguished one from each others. A good sensor configuration has off diagonal terms as small as possible. Then, the root mean square (*rms*) of the off-diagonal MAC terms is used as the first criterion:

$$rms = \sqrt{\frac{1}{N_s(N_s - 1)} \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{N_s} (MAC_{hk})^2}. \quad (17)$$

where the MAC is defined as

$$MAC_{hk} = \frac{(\phi_h^T \phi_k)^2}{(\phi_h^T \phi_h)(\phi_k^T \phi_k)} \quad (18)$$

and  $\phi_h$  and  $\phi_k$  are the modal vectors that are computed for the  $h$ -th and the  $k$ -th modes, respectively. Small values of the *rms* indicate good correlations.

The Condition Number (*cn*) is calculated using the Singular Value Decomposition (SVD) of the eigenvector matrix. The *cn* is defined as the ratio between the largest and the smallest non-zero singular value of mode shape matrix kept by measured DOFs. High values of condition number indicates a poor choice of sensor configuration, so the condition number has to be small.

To compare mode shapes, the expression of the Fisher Information Matrix determinant without the covariance matrix of the prediction error is used:

$$\det(FIM) = \det(\Phi^T \Phi) \quad (19)$$

$\Phi$  is the mode shape matrix that considers only the measured DOFs. A high value of this parameter indicates that FIM retains as much information as possible [9].

It can be easily remarked that these assessment criteria do not give absolute range to test the quality of the obtained configuration but they are used only to compare different lay-out.

A global index is also introduced, collecting the three assessment criteria de-

scribed previously; the global index  $ir$  is defined as follows:

$$ir = \frac{1}{3} \left[ \frac{rms_{min}}{rms} + \frac{cn_{min}}{cn} + \frac{\det(FIM)}{\det(FIM)_{max}} \right] \quad (20)$$

where  $rms$ ,  $cn$  and  $\det(FIM)$  are calculated for the considered method, and  $rms_{min}$ ,  $cn_{min}$  and  $\det(FIM)_{max}$  are the best values obtained by one of the tested method.

### Simply supported beam

A simply supported beam with a length  $h = 1$  is first considered. The EFI, EFI-dpr, KEM, IE with two different values of the correlation length ( $\lambda = 0.1; 0.4$ ), and proposed IE-dms are compared. Four modes are selected and 500 possible positions equally arranged on the beam length are considered.

Results show that IE-dms method places the first 4 sensors almost in the same position with respect to the other methods, at (0.2; 0.4; 0.6; 0.8). Greater differences are instead found in the position of subsequent sensors. Likewise KEM and IE method with a correlation length equal to 0.1, the method IE-dms puts one sensor at the midspan. Guided by the aim to well separate the position of each sensor, IE method assigns two sensor close to the beam ends, when  $\lambda$  is equal to 0.4. No useful information about mode shapes is substantially added even if sensors are well spaced. The proposed IE-dms method defines new positions close to the maximum value of the 2nd and 3rd mode shape improving the results obtained by the IE method, spacing better all sensors and avoiding useless nodal positions.

The three assessment criteria are applied; a summary of results obtained with 6 or 7 sensors are reported in Tab.1. Underlined numbers refer to the best result for a given assessment criterion. It can be noted that no formulation gives a sensor placement that satisfies better all criteria. It can be further noted that the IE-dms method is always close to the best value, while the other methods give appreciable indices in some cases but unsatisfactory performances in other cases.

The sensor placement procedure needs to assign a priori the number of modes. All placement processes described and used in this thesis assume that the number of sensors is equal to the number of target modes that should be identified at least. With the number of sensor exactly equal to the number of modes, the problem is fully determined. Results show that for all cases, the first four modes are properly identified with the first 4 sensors with the same accuracy for all methods and almost coincident positions are obtained in all cases. Differences are instead shown for a sensor number greater than the number of modes. When the number of sensors is greater than the number of modes, it is assumed that the optimal sensor configura-

**Table 1:** Comparison among optimal sensor methods: values of the assessment criteria - 4 mode shapes.

(a) 6 sensors

<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>	<b>ir</b>
EFI	0.06	1.61	<u>179.06</u>	0.337
EFI-dpr	0.07	1.57	129.24	0.571
KEM	0.03	1.42	131.49	0.665
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.14	1.34	155.53	0.646
IE ( $\lambda = 0.4$ )	<u>0.01</u>	<u>1.16</u>	38.54	0.749
IE-dmf	0.02	1.36	154.77	0.783

(b) 7 sensors

<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>	<b>ir</b>
EFI	0.03	1.65	<u>358.67</u>	0.671
EFI-dpr	0.11	1.85	192.16	0.411
KEM	<u>0.01</u>	1.22	296.86	0.915
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.02	<u>1.12</u>	277.69	0.758
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.03	1.40	78.64	0.451
IE-dmf	<u>0.01</u>	1.17	275.15	0.908

tion is the one that allows to identify as better as possible also higher modes. With this aim, the assessment criteria are recalculated supposing that 5 mode shapes are actually available even if the optimal procedure is carried out selecting only 4 mode shapes. Results are reported in Tab.2. The proposed correlation function (case C) better satisfies all assessment criteria with a large discard with respect to the other cases, both for 6 and 7 sensors. Similar results can be obtained for a higher number of modes. The IE-dms method better satisfies all criteria or it is really close to the best values. Moreover, the global index *ir* clearly shows the effectiveness of the proposed correlation function, providing for the best values in almost all cases, with a large discard with respect to the other methods sometimes.

### Spatial frame unsymmetrical in plan

The sensor placement procedure is applied to an 8 floor spatial frame with unsymmetrical distribution in plan of columns. Considering a rigid diaphragm at each floor, the modal matrix is written considering displacements of centroids for all modes of interest. Mode shapes are normalized by a *factor of importance*, defined as the norm of the modal participating factor in direction *x*, *y* and rotation. Therefore first modes are much more important with respect to the others. Floor decks are subdivided in a grid of  $5 \times 5$  possible sensor positions.

**Table 2:** Comparison among optimal sensor methods: values of the assessment criteria - 5 mode shapes.

(a) 6 sensors				
metodo	rms	cn	det(FIM)	ir
EFI	0.30	12.27	9.12	0.086
EFI-dpr	0.29	17.44	2.46	0.068
KEM	0.04	1.83	249.96	0.775
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.36	<u>1.61</u>	<u>360.08</u>	0.694
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.26	42.48	0.11	0.051
IE-dms	<u>0.03</u>	1.65	353.94	0.986

(b) 7 sensori				
metodo	rms	cn	det(FIM)	ir
EFI	0.30	12.06	19.88	0.052
EFI-dpr	0.30	16.13	6.06	0.039
KEM	<u>0.01</u>	1.40	793.73	0.903
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.06	<u>1.24</u>	922.19	0.708
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.05	2.21	94.88	0.286
IE-dms	<u>0.01</u>	<u>1.25</u>	<u>964.54</u>	0.997

Usually the prediction error is considered totally uncorrelated in two different directions. However, the measurements in  $x$  and  $y$  directions are correlated if coupled torsional-flexural mode shapes occur e.g. in non symmetrical spatial structures.

The proposed IE-dms easily allow to take into account the spatial correlation in 3D structures by means of the terms  $\varphi$ ; for orthogonal eigenvectors that is for instance uncorrelated modes involving in orthogonal direction, the product  $\varphi_i \varphi_j^T$  is zero, and the correlation is equal to 0 even for a small distance between sensors. The distance  $\delta_{ij}$  is assumed as:

$$\frac{\delta_{ij}}{\bar{\delta}} = \sqrt{\frac{(x_i - x_j)^2}{\delta_x^2} + \frac{(y_i - y_j)^2}{\delta_y^2} + \frac{(z_i - z_j)^2}{\delta_z^2}} \quad (21)$$

where  $\delta_x$ ,  $\delta_y$  and  $\delta_z$  are the greatest distance among all DOFs in  $x$ ,  $y$  and  $z$  respectively.

Results obtained by IE-dms method are compared to those obtained by the EFI method (i.e. using a identity matrix for the covariance matrix). The three independent assessment criteria are then applied to evaluate the suitability of selected sensor position. Supposing a configuration of 12, 15, 20 and 25 sensors to gather first 6 mode shapes, EFI method generally better satisfies assessment criteria, even if IE-dms method is not far from the best value. The assessment criteria are recalculated

supposing that 9 mode shapes are actually available even if the optimal procedure is carried out selecting only 6 mode shapes. The three assessment criteria confirm that the IE-dms method gives better performances especially for a high number of modes. All results are reported in details in the thesis.

## Correggio Footbridge

Optimal sensor locations are finally designed for a footbridge in Correggio (Italy). The Correggio steel footbridge was built in 2011; it is 168 m long and it is composed of 5 simple-supported spans, linked at lower-floor level. The central span is 40 m long and the four lateral spans are each one 32 m long. The footbridge is supported by 4 piles; the central and lateral piles are respectively about 5.20 m and 2.80 m high. The structure has a box cross-section  $3.00 \times 2.85$  m composed of truss girders. Piles and trusses are made up by rectangular hollow profiles. L-shaped profiles are used for the lower lateral bracing system. The deck is 3 m wide and consists of a wooden plank resting on a corrugated sheet. The whole structure is slender, lightweight and characterized by sensitive vibrations due to pedestrian, cyclist and wind effects. The design and implementation of a monitoring system is necessary to better investigate the interaction between pedestrians and footbridge. For this purpose, a dynamic identification and a model updating procedures are needed and, so, the goal of the sensor location design is the modal identification. A finite element model is built to find analytical mode shapes, using truss and beam elements for girders and piles; constraints are applied at the base of piles and at the lateral span ends.

It can be noticed that the design of sensor position is performed considering vertical and mixed lateral-torsional mode shapes. To emphasize the importance of a spatial correlated prediction errors in the optimal sensor placement procedure, three modal cases (called 1, 2 and 3, respectively) are considered. In modal case 1, only vertical modes are considered; in modal case 2 modes having a main horizontal direction component are used (torsional or lateral modes); finally, in modal case 3 all first 10 modes are taken into account.

The methodology is applied using the IE-dms method. In modal case 1, sensors are obviously all placed in the vertical direction, on both side of the footbridge and well distributed over all spans and approximately symmetrically placed with respect to the central span. The central span exhibits a higher number of sensors, due to the form of the selected mode shapes. In modal case 2 sensors are placed on the upper and lower chord of the box truss girder, in order to better identify the torsion involved in modes no. 5, 8 and 9. With the same purpose, two sensors are also placed in vertical direction at the midspan. At last, the modal case 3 shows sensors

---

approximately symmetrically placed on both direction.

## Optimal Sensor Placement under uncertainties

As a matter of facts, sensor placement is a priori problem where only analytical data are available; these data are obtained, for instance, by means of a Finite Element Model. Therefore, in a general sensor placement procedure, the estimate of the optimal positioning is sensitive to numerical model errors and uncertainties that can alter the optimal locations of sensors and limit the efficiency of the monitoring systems.

Errors and uncertainties could be considered *a priori*, evaluating the variation of sensor optimal positions changing input parameters. Alternatively errors could be taken into account *a posteriori*, evaluating the best position in a error-free case and introducing errors before. These uncertainties are mainly due to limitations of the adopted numerical models to represent the behaviour of the real structure (model errors) and the presence of uncertainties in measures whether experimental data are used (measurement errors). Moreover, model errors can be further classified in two groups: parametric uncertainties and model form uncertainties. The parametric uncertainties are associated with the discrepancies between the values of actual physical systems and the input parameters in the analysis. Model form uncertainties are associated with the lack of accurate modelling of the physical system.

An example of measurement error is the data noise; this error produces imprecise measurements, but no bias, [31]. The model error occurs because of inaccurate or oversimplified assumptions about the physical structure are used to construct a finite element model. This error leads to bias in the estimates, and a large number of observations generally does not eliminate its effect, [31].

The role of parametric and model uncertainties in sensor placement is investigated. The first case study refers to a simply supported beam: measurement and model form uncertainties are initially considered as *a posteriori* errors. Particularly, measurement error is introduced as data noise and model form error is introduced forcing an alteration (distortion) in a constraint condition. Assessment criteria are performed to evaluate the quality of the sensor configuration. Afterwards, the *a priori* errors are also introduced. The sensor placement procedure is performed starting from a set of pseudo-experimental data, which simulate the statistical scattering of some physical parameters that are due to uncertainties in the model definition. The variation of the constraint stiffening at first and the mass and stiffness along the beam is considered.

Finally, the real case study of the Correggio footbridge is considered; the presence of model form uncertainties is taken into account modelling a variation of the stiffness in the elements linking the bridge spans and of the mass distribution along the whole bridge.

### Simply supported beam

The influence of parametric and model uncertainties on the optimal sensor placement is investigated comparing results obtained by the EFI method, the Information Entropy approach with a correlation length equal to 0.4 and the proposed IE-dms method.

### A posteriori error

First, the measurement error is considered. To take into account the measurement error, *pseudo-experimental* input data are used. They are obtained by multiplying exact values of mode shape components with uncorrelated coefficients, extracted from a normal probability distribution with unit mean value and fixed Coefficient of Variation. A Monte Carlo simulation is performed; 300 identification tests are run for each level of noise to perform statistical analysis of results. Results show that the noise influences all indices in all cases, but without modifying the position of sensors, also when the noise level increases significantly.

The model error is then considered. I suppose that the beam previously studied has a rotational spring with stiffness  $K$  at one end; however, with a lack of information on the actual constraint condition, the sensor placement is performed using a simply supported beam model. In Tab.3 the values of assessment criteria are reported and the results with the spring at the left or at the right end are given, considering both 4 or 5 mode shapes. With the supposed model form uncertainty, IE-dms appears more efficient than the others for all assessment criteria, confirming the reliability of the proposed correlation function.

It is finally worth to note that results could be sensitive to the spring position (left end or right end) if the number of sensors changes. In effect, when the optimal sensor placement procedure was applied, one of the two optimal solutions has been found; the two solutions are symmetrically laid with respect to the midspan. The choice of one of them is not relevant when the exact mode shapes are considered; however it could be crucial if model error is introduced.

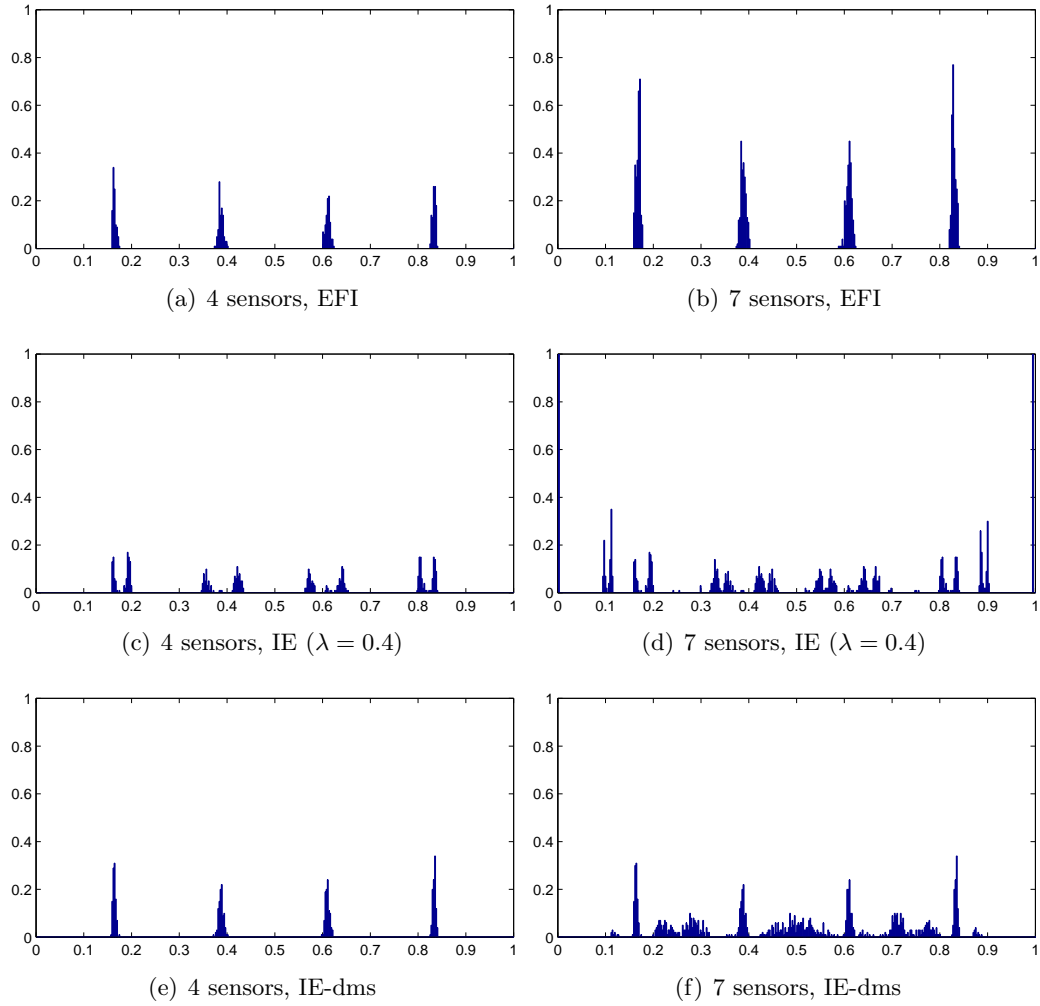
**Table 3:** beam 7 sensor configuration quality in model error case.

(a) 4 modes, left spring			
method	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.035	1.68	196.78
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.039	1.48	39.06
IE-dms	0.005	1.17	178.63
(b) 4 modes, right spring			
method	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.032	1.66	194.24
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.018	1.41	58.20
IE-dms	0.005	1.16	180.21
(c) 5 modes, left spring			
method	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.181	13.33	11.40
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.087	2.20	62.47
IE-dms	0.005	1.24	599.36
(d) 5 modes, right spring			
method	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.204	13.03	12.89
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.060	2.32	61.88
IE-dms	0.005	1.23	605.91

### A priori error

The effect of uncertainties on the sensor configuration is also studied considering a Gaussian distribution of beam mass and stiffness. The mean values are assumed equal to the target values and the Coefficient of Variation are set equal to 5% and 15% for the mass and stiffness, respectively. Mode shapes are considered as the input data for the optimal sensor placement procedure. Monte Carlo simulations are performed and results in term of the probability of sensor selection with uncertain parameters is reported in Fig.1. Four or seven sensors are selected to identify the first 4 mode shapes (Fig.1(a)-1(c)-1(e) and Fig.1(b)-1(d)-1(f), respectively)

Results show a high dispersion of sensors due to the random variation of input data. The changing of the input modal parameters modifies the position of the global minimum of objective function; therefore, the sensor positions vary because they are highly sensitive to changes of second and third bending modes. If the proposed IE-dms is used, the variation of results is less sensitive to parameter changes, identifying some preferred position. On the other hand, if the IE method is consid-



**Figure 1:** probability of sensor selection with uncertain mass and stiffness.

ered, an almost uniform distribution of sensors is found and the choice of the set of measurement positions is a very difficult task, more so if adjacent points have to be avoided since they usually do not provide useful information.

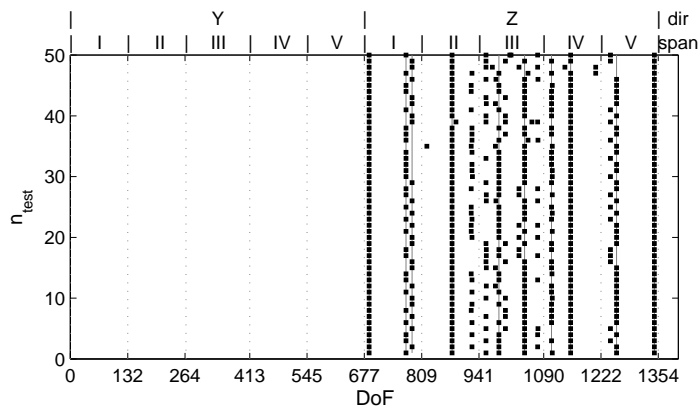
### Correggio footbridge

Finally, the effect on results of model uncertainties is investigated also referring to the Correggio footbridge. The upper chords of spans are connected together by means of a thin steel plate and bolted in slotted holes. Beam elements with stiffness  $k_{link}$  are then introduced in the Finite Element Model to model the connection. Actually, a stiffness  $k_{link}$  change modifies mode shapes, especially those mainly involved in the lateral direction; the stiffness of the connection is unknown and, so, the value

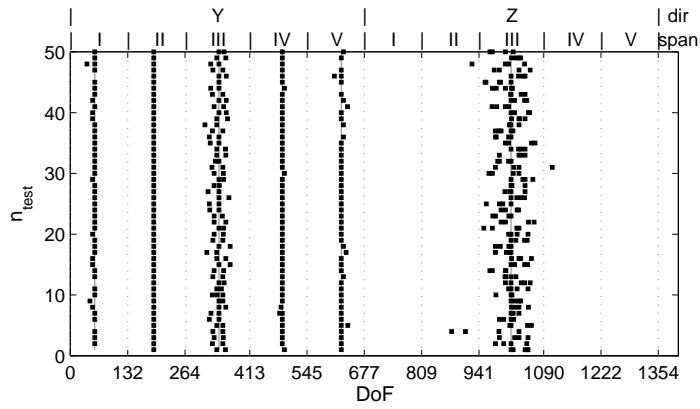
used in the analysis could be considered affected by uncertainty. For this reason, the influence in sensor positions is investigated considering different values of  $k_{link}$  by changing its elastic modulus in the range  $E_{link} = [10^7 \text{Pa}, 10^{11} \text{Pa}]$ . It is shown that sensors remain almost in the same positions if vertical modes are considered; sensors are placed in all spans, close to each midspan. As expected, greater variability of results is instead obtained when horizontal mode shapes are considered. The first two sensors are always placed at the footbridge ends, in order to identify the second and third lateral modes; other sensors are instead spread in all spans. A small variation of  $E_{link}$  causes large variation of sensor positions. More stable results are obtained considering all modes, due to the increasing number of selected modes with the same number of sensors. With exception to the lowest values of  $E_{link}$ , sensors are placed at each midspan in the vertical directions, and at the footbridge ends in the horizontal direction.

An uncertain distribution of deck mass is considered, that implies an alteration of mode shapes. A Monte Carlo simulation is performed giving a Gaussian distribution of mass elements placed on the footbridge deck. The IE-dms method is applied, and results are reported in Fig.2, where each dot indicates the position for each run of the Monte Carlo simulation. In *modal case 1* the first three horizontal mode shapes are considered; *modal case 2* refers to the results selecting only the three vertical modes and the torsional one; finally all modes are considered in *modal case 3*. Results reported in Fig.2 refers to a distance  $\bar{\delta}$  between sensors equal to 15 m. The proposed IE-dms method is applied and results of 50 runs are reported.

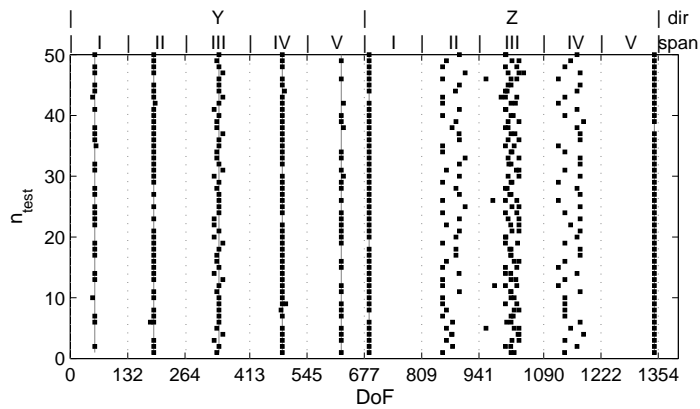
In *modal case 1*, it can be noted that several sensor are placed in the same positions despite of mode shape changing; however a great dispersion of results is obtained especially for sensors with index  $i$  greater than the number of modes. If only vertical mode shapes are selected (*modal case 2*) a greater dispersion appears especially for sensor placed in the Z direction. Moreover, several sensors are placed close to the midspan of the span no. 3 without suggesting a preferred position. Results are more stable in *modal case 3*: the optimal sensor placement procedure is less sensitive to both uncertainties and the distance  $\bar{\delta}$  when the sensor number is close to the number of the selected modes.



(a) case 1, horizontal modes



(b) case 2, vertical and torsional modes



(c) case 3, all modes

**Figure 2:** Correggio footbridge: results of sensor placement process with model uncertainties; *dir* indicates the acquiring direction, *span* indicates the span of the bridge, *DoF* is the number of the degree of freedom.

# Introduzione

Negli ultimi decenni sono stati sviluppati sistemi di acquisizione sempre più sofisticati, utilizzati per il controllo della sicurezza strutturale, per la valutazione del danno e per problemi di identificazione dinamica. Queste tecnologie sono basate sullo sviluppo di efficienti tecniche numeriche e, attraverso l'adozione di strumentazioni sempre più sofisticate ed affidabili, permettono alte prestazioni e costi relativamente contenuti. Tali sistemi utilizzano come strumenti di acquisizione dei sensori, accelerometri ad esempio, e la loro quantità e posizione nella struttura incidono considerevolmente sulla qualità dei risultati che si possono ottenere. Generalmente, però, il desiderio di limitare i costi del sistema di acquisizione stesso e la complessità dei dati da elaborare, limita il numero di sensori che possono essere effettivamente installati. In aggiunta, il normale utilizzo delle strutture e l'impossibilità di posizionare sensori in ogni punto della struttura, comporta restrizioni spaziali nel posizionamento della strumentazione. Pertanto risulta di fondamentale importanza la ricerca di una configurazione ottimale di un ridotto numero di sensori, al fine di ottenere il maggior numero di informazioni possibili dai dati misurati e garantire allo stesso tempo una stima affidabile dei parametri di interesse.

Nella prima parte del lavoro sono state analizzate differenze ed analogie tra diversi metodi per la determinazione della posizione ottimale dei sensori attraverso diversi esempi numerici, in particolare facendo ricorso a semplici casi benchmark come una trave in semplice appoggio ed un telaio spaziale, ed anche a strutture reali, in particolare una passerella pedonale. Sono stati considerati sia metodi energetici che metodi probabilistici. Dato che i risultati dipendono considerevolmente dalla cosiddetta matrice di covarianza dell'errore stimato (legata alle forme modali) e dalla correlazione del segnale (legata alla distanza tra i sensori), sono state confrontate in dettaglio diverse proposte per considerare tali entità nella definizione della funzione obiettivo per il posizionamento dei sensori. Si è quindi proposta una nuova funzione obiettivo che dipende sia dalla distanza tra i sensori che dalla matrice di forma modale, in modo tale da riassumere in un unico metodo i vantaggi di una correlazione

spaziale pesata sulla forma dei modi di vibrare.

Per confrontare numericamente i risultati, sono stati introdotti diversi criteri, indipendenti uno dall'altro, per poter valutare la qualità delle informazioni ottenute: un metodo che valuta l'incertezza sui parametri che si vogliono stimare, un criterio basato sull'indipendenza spaziale, ed il numero di condizionamento.

In ogni caso il posizionamento dei sensori è uno studio a priori che ricorre sempre a dati analitici ottenuti da modelli, ad esempio agli elementi finiti. In un generico problema di posizionamento dei sensori, quindi, la posizione ottimale è affetta da errori ed incertezze principalmente causate dai limiti del modello numerico nella rappresentazione del reale comportamento della struttura (errori di modello) e dall'errore di misura come ad esempio il rumore nei dati. Gli errori di modello possono essere suddivisi in incertezze sui parametri, ed incertezze sul modello vero e proprio associate alla semplificazione insita nel processo di modellazione stesso. Recentemente la ricerca si è focalizzata sull'incorporare solo quest'ultimo tipo di errore, e solo pochi hanno considerato questi errori di modello. Errori ed incertezze possono modificare considerevolmente la posizione ottimale dei sensori e quindi limitare l'efficienza del sistema di monitoraggio.

Nella seconda parte del lavoro si è quindi analizzato il ruolo delle incertezze sui parametri e sul modello nella ricerca della configurazione ottimale dei sensori, testando l'affidabilità e la robustezza della funzione obiettivo proposta. Sono riportati a titolo esplicativo i casi studio trattati anche in assenza di errori: i casi benchmark della trave e del telaio spaziale asimmetrico in pianta e l'applicazione sulla passerella pedonale.

## Capitolo 1

# Metodi per il posizionamento dei sensori

Ogni volta che si devono svolgere test dinamici sulle strutture, una delle prime decisioni da compiere è il fenomeno che si vuole misurare, successivamente sono da scegliere i punti di misura ed infine come eventualmente sollecitare la struttura stessa qualora non bastino le sollecitazioni ambientali. In caso di monitoraggio in campo dinamico le grandezze che si possono misurare sono generalmente accelerazioni, velocità o spostamenti. Nella maggior parte delle applicazioni di identificazione dinamica viene misurata l'accelerazione e successivamente si trasforma analiticamente la risposta misurata in spostamento e velocità a seconda delle applicazioni. Spesso in passato i test dinamici sperimentali venivano progettati semplicemente attraverso l'esperienza del progettista stesso, ma poteva capitare che, terminato il test e guardando i risultati ottenuti, ci si accorgesse che le posizioni ottimali per la strumentazione sarebbero state altre, e che talvolta alcuni strumenti non fornivano dati utili a causa della loro infelice posizione nella struttura. Da ciò si evince l'importanza di studiare a priori una posizione efficace per gli strumenti di misura, al fine di ottenere il maggior numero di informazioni utili. In ambito dinamico in particolare, si vogliono spesso ottenere frequenze e deformate modali. Se da un lato le frequenze si riescono a cogliere abbastanza precisamente, è assai più difficile valutare accuratamente le deformate modali, motivo per il quale è spesso necessario uno specifico sistema di acquisizione con uno studio ad hoc delle posizioni.

Generalmente gli approcci utilizzati per selezionare la posizione dei punti di misura in caso di monitoraggio dinamico, si basano sulla stima a priori delle forme modali e delle corrispondenti frequenze proprie. Tale stima può provenire ad esempio da un modello agli elementi finiti, ottenuto dalla geometria della struttura, o

anche da un modello ottimizzato basato su una precedente e preliminare campagna di indagine, al fine di predisporre successivamente un sistema di monitoraggio provvisorio o permanente. Bisogna innanzitutto sottolineare che un buon metodo di posizionamento dei sensori per una particolare applicazione, non è detto che sia necessariamente il migliore per un altro tipo di applicazione. Alcuni criteri che hanno come scopo l'identificazione del danno ad esempio pongono particolare attenzione su alcuni aspetti a differenza di altri che hanno come scopo l'identificazione modale che pongono maggiore attenzione ovviamente su altri aspetti [27].

In questo capitolo vengono descritti alcuni dei più conosciuti metodi per la determinazione della configurazione ottimale dei sensori, illustrandone la metodologia, i principali ambiti di utilizzo e quindi lo scopo.

Un primo approccio basato sulla visualizzazione delle forme modali non ha una formulazione matematica concreta, ma dipende dalla struttura e generalmente sono selezionati i punti agli spigoli dei telai o nella mezzeria degli elementi [27]. Si basa sulla considerazione che nei problemi ingegneristici generalmente si desidera innanzitutto visualizzare i vettori delle deformate modali identificate dalle prove sperimentali per avere una prima idea del moto globale della struttura presa in considerazione.

Inoltre suggerisce di impiegare un numero di sensori almeno pari a 5 volte il numero delle deformate modali che si vogliono vedere, al fine di ottenere una cruda raffigurazione delle forme ed evitare incertezze spaziali. Da ciò si deduce che per valutare ad esempio le prime 4 forme modali, siano necessari almeno 20 sensori, che è un numero alto per applicazioni correnti di monitoraggio permanente, e comunque alto anche per test preliminari. In aggiunta bisogna sottolineare che le nuove strutture possono presentare modi di vibrare inattesi o accoppiati, quindi tale criterio risulta di fatto impossibile da applicare, in quanto bisognerebbe conoscere a priori il comportamento dinamico della struttura stessa.

## 1.1 Metodi basati sul Modal Assurance Criterion

L'osservabilità delle deformate modali, come già accennato in precedenza, è un requisito fondamentale per la qualità del sistema di acquisizione. Se i dati misurati permettessero di determinare autovettori ortogonali, allora la distinzione dei diversi modi sarebbe assicurata; tuttavia è generalmente impossibile garantire che i modi misurati siano realmente ortogonali a causa ad esempio del fatto che i gradi di libertà misurati sono certamente inferiori al numero di gradi di libertà con cui si potrebbe discretizzare la struttura ed inoltre si aggiungono problemi di accuratezza

delle misure. Inoltre è possibile anche che non si riescano a cogliere determinati modi di vibrare a causa della vicinanza delle frequenze proprie, soprattutto se si usano metodi nel dominio delle frequenze, per cui questi tendono a confondersi uno con l'altro.

Il Modal Assurance Criterion, detto MAC, è una grandezza scalare ideale, che è strettamente collegata alla reciproca relazione tra i vettori modali

$$MAC_{hk} = \frac{(\phi_h^T \phi_k)^2}{(\phi_h^T \phi_h)(\phi_k^T \phi_k)} \quad (1.1)$$

in cui  $\phi_h$  e  $\phi_k$  sono la  $h$ -esima e la  $k$ -esima colonna della matrice modale  $\Phi$ . Il MAC ha valori che variano tra 0 e 1, in cui 0 indica che i modi sono totalmente scorrelati, mentre 1 indica che c'è una perfetta correlazione, e cioè che i modi sono indistinguibili o coincidenti. Se i modi fossero totalmente scorrelati tra loro, quindi perfettamente ortogonali, la matrice MAC sarebbe una matrice identità.

Se si volesse quindi utilizzare tale entità come funzione per definire la posizione dei sensori, si possono costruire due funzioni obiettivo da minimizzare, [6]: la prima possibilità consiste nel cercare di rendere il più basso possibile il più grande in valore assoluto dei valori fuori diagonale della matrice MAC per cui

$$f_1 = \max_{h \neq k} \{|MAC_{hk}|\}; \quad (1.2)$$

mentre la seconda possibilità consiste nel rendere più piccola possibile la media dei valori degli elementi in valore assoluto fuori diagonale della matrice MAC per cui

$$f_2 = \text{mean}_{h \neq k} \{|MAC_{hk}|\}. \quad (1.3)$$

Tali funzioni possono anche essere minimizzate simultaneamente; si ottiene quindi una procedura di ottimizzazione combinata, in cui nella matrice  $\Phi$  si inseriscono le forme modali *sperimentali* stimate nel modello agli elementi finiti nelle posizioni in cui si ipotizza ci siano i sensori.

In realtà il MAC viene utilizzato attualmente, più che per definire una configurazione ottimale di sensori, per valutare la bontà della configurazione ottenuta, confrontando soluzioni di differenti metodi, come proposto in [14]. Come accennato nell'introduzione del presente capitolo, infatti, un buon metodo per una particolare applicazione non è detto che sia il migliore per un'altra applicazione. Può essere allora utile avere a disposizione criteri di valutazione semplici per confrontare eventuali diverse soluzioni.

## 1.2 Decomposizione a valori singolari della matrice delle deformate modali

Il metodo si basa sulla decomposizione a valori singolari o SVD (Singular Value Decomposition) della matrice di forma modale in cui le forme modali sono fornite soltanto nei gradi di libertà in cui si prevede la misurazione. Il metodo valuta semplicemente il rapporto tra il maggiore  $\sigma_{\max}$  ed il minore  $\sigma_{\min}$  valore singolare:

$$SVDR = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} . \quad (1.4)$$

Se il rapporto si avvicina all'unità, allora la scelta della configurazione è buona, al crescere del rapporto la configurazione dei sensori è povera in informazioni. Questo metodo è molto utilizzato per diversi motivi. Innanzitutto se i modi misurati sono ortogonali, cioè il MAC (Eq.1.1) è una matrice diagonale, allora tutti i valori singolari sono uguali, e quindi fornisce una buona stima dell'indipendenza dei modi di vibrare misurati. Dall'altra parte se i vettori sono linearmente dipendenti, un valore singolare sarà nullo, ed il rapporto tende ad infinito. Si ha quindi una buona stima dell'osservabilità dei modi acquisiti. In aggiunta, il rapporto dei valori singolari è strettamente correlato al numero di condizionamento del problema: alti numeri di condizionamento indicano che ad una piccola variazione dei parametri di input si ha una grande variabilità dei risultati. Controllare il valore di tale rapporto quindi conduce anche ad un controllo sulla stabilità del problema [5].

## 1.3 Effective Indipendence Method - EFI

L' Effective Indipendence method (EFI) [11] è volto a massimizzare l' indipendenza spaziale dei sensori. Tale scopo viene perseguito attraverso la matrice denominata Fisher Information Matrix (FIM), in particolare massimizzando una sua misura, come ad esempio il determinante o il prodotto degli autovalori. Si consideri ad esempio un modello agli elementi finiti, da cui si ricavano le forme modali nei gradi di libertà in cui è possibile posizionare un sensore. La configurazione di  $N_s$  sensori che garantisce la minor perdita di informazioni sarà la ottimale. La decomposizione modale implica che ad ogni istante di tempo la risposta misurata  $\mathbf{y}$  dai sensori sia data da:

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Phi}\mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (1.5)$$

in cui  $\mathbf{\Phi}$  è la matrice di forma modale, ricavata dal modello agli elementi finiti come spostamenti dei nodi nei quali è possibile posizionare i sensori, e  $\mathbf{x}$  è il vettore che

indica il contributo di ogni elemento della matrice di forma modale nella risposta misurata;  $\mathbf{e}$  è il vettore che rappresenta il rumore nelle misure, generalmente assunto con distribuzione gaussiana a media nulla e deviazione standard costante per tutti i punti di misura. È importante sottolineare che se le deformate modali affette da rumore sono linearmente indipendenti, i modi sono linearmente indipendenti anche all'origine, e dunque il rumore nelle misure non incide sul posizionamento dei sensori [14].

Se le possibili posizioni dei sensori sono  $s$  ma le risorse disponibili limitano la configurazione ad  $N_s$  sensori, in cui  $N_s \ll s$ , allora si dovranno cercare le  $N_s$  posizioni che mantengano le informazioni il più indipendenti possibile, per ottenere quindi la migliore stima dei parametri modali. L'approccio più diffuso è una stima ai minimi quadrati, ottenendo una stima dello stato

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}]^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{y}. \quad (1.6)$$

La migliore stima comporta che la matrice di covarianza dell'errore stimato sia minima. Tale matrice può essere ottenuta come

$$P = E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T] = [\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}]^{-1} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Sigma} \mathbf{\Phi} [\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}]^{-1} = \mathbf{Q}_0^{-1} \quad (1.7)$$

in cui  $E[\cdot]$  indica il valore atteso della quantità contenuta dalla parentesi e  $\mathbf{\Sigma}$  è la matrice di covarianza di  $\mathbf{e}$ . Nel caso in cui la matrice  $\mathbf{\Sigma}$  sia diagonale e i termini sulla diagonale siano definiti come  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 = \sigma^2$  allora la matrice  $\mathbf{Q}_0$ , definita come

$$\mathbf{Q}_0 = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{Q}, \quad (1.8)$$

è detta Fisher Information Matrix (FIM), e per minimizzare la stima dell'errore  $P$ , deve essere massimizzata. Generalmente si massimizza una sua misura, come ad esempio il determinante. Per come è definita la Fisher Information Matrix, si può notare che se i modi di vibrare non sono linearmente indipendenti, il determinante è nullo. Quindi massimizzare il determinante della Fisher Information Matrix, significa massimizzare l'indipendenza spaziale dei modi di vibrare acquisiti; inoltre la massimizzazione della Fisher Information Matrix porta a massimizzare anche la potenza del segnale nei punti di acquisizione, che è assolutamente desiderabile in presenza di rumore nelle misure [9].

Il contributo all'indipendenza spaziale di ogni possibile posizione di acquisizione

può essere considerato separatamente, decomponendo la FIM nella forma:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^s \phi_i^T \phi_i = \sum_{i=1}^s \mathbf{Q}_i \quad (1.9)$$

in cui  $\phi_i$  è il vettore di forma modale associato alla  $i$ -esima posizione. Da tale equazione si può facilmente notare come se una posizione viene eliminata dal set o aggiunta, allora l'informazione relativa viene eliminata o aggiunta alla Fisher Information Matrix. Le posizioni che non contribuiscono significativamente o che danno ridondanza possono essere dunque eliminate per ridurre il numero di sensori.

Si può utilizzare un procedimento di tipo iterativo, introducendo il vettore che fornisce l'Effective Independence Distribution EID

$$E_D = [\Phi \Psi] \otimes [\Phi \Psi] \lambda^{-1} \{1\}_k. \quad (1.10)$$

Il simbolo  $\otimes$  indica il prodotto elemento per elemento, il termine  $\{1\}_k$  è un vettore di dimensioni  $(k \times 1)$  con tutti gli elementi pari all'unità,  $\Psi$  e  $\lambda$  sono la matrice degli autovettori e gli autovalori della Fisher Information Matrix rispettivamente. Per massimizzare il determinante della Fisher Information Matrix, viene eliminata ad ogni step la posizione che ha il più piccolo  $E_D$ , procedendo fino a che il numero dei sensori candidati  $s$  raggiunge il numero dei sensori previsti per il sistema di monitoraggio  $N_s$  [14].

### 1.3.1 Varianti del metodo EFI

La procedura precedentemente illustrata nel metodo dell'Effective Independence, basata sulla Fisher Information Matrix, può condurre ad eliminare posizioni con un basso contenuto energetico, e ciò può comportare quindi ad una possibile perdita di informazioni che in realtà sono utili [14]. Per evitare questa perdita di informazioni la funzione obiettivo può essere moltiplicata per una sorta di fattore peso, detto coefficiente DPR (Driving Point Residue), che può essere calcolato per ogni possibile posizione  $i$ ,

$$dpr_i = \sum_{k=1}^{N_m} \frac{\phi_{ik}^2}{\omega_k} \quad (1.11)$$

dove  $N_m$  è il numero di modi considerato,  $\phi_{ik}$  è la  $k$ -esima forma modale nella posizione  $i$ , ed  $\omega_k$  è la frequenza relativa al  $k$ -esimo modo. Il vettore  $E_D$  calcolato in Eq.1.10 può essere quindi riformulato considerando anche il contributo di tale

fattore, ottenendo per il grado di libertà che si vuole eliminare il valore di Effective Independence Distribution pari a

$$E_{Di} = [\Phi\Psi] \otimes [\Phi\Psi]^{-1} \{1\}_i \text{ dpr}_i. \quad (1.12)$$

Un altro metodo strettamente correlato al metodo EFI, e chiamato EFI expansion [12], si basa sul fatto che la matrice FIM può essere decomposta separando i contributi delle singole possibili posizioni dei sensori, come si evince dalla Eq.1.9. Quindi il determinante della matrice può essere espresso come

$$\det(\mathbf{Q}_i) = \det(\mathbf{Q}) \det(1 - E_i) \quad (1.13)$$

in cui

$$E_i = \phi_i \mathbf{Q}^{-1} \phi_i^T \quad (1.14)$$

è il valore corrispondente all' $i$ -esimo sensore, e rappresenta la riduzione del determinante della Fisher Information Matrix a causa dell'eliminazione del sensore stesso dal set candidato.

Quindi tutte le posizioni possono essere classificate in base al valore di Effective Independence Distribution. La posizione con il valore inferiore può essere eliminata, e si può così ricalcolare il valore della funzione obiettivo per ogni nuovo set candidato. Si noti che il valore  $E_i$  varia sempre tra 0 e 1. Se il valore di Effective Independence per una determinata posizione è 0, allora il sensore può essere eliminato dalla configurazione senza impatti sul determinante; al contrario se il valore è 1 allora la posizione è vitale per l'indipendenza spaziale dei modi di interesse, e il sensore non può essere eliminato dalla configurazione. Bisogna inoltre sottolineare che mano a mano che i sensori vengono eliminati, il valore della funzione obiettivo cambia per i sensori rimanenti; per garantire quindi che non siano eliminati dalla configurazione i sensori vitali necessari per ottenere le informazioni desiderate, ad ogni step della procedura non si deve escludere più di una posizione alla volta.

## 1.4 Metodi energetici

I metodi di tipo energetico sono dei metodi di tipo deterministico e sono volti alla massimizzazione del contenuto di energia cinetica, di energia elastica, o energia di deformazione del segnale acquisito. Tali metodi sono nati ed utilizzati in bibliografia per strutture di grandi dimensioni con applicazione civile e aerospaziale [14].

### 1.4.1 Energia di deformazione

La distribuzione dell'energia di deformazione in una struttura dipende dai modi di vibrare principali [32]:

$$\mathbf{E}_k = \phi_k^T \mathbf{K} \phi_k \quad (1.15)$$

in cui  $k = 1, \dots, N_m$  con  $N_m$  il numero di modi di interesse. Quando i modi  $\phi_k$  provengono da un modello agli elementi finiti, l'energia  $\mathbf{E}_k$  è semplicemente uguale al quadrato delle pulsazioni del problema dinamico  $\lambda_k^2$ . La distribuzione di energia per ogni elemento strutturale può essere ottenuta come:

$$E_{i,k} = [\mathbf{L}_i \phi_k]^T \mathbf{K}_i [\mathbf{L}_i \phi_k] \quad (1.16)$$

dove  $i = 1, \dots, N_e$  numero di elementi e  $k = 1, \dots, N_m$  con  $N_m$  il numero di modi di interesse.  $\mathbf{L}_i$  è la matrice di localizzazione, ed estrae dal vettore  $\phi_k$  il grado di libertà collegato all'  $i$ -esimo elemento. Dal punto di vista fisico, un'alta energia di deformazione è associata agli elementi che sono critici per l'integrità della struttura, in quanto immagazzinano ampie quantità di energia associata al  $k$ -esimo modo di vibrare.

Nel metodo NRG [14,32] una volta calcolata l'energia associata ad ogni elemento per ogni modo di vibrare di interesse, questa viene distribuita per i singoli gradi di libertà degli elementi. In questo modo ad ogni singolo nodo è associata un'aliquota di energia di deformazione, che può essere memorizzata in un vettore ed ordinata, è così molto semplice eliminare le posizioni a basso contenuto energetico.

Il metodo EMRO, Energy Matrix Rank Optimization, [14, 32] si basa sempre sull'idea di massimizzare l'energia di deformazione degli elementi strutturali; la procedura combina quanto definito in Eq. 1.16 e l'efficienza computazionale utilizzata del metodo dell'Effective Independence, §1.3. Assumendo che sia disponibile un modello agli elementi finiti, o che la matrice di forma modale sia stata ottenuta sperimentalmente strumentando la struttura con un numero molto alto di sensori, lo scopo rimane quello di ridurre significativamente il numero di sensori per il sistema di monitoraggio permettendo in ogni caso l'identificazione delle principali caratteristiche dinamiche della struttura in esame. Attraverso la fattorizzazione di Cholesky, si decompone la matrice di rigidità:

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (1.17)$$

ed a questo punto è facile calcolare l'energia di deformazione come

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \quad (1.18)$$

in cui  $\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\Phi}$  e  $\boldsymbol{\Phi}$  è la matrice di forma modale. Si procede quindi come per il metodo dell'Effective Independence: dal set iniziale di sensori si rimuove passo passo il contributo dei sensori che vengono eliminati, ottenendo la matrice dei rimanenti

$$\mathbf{E}_1 = \boldsymbol{\Psi}_1^T \boldsymbol{\Psi}_1. \quad (1.19)$$

Dopo un'analisi agli autovalori ed autovettori per cui

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{U} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \quad (1.20)$$

e

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (1.21)$$

il contributo all'energia di deformazione di ogni sensore rimanente è assemblata nella matrice

$$\text{EMRO} = \sum_{r=1}^{N_m} [\boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]^2. \quad (1.22)$$

Ad ogni iterazione EMRO è una misura euristica del contributo di ogni posizione all'energia di deformazione. Il termine  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}$  è un fattore di normalizzazione che impedisce ai modi superiori ad alta frequenza di dominare sui modi principali a frequenza più bassa. Ad ogni iterazione la possibile posizione che fornisce il minore contributo all'energia di deformazione del sistema viene eliminata. Tale procedimento può proseguire fino a che il rango della matrice EMRO è al limite uguale al numero di modi linearmente indipendenti di interesse  $N_m$ .

### 1.4.2 Energia cinetica

Esistono diverse tecniche di ottimizzazione basate sulla massimizzazione dell'energia cinetica connessa alle forme modali della struttura [19]. La distribuzione di energia cinetica KE nel sistema può essere fornita dalla relazione

$$\mathbf{KE} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \quad (1.23)$$

in cui  $\Phi$  è la matrice di forma modale. La matrice delle masse  $\mathbf{M}$ , attraverso la fattorizzazione di Colesky, può essere decomposta in una matrice triangolare inferiore ed una triangolare superiore rispettivamente, per cui  $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ . Assumendo  $\Psi = \mathbf{U}\Phi$  si ottiene quindi

$$\mathbf{K}\mathbf{E} = \Psi^T \Psi. \quad (1.24)$$

Chiamando  $\bar{\Phi}$  e  $\bar{\Psi}$  le corrispondenti matrici  $\Phi$  e  $\Psi$  in configurazione ridotta, l'energia misurata da un numero ridotto di sensori può essere ottenuta rimuovendo i contributi dei sensori eliminati dall'energia iniziale, ottenendo

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{E}} = \bar{\Psi}^T \bar{\Psi}. \quad (1.25)$$

L'obiettivo è determinare una configurazione ridotta di sensori che massimizzi la misura di energia cinetica della struttura, ed è auspicabile che la procedura non elimini sensori qualora il loro contributo sia rilevante ai fini della misurazione. Per questo motivo il rango della matrice  $\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{E}}$  non può essere inferiore al numero dei modi di interesse linearmente indipendenti. Il problema può essere risolto iterativamente: innanzitutto si ricavano autovalori ed autovettori

$$\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{E}}\psi = \psi\Lambda \quad (1.26)$$

in cui  $\psi$  e  $\Lambda$  sono rispettivamente gli autovettori e gli autovalori. Calcolando le autocoppie ad ogni step della procedura, l'onere computazionale non aumenta significativamente perché la matrice  $\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{E}}$  è quadrata, definita positiva, e di dimensioni pari al numero dei modi linearmente indipendenti di interesse. A questo punto il contributo di ogni sensore è assemblato dentro ad una matrice:

$$\mathbf{EOT} = \sum_{i=1}^m [\bar{\Psi}\psi\Lambda^{-1/2}]^2. \quad (1.27)$$

La procedura è detta Energy Optimization Technique (EOT) e la posizione con il minimo contributo viene selezionata per essere rimossa. Quindi il contributo di tale posizione all'energia cinetica viene cancellato e viene ridefinita una nuova matrice, della quale viene valutato il rango. Nel caso in cui il rango della matrice sia inferiore al numero di modi di interesse linearmente indipendenti, allora la posizione non può essere eliminata, diversamente la posizione viene rimossa dal set e si ripete la procedura fino al numero di sensori desiderato.

Tale procedura viene definita anche con l'acronimo KEM o KEMRO, Kinetic

Energy Matrix Rank Optimization, in quanto, similmente alla EMRO (§1.4.1) valuta il rango, ma in questo caso della matrice di distribuzione di energia cinetica.

### 1.4.3 Prodotto degli autovalori della matrice di forma modale

Il metodo del prodotto degli autovalori della matrice di forma modale, detto EVP (Eigenvalue Vector Product) consiste nella valutazione del vettore

$$evp_i = \prod_{k=1}^{N_m} \phi_{ik}. \quad (1.28)$$

in cui  $N_m$  è il numero di modi di interesse e  $i$  è la posizione del generico sensore, [8].

La tecnica prevede la selezione delle posizioni con il maggiore valore di  $evp$  al fine di evitare di prevedere sensori nei nodi dei modi di vibrare (punti in cui la deformata modale ha spostamento nullo), e di massimizzare l'energia di vibrazione. Si calcola dunque tale valore per ogni possibile posizione, si ordinano in un vettore in modo decrescente, e si possono scegliere direttamente le prime  $N_s$  posizioni, con  $N_s$  numero dei sensori che si intendono installare.

### 1.4.4 Optimum e Non-Optimum Driving Point

I metodi optimum e non-optimum driving point sono basati sul concetto che la quantità di energia di vibrazione di ogni modo dipende dalla posizione relativa tra il punto in cui la struttura viene eccitata e la posizione dei nodi dei modi di vibrare (punti in cui la deformata modale è nulla) [14].

La tecnica Optimum Driving Point [33,34], detta ODP, è stata ideata per identificare le posizioni che sono vicine ai nodi dei modi in uno specificato range di frequenze. Per descrivere la posizione di ogni grado di libertà rispetto alla posizione dei nodi di ogni modo di vibrare, si moltiplica la deformata modale  $\phi$  dell' $i$ -esimo grado di libertà per tutti gli  $N_m$  modi di interesse. Analiticamente tale valore è ottenuto dalla seguente espressione

$$ODP_i = \prod_{k=1}^{N_m} \|\phi_{i,k}\|. \quad (1.29)$$

Tale tecnica è nata per individuare i punti di eccitazione della struttura, in particolare, i gradi di libertà che hanno un valore  $ODP_i$  prossimo a zero sono vicini o coincidono con i nodi dei modi di vibrare, e quindi devono essere esclusi. I gradi di libertà invece che hanno tale parametro diverso da zero possono essere ritenuti punti

validi per l'eccitazione della struttura considerata. In particolare da tutte le possibili posizioni, vengono eliminate mano a mano quelle con il valore  $ODP_i$  inferiore fino ad arrivare al numero desiderato.

Il metodo del Non-Optimum Driving Point NODP [14, 33] è sempre nato per determinare i punti in cui sollecitare la struttura, e similmente al metodo ODP definisce un parametro per ogni grado di libertà che descriva la vicinanza del grado di libertà stesso dai nodi dei modi di vibrare per un determinato range di frequenze. Questo metodo può essere comunque utilizzato per determinare la posizione dei sensori. La funzione obiettivo è definita come

$$NODP_i = \min_k \|\phi_{i,k}\| \quad k = 1, \dots, N_m \quad (1.30)$$

in cui si considera semplicemente il valore minimo della deformata modale  $k$  tra tutti gli  $N_m$  modi, nel grado di libertà di interesse  $i$ . Se un certo grado di libertà ha un basso valore di  $NODP_i$ , allora quel grado di libertà può essere eliminato dalle posizioni candidate per i sensori.

Il motivo per cui viene definito *non-optimum* risiede appunto nel fatto che il metodo mostra quali punti eliminare e non definisce quali invece possano essere i migliori punti di acquisizione. Risulta quindi facile l'implementazione per cui si calcola tale parametro per ogni possibile posizione, si riordinano i valori in un vettore, e si eliminano le  $s - N_s$  posizioni con il valore inferiore, in cui  $s$  sono tutte le possibili posizioni per i sensori ed  $N_s$  il numero di sensori che si desiderano installare.

## 1.5 Metodi basati su misure della varianza della matrice di forma modale

Tutti i metodi basati su misure della varianza, derivano dal metodo detto Most Informative Subset (MIT) [8, 14, 20]. È un metodo di tipo statistico, che fa riferimento ad un'analisi della matrice di covarianza. Questo tipo di approccio è stato sviluppato per problemi collegati alla valutazione e all'approssimazione di fenomeni attraverso un numero finito e limitato di osservazioni. In questo contesto il fenomeno è la valutazione delle forme modali nei punti non strumentati della struttura.

Supponendo che ogni forma modale di interesse sia valutata o osservata in  $N_s$  delle possibili  $s$  posizioni, per cui si abbia  $\mathbf{y}_{N_s} = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots, \phi_{N_s}\}$ , è necessario stimare le forme modali nelle altre  $p = s - N_s$  posizioni  $\mathbf{y}_p = \{\phi_{N_s+1}, \phi_{N_s+2}, \dots, \phi_{N_s+p}\}$ . Questo problema si può risolvere ad esempio interpolando linearmente il dato nei

punti mancanti, ottenendo

$$\hat{\mathbf{y}}_p = \mathbf{C}_{pp} \mathbf{C}_{N_s N_s}^{-1} \mathbf{y}_{N_s} \quad (1.31)$$

in cui, se si assume la matrice  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_{N_s}, \mathbf{y}_p\} = \mathbf{\Phi}^T$ , le matrici  $\mathbf{C}_{pp}$  e  $\mathbf{C}_{N_s N_s}$  sono le matrici diagonali della matrice di covarianza della matrice  $\mathbf{Y}$

$$\text{cov}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{N_s N_s} & \mathbf{C}_{N_s p} \\ \mathbf{C}_{p N_s} & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{cov}(\mathbf{y}_{N_s}) & \mathbf{C}_{N_s p} \\ \mathbf{C}_{p N_s} & \text{cov}(\mathbf{y}_p) \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Si può dunque calcolare la covarianza dell'errore stimato come

$$\mathbf{D}_{pp} = \text{cov}(\hat{\mathbf{y}}_p - \mathbf{y}_p) = \mathbf{C}_{pp} - \mathbf{C}_{p N_s} \mathbf{C}_{N_s N_s}^{-1} \mathbf{C}_{N_s p} \quad (1.33)$$

e quindi può essere utilizzata una funzione monotona  $f(\mathbf{D}_{pp})$  per misurare l'efficienza della stima dei parametri nei punti strumentati. Per esempio si può considerare come funzione il determinante, in particolare la posizione migliore è quella che minimizza l'incertezza, e dunque che minimizza il determinante della funzione  $\mathbf{D}_{pp}$ . Si consideri dunque che:

$$\text{cov}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{N_s N_s} & \mathbf{C}_{N_s p} \\ \mathbf{C}_{p N_s} & \mathbf{C}_{pp} \end{bmatrix} = |\mathbf{C}_{N_s N_s}| |\mathbf{C}_{pp} \mathbf{C}_{p N_s} \mathbf{C}_{N_s N_s}^{-1} \mathbf{C}_{N_s p}|. \quad (1.34)$$

Si può notare che minimizzare il determinante di  $\mathbf{D}_{pp}$  equivale a massimizzare indifferentemente il determinante della matrice di covarianza  $\mathbf{C}_{N_s N_s}$  o a massimizzare il determinante di  $\mathbf{\Phi}^T$  per un set di sensori pari a  $N_s$

$$\max_{N_s} |\text{cov}(\mathbf{\Phi}^T)|. \quad (1.35)$$

Bisogna però sottolineare che se da un lato la massimizzazione del determinante della matrice di forma modale  $\mathbf{\Phi}^T$  garantisce che il rango della matrice ridotta al numero di sensori di interesse  $N_s$  sia uguale al numero di modi di interesse  $N_m$ , tuttavia non si assicura di massimizzare anche la potenza del segnale acquisito. Inoltre questa procedura fornisce spesso risultati assolutamente identici al metodo EVP §1.4.3, ed incapaci di cogliere in realtà le forme modali [8].

Il metodo detto Variance Method [8], VM, cerca di risolvere questi problemi e dunque di migliorare la soluzione. Si considerino quindi le seguenti proprietà degli elementi  $c_{ij}$  della matrice di covarianza:

- per  $i \neq j$ , se  $c_{ij} = 0$  allora  $\phi_i$  e  $\phi_j$  sono linearmente indipendenti;

- per  $i = j$ ,  $c_{ij} = \sigma_i^2$  che è la varianza del vettore  $\phi_i$ .

Di conseguenza i coefficienti sulla diagonale possono essere considerati una misura della potenza del segnale acquisito dalla  $i$ -esima posizione candidata. Se si vuole contemporaneamente massimizzare il determinante della matrice  $\mathbf{C}_{N_s N_s}$  e la potenza del segnale, è quindi sufficiente che i termini fuori diagonale della matrice tendano a zero mentre i termini sulla diagonale principale tendano all'unità. Questo scopo può essere facilmente raggiunto semplicemente massimizzando la funzione

$$Vr = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{c_{ii}}{\sum_{i \neq j} c_{ij}} \quad (1.36)$$

che può essere considerata come la funzione obiettivo di tale metodo.

## 1.6 Information Entropy

L'Information Entropy è una misura dell'incertezza dei parametri del sistema, ed è utilizzata per valutare la qualità di una configurazione di sensori, [25]. È un metodo più generale del metodo dell'Effective Independence (§1.3), e si può definire come un suo sviluppo.

Si consideri una classe di parametri che descrivano il comportamento di una struttura, chiamato genericamente  $\boldsymbol{\theta}$ , che possono essere parametri modali o fisici. Tali parametri possono essere stimati usando dati misurati  $D$  da un sistema di monitoraggio. In particolare, assumendo il campione di dati misurati nel tempo  $t$ , per un numero totale di intervalli pari a  $N$ , si ha

$$D = \{\mathbf{y}(t), t = 1, \dots, N\} \quad (1.37)$$

in cui  $\mathbf{y}(t)$  è la risposta misurata. Ad ogni istante di tempo, la risposta misurata soddisfa la seguente relazione

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{L}\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta}) \quad (1.38)$$

in cui  $\mathbf{x}(t, \boldsymbol{\theta})$  è la risposta del sistema all'istante  $t$  valutata in ogni grado di libertà monitorato del sistema  $N_s$ ,  $\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta})$  è il vettore dell'errore di predizione dovuto agli errori sul modello e all'errore di misura ed  $\mathbf{L}$  è la matrice delle osservazioni, che specifica i gradi di libertà misurati rispetto ai gradi di libertà del sistema ed è composta di 0 e 1. La matrice  $\mathbf{L}$  quindi specifica la posizione dei sensori nella struttura.

Utilizzando un approccio di tipo bayesiano, le incertezze nei valori del set di parametri di interesse  $\boldsymbol{\theta}$  possono essere quantificate attraverso la funzione densità di probabilità PDF (probability density function) attraverso un modello di probabilità dell'errore di predizione  $\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta})$  sui dati acquisiti  $D$ . Si assume in particolare che il vettore dell'errore di predizione  $\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta})$ , ad un certo istante di tempo  $t$ , abbia una distribuzione di tipo gaussiano a media nulla e covarianza  $\boldsymbol{\Sigma}_t$ ; si assume inoltre che in due istanti diversi, le distribuzioni siano indipendenti. Applicando il teorema di Bayes, la funzione densità di probabilità può essere ottenuta come

$$p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) = \frac{c}{\sqrt{2\pi^N} \sqrt{\det(\boldsymbol{\Sigma}_t)}} \exp\left(-\frac{NN_s \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)}{2}\right) \quad (1.39)$$

in cui  $\pi$  è la distribuzione a priori di  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $c$  è una costante di normalizzazione scelta in modo che la funzione densità di probabilità (PDF) abbia integrale unitario,  $N$  è la lunghezza del tratto di tempo considerato,  $N_s$  è il numero di sensori.  $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)$  è definita genericamente come

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) = \frac{1}{NN_s} \sum_{k=1}^N [\mathbf{y}_k \mathbf{L} \mathbf{x}_k(\boldsymbol{\theta})]^T \boldsymbol{\Sigma}_t^{-1} [\mathbf{y}_k \mathbf{L} \mathbf{x}_k(\boldsymbol{\theta})] \quad (1.40)$$

ed è una misura della distanza tra la risposta misurata e la risposta del modello.

La funzione densità di probabilità è una misura dell'incertezza del valore dei parametri del modello strutturale, a partire dai dati misurati. Si può definire, a partire dalla PDF, l'Information Entropy che fornisce una misura diretta dell'incertezza nella stima dei parametri strutturali  $\boldsymbol{\theta}$

$$\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) = E_{\boldsymbol{\theta}}[-\ln(p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D))] = - \int \ln(p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)) p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) d\boldsymbol{\theta} \quad (1.41)$$

in cui  $E_{\boldsymbol{\theta}}[\cdot]$  indica il valore atteso della funzione densità di probabilità  $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D)$  rispetto ai parametri di interesse  $\boldsymbol{\theta}$ . Si può notare che l'Information Entropy dipende dai dati disponibili  $D \equiv D(\mathbf{L})$  e dalla configurazione dei sensori  $\mathbf{L}$ .

Qualora la quantità di dati acquisiti sia molto alta, cioè per  $N \cdot N_s \rightarrow \infty$ , allora si può approssimare asintoticamente l'Information Entropy; tale approssimazione è molto utile nella fase di progetto della posizione dei sensori. Sostituendo la Eq.1.39 nella Eq.1.41 e riscrivendo l'integrale come integrale di Laplace, che può essere approssimato asintoticamente con il metodo di Laplace, si ottiene:

$$\mathbf{h}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t | D) \approx \mathbf{H}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} N_s \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}))) \quad (1.42)$$

in cui

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) \approx \sum_{k=1}^N [\mathbf{L} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})]^T [\mathbf{L} \boldsymbol{\Sigma}_t \mathbf{L}^T] [\mathbf{L} \nabla_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\theta})] \quad (1.43)$$

e  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} = [\partial/\partial\theta_1, \dots]^T$  è l'operatore gradiente o Laplaciano. La matrice  $\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta})$  è semidefinita positiva e contiene ogni possibile informazione sull'incertezza dei parametri  $\boldsymbol{\theta}$  basati sui dati misurati nella configurazione definita dalla matrice delle osservazioni  $\mathbf{L}$ . Tale matrice è la matrice di Fisher, caso più generale della Fisher Information Matrix definita precedentemente in Eq.1.8 al §1.3, identiche nel caso in cui i parametri di interesse siano le forme modali e si trascuri la matrice di covarianza dell'errore di predizione.

La configurazione ottimale sarà quella che minimizza l'incertezza sui parametri che si vogliono stimare, dato che l'Information Entropy è una misura delle incertezze contenute nei dati misurati, la configurazione ottimale è selezionata come quella che minimizza tale entità

$$\mathbf{L}_{best} = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmin}} \mathbf{H}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) \quad (1.44)$$

in cui la matrice  $\mathbf{H}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta})$  è data da Eq.1.42, e la minimizzazione comprende tutte le possibili configurazioni sulle  $s$  posizioni di  $N_s$  sensori. Dalla relazione in Eq.1.42, discende che minimizzare l'Information Entropy, equivale a massimizzare il determinante della matrice di Fisher, per cui

$$\mathbf{L}_{best} = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmax}} \det \mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}). \quad (1.45)$$

### 1.6.1 Applicazione alla dinamica strutturale

In caso di linearità del modello strutturale, derivante dalla discretizzazione del dominio continuo usando il metodo agli elementi finiti, l'equazione del moto del sistema è

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \Gamma\mathbf{z}(t) \quad (1.46)$$

in cui  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  sono le matrici delle masse, degli smorzamenti e delle rigidezze rispettivamente,  $\mathbf{u}(t)$  è il vettore risposta in spostamento e  $\mathbf{z}(t)$  è il vettore delle forze che agiscono sul sistema,  $\Gamma$  è la matrice di selezione delle forze. La risposta misurata si assume possa essere in spostamento, velocità o accelerazione ed è chiamata  $\mathbf{x}(t)$  e può essere data rispettivamente da vettori in accelerazione  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ , velocità  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  oppure

spostamento  $\mathbf{u}(t)$ . La configurazione ottimale dei sensori ovviamente dipenderà dai parametri che si vogliono stimare, ad esempio parametri modali per l'identificazione dinamica o parametri meccanici o geometrici del modello.

Nel caso in cui si voglia stimare il vettore di forma modale  $\boldsymbol{\xi}$ , allora la configurazione ottimale dei sensori è quella che fornisce il maggior numero di informazioni per la stima del vettore di forma modale  $\boldsymbol{\xi}$ , e quindi in questo caso si ha che  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\xi}$ . Il vettore di risposta  $\mathbf{x}$  quindi in questo caso può essere scritto nella forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\theta} \quad (1.47)$$

in cui  $\boldsymbol{\Phi}$  è la matrice di forma modale contenente gli  $N_m$  modi di interesse. Sostituendo tale relazione in Eq.1.43 e notando che  $\nabla_{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}$ , si ottiene

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t) = (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{L}^T)^{-1} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}) . \quad (1.48)$$

Si nota quindi che la matrice di Fisher in questo caso è indipendente dal valore dei parametri  $\boldsymbol{\theta}$  e dall'eccitazione  $\mathbf{z}(t)$ . Si può notare come la relazione ottenuta coincida, come già accennato in precedenza, alla relazione riportata al §1.3 , con l'unica differenza della definizione della matrice di covarianza. La matrice di covarianza, in particolare, si può assumere come indicato successivamente al §1.6.2, mentre se si vuole ottenere la relazione in Eq. 1.8 si può porre pari alla matrice identità.

Valori non singolari della matrice di Fisher si possono ottenere soltanto quando il numero di sensori  $N_s$  è maggiore o uguale al numero di modi  $N_m$ . Diversamente, se il numero di sensori è inferiore al numero di modi, allora la matrice è singolare ed il determinante è sempre nullo per ogni possibile configurazione. Pertanto, la procedura di ottimizzazione non si può effettuare in questi casi, in quanto non si ha variabilità della funzione obiettivo in Eq.1.45 al variare della soluzione. Un modo per arginare questo problema, è massimizzare il prodotto degli autovalori non nulli della matrice di Fisher, [25].

### 1.6.2 Errore di predizione e matrice di covarianza

L'errore di predizione  $\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta})$  presente in Eq.1.38 generalmente dipende da due contributi: un termine  $\mathbf{e}_{meas}(t, \boldsymbol{\theta})$  che considera l'errore di misura e un termine  $\mathbf{e}_{model}(t, \boldsymbol{\theta})$  che considera gli errori di modello. Si può quindi considerare che l'errore di predizione possa essere scomposto in questi due contributi:

$$\mathbf{e}(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{e}_{meas}(t, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{e}_{model}(t, \boldsymbol{\theta}) . \quad (1.49)$$

Si assume che gli errori di modello e l'errore di misura siano indipendenti uno dall'altro, ipotesi generalmente verificata in quanto l'errore di misura è sostanzialmente dipendente dalla tipologia di strumentazione utilizzata (ad esempio presenza di rumore nel dato che dipende dalla sensibilità del sensore) mentre gli errori di modello dipendono dalle semplificazioni insite nella modellazione stessa e quindi indipendenti dalla strumentazione impiegata. A partire da questa assunzione, la matrice di covarianza  $\Sigma_t$  dell'errore di predizione totale, può essere determinata con la somma delle corrispettive matrici di covarianza dell'errore di predizione sulle misure  $\bar{\Sigma}$  e la matrice di covarianza dell'errore di predizione sul modello  $\Sigma$

$$\Sigma_t = \bar{\Sigma} + \Sigma . \quad (1.50)$$

Nell'installazione del sistema di monitoraggio si deve decidere come valutare tali matrici. Le assunzioni in base alle quali si scelgono certi valori piuttosto che altri dipendono generalmente dalla natura del problema analizzato. È ragionevole considerare che l'errore di misura sia indipendente dalla posizione dei sensori, e quindi che la matrice di covarianza  $\bar{\Sigma}$  si possa scrivere in forma diagonale  $\bar{\Sigma} = s^2 \mathbf{I}$ , in cui  $\mathbf{I}$  è la matrice identità. Per quanto riguarda gli errori di modello invece si può presumere che ci sia un certo grado di correlazione tra posizioni limitrofe, che può essere considerata valutando una matrice di covarianza  $\Sigma$  non diagonale. La correlazione  $\Sigma_{ij}$  tra la predizione degli errori di modello per i gradi di libertà rispettivamente  $i$  e  $j$  può essere determinata ad esempio tramite la seguente relazione

$$\Sigma_{ij} = E[\varepsilon_{i,mod}\varepsilon_{j,mod}] = \sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}} R(\delta_{ij}) , \quad (1.51)$$

in cui si considera la distanza  $\delta_{ij}$  tra i gradi di libertà, e la funzione di correlazione  $R(\delta_{ij})$  si assume debba soddisfare la condizione  $R(0) = 1$ . In generale la matrice di covarianza dovrebbe essere consistente con i reali errori osservati dalle misure. Tuttavia allo stadio di progettazione del sistema di monitoraggio è assai probabile che non ci siano misurazioni disponibili per guidare il progettista nella scelta della correlazione tra gli errori di predizione, ed è quindi necessario ipotizzare una correlazione per determinare la configurazione. [25] propone di considerare come funzione di correlazione

$$R(\delta) = \exp[-\delta/\lambda] \quad (1.52)$$

in cui  $\lambda$  è una misura di correlazione spaziale, ed è detta lunghezza di correlazione.

### 1.6.3 Effetto della lunghezza di correlazione

Si consideri una configurazione  $L_p$  di  $p$  sensori che sono posizionati su una struttura, e sia  $\Delta$  la distanza più piccola tra le coppie di sensori della configurazione. Si assume che la lunghezza di correlazione  $\lambda$  sia piccola abbastanza in relazione a  $\Delta$ , in modo tale che non ci sia correlazione tra gli errori di predizione tra i diversi sensori facenti parte della configurazione. A questo punto si inserisca nella configurazione un nuovo sensore, e si definisca  $\delta$  la sua distanza dal sensore ad esso più vicino, che ad esempio è la distanza dal sensore  $p$ -esimo. La nuova configurazione viene chiamata  $L_{p+1}$ . Se la lunghezza di correlazione  $\lambda$  era piccola rispetto a  $\Delta$ , non necessariamente lo è rispetto a  $\delta$ , e quindi si può pensare che ci sia una correlazione tra l'errore di predizione tra l'ultimo sensore posizionato e quello ad esso più vicino.

In [25] è analiticamente dimostrato che posizionando un sensore aggiuntivo alla configurazione  $L_p$  di  $p$  sensori, ottenendo una configurazione  $L_{p+1}$  di  $p + 1$  sensori, l'Information Entropy della nuova configurazione è una funzione decrescente della distanza  $\delta$  tra il nuovo sensore e quelli della configurazione precedente. Quanto detto implica che l'apporto di informazioni alla configurazione è tanto maggiore tanto più la posizione aggiunta è lontana. Di conseguenza, la correlazione spaziale tende a spostare il sensore lontano dalle posizioni già scelte per gli altri sensori.

Per quanto riguarda il valore da assegnare a  $\lambda$  non viene attribuito a priori dagli autori [25], e non viene fornito un metodo per determinarlo. Il progettista, a seconda della sua esperienza e sensibilità può tarare questo coefficiente a sua discrezione. Può tuttavia capitare che alcuni sensori vengano posizionati esattamente in corrispondenza dei vincoli o molto vicino ad essi, tali punti infatti non sono esclusi a priori dal metodo, e qualora il valore di  $\lambda$  tenda a posizionare i sensori abbastanza lontano tra loro, può succedere che un punto di questi sia preferibile per la metodologia rispetto ad altri.



## Capitolo 2

# Algoritmi di ottimizzazione

In un problema di determinazione della configurazione ottimale, i sensori sono posizionati in modo che i dati misurati forniscano il maggior numero di informazioni possibili sui parametri di interesse per rappresentare il comportamento strutturale, secondo la funzione obiettivo scelta. In particolare, per un modello con  $N_p$  gradi di libertà il numero di possibili configurazioni distinte di  $N_s$  sensori è

$$N_{conf} = \frac{N_p!}{N_s!(N_p - N_s)!} \quad (2.1)$$

che per la maggior parte dei casi pratici di interesse consiste in un numero estremamente alto. Questa conclusione porta al fatto che una ricerca esaustiva sia dal punto di vista dell'onere computazionale assolutamente sconsigliabile e addirittura proibitiva anche in casi molto semplici e con un numero di gradi di libertà limitato.

Queste tipologie di problemi richiedono soluzioni di ricerca efficienti al fine di generare risultati accettabili in tempi ragionevoli, ed a tal proposito vengono spesso utilizzati algoritmi che ricercano una configurazione sub-ottimale. Diverse tipologie di algoritmo possono essere utilizzate per risolvere problemi di ottimizzazione: dai metodi deterministici, a metodi euristici di ottimizzazione combinata, fino agli algoritmi di tipo sequenziale. Alcuni approcci applicano vincoli alla funzione obiettivo per snellire il processo di ottimizzazione, altri usano tecniche avanzate di analisi artificiale, come gli algoritmi genetici o di simulated annealing. Generalmente la scelta di una tipologia di algoritmo rispetto ad un altro, per la soluzione di un problema, si basa sulla robustezza nei confronti del problema specifico e sull'efficienza computazionale.

Lo scopo del presente capitolo non è quello di riportare ed analizzare nel dettaglio ogni metodologia di ricerca dell'ottimo presente in bibliografia, ma di fornire una pa-

noramica di diverse soluzioni esistenti, soffermandosi in particolare sull'applicazione di tali algoritmi al problema della determinazione della configurazione ottimale dei sensori, portando alla luce eventuali pregi e criticità di diversi metodi.

In particolare, dopo una breve panoramica sui metodi di tipo deterministico e i metodi di ottimizzazione combinata come gli algoritmi genetici, di simulated annealing, i particle swarm, monkey, e di ant colony, ci si è soffermati sugli algoritmi sequenziali, che permettono di determinare una soluzione sub-ottimale ma molto vicina a quella di ottimo a fronte di un onere computazionale estremamente ridotto. Alla fine del capitolo inoltre, ci si è soffermati su problemi numerici riscontrati nel processo di ottimizzazione a causa della definizione delle diverse funzioni obiettivo per i problemi di determinazione della configurazione ottimale dei sensori, proponendo una procedura per conferire più stabilità al processo di ottimizzazione.

## 2.1 Metodi deterministici

Per il posizionamento ottimale dei sensori nelle strutture sono disponibili una serie di metodi deterministici vincolati e non vincolati [27]. Metodi semplici sono utilizzabili per ricerche di minimi locali, mentre tecniche di ottimizzazione vincolata sono più utilizzate per un grado di complessità maggiore. Per strutture con una forma semplice e regolare come travi e lastre, la configurazione ottimale può essere ragionevolmente determinata con una procedura deterministica vincolata come un metodo ricorsivo quadratico (recursive quadratic programming method), dato che le deformate modali e le frequenze possono essere descritte accuratamente utilizzando espressioni analitiche. Nella maggior parte dei casi progettuali però solo determinate posizioni sono realmente disponibili, e la selezione delle posizioni ottimali diventa un problema discreto (integer programming), computazionalmente complicato e costoso da risolvere piuttosto che un problema continuo. In alcuni casi le variabili discrete possono essere convertite al continuo e quindi risolvere il problema con un approccio deterministico. Si faccia riferimento a quanto riportato ad esempio in [35, 36].

Esistono molti vantaggi dei metodi di ottimizzazione di tipo continuo, tuttavia queste tecniche di ottimizzazione necessitano del gradiente della funzione obiettivo, quindi è facile che falliscano quando esistono punti di ottimo locali, problema molto frequente nella determinazione della configurazione ottimale dei sensori.

## 2.2 Metodi di ottimizzazione combinata/combinatoria

Dato che i metodi di tipo deterministico non sono in grado di manipolare in modo efficace la presenza di più punti di ottimo locale e possono presentare in questi casi problemi nella determinazione del minimo globale della funzione, sono nati metodi di ottimizzazione basati su analogie con processi fisici e biologici, ne sono esempi gli algoritmi genetici, di simulated annealing, i particle swarm optimization, i monkey algorithm e gli algoritmi di ant colony optimization [27].

### 2.2.1 Algoritmi Genetici

Gli algoritmi genetici (GA) cercano di imitare i processi di evoluzione della specie applicando il principio di sopravvivenza di una determinata caratteristica genetica rispetto ad un'altra. Si genera una popolazione iniziale generalmente random di soluzioni, si stabilisce una funzione di interpolazione che determini un costo di ogni soluzione della popolazione, si applicano le operazioni genetiche di sovrapposizione *crossover* e mutazione *mutation* per produrre nuove soluzioni sulla base di quelle esistenti, e infine si ruotano *turning* i parametri dell'algoritmo in base alla dimensione della popolazione iniziale e alla probabilità che accada l'operazione genetica svolta [26].

Nel caso di determinazione della configurazione ottimale, le variabili sono le posizioni dei sensori, che possono essere nello specifico le coordinate spaziali o un indice numerico identificativo del nodo. Tradizionalmente, gli algoritmi genetici applicati al posizionamento dei sensori si traducono in un codice binario che è semplice ed intuitivo [18]. Tuttavia il numero dei sensori della configurazione può essere alterato nelle operazioni di sovrapposizione e mutazione, cosa che invece sarebbe bene evitare. In aggiunta per grandi strutture tale metodo richiede delle stringhe molto lunghe comportando un discreto aumento dell'onere computazionale.

In [24] gli algoritmi genetici sono applicati secondo quanto sviluppato nelle tecniche di Machine Learning [37]. Il numero delle variabili è posto pari al numero di sensori  $N_s$  da posizionare nella struttura, e ogni variabile può assumere un numero intero compreso tra 0 ed il numero di possibili posizioni, cioè i gradi di libertà  $N_p$ . Per la rappresentazione del possibile valore di una variabile viene utilizzata una stringa in codice binario, composta quindi da un numero di bit  $n_{bit}$  pari a  $\log(N_p)/\log(2)$ . La dimensione della stringa è scelta in modo tale che sia coperto tutto il range di possibile variazione di ogni variabile. La lunghezza del cromosoma sarà quindi pari a  $n_{bit} \cdot N_s$  per un sistema di monitoraggio composto da  $N_s$  sensori. Una possibile soluzione sarà data da una stringa di lunghezza  $n_{bit} \cdot N_s$ , e quindi viene generata

una popolazione random di possibili soluzioni di fissata dimensione. Le operazioni di sovrapposizione e mutazione vengono utilizzate per formare la seconda popolazione. Le probabilità di sovrapposizione e mutazione sono mantenute fisse. Per quanto riguarda la definizione della funzione costo si faccia riferimento ai diversi modelli definiti al capitolo §1.

Si può notare che per modelli con un numero di gradi di libertà  $N_p$  inferiore a  $2^{n_{bit}}$ , la rappresentazione può dare delle stringhe con valore maggiore rispetto al numero totale dei gradi di libertà del modello. La selezione di queste stringhe nella generazione successiva può essere evitata assegnando un valore di interpolazione molto alto. Un altro problema che può essere incontrato nell'applicazione degli algoritmi genetici è che nella rappresentazione binaria delle variabili può essere data la precedenza ad una configurazione di sensori che comprenda un numero di posizioni distinte inferiore al numero previsto  $N_s$ . La valutazione della funzione obiettivo è effettuata quindi utilizzando solo posizioni distinte sulla struttura cioè trascurando l'eventualità in cui più sensori siano previsti in una sola posizione. Queste configurazioni che avrebbero un numero di posizioni inferiori a  $N_s$  hanno generalmente un valore della funzione obiettivo molto buono ma devono essere escluse dalla popolazione. Per invalidare queste stringhe bisogna dare un valore alla funzione obiettivo molto alto che però comporta una possibile decelerazione della velocità di convergenza dell'algoritmo genetico.

### 2.2.2 Algoritmi di Simulated Annealing

La procedura di ottimizzazione di Simulated Annealing (SA) riprende il processo fisico della termodinamica, in particolare il modo in cui un liquido passa allo stato solido cristallizzando, o i vetri vengono raffreddati e riportati ad alta temperatura (metals cool and anneal) [27]. I processi di ottimizzazione di simulated annealing sono di tipo generale, la loro specifica implementazione nella determinazione della configurazione ottimale dei sensori è definita dalla valutazione della funzione obiettivo, dell'operatore di perturbazione, dai vincoli e dal settaggio dei parametri. L'operatore di perturbazione lavora su ogni variabile, ad ogni iterazione l'algoritmo seleziona in modo casuale una variabile per la perturbazione. L'operatore a questo punto usa dei coseni direttori per ottenere una direzione random. I vincoli spaziali impediscono alla soluzione di allontanarsi dalla regione di posizionamento dei sensori. I parametri dell'algoritmo determinano le sue performance, la sua velocità e la qualità della soluzione. Generalmente per aumentare le performance bisogna che la ricerca iniziale sia puramente stocastica, che significa immaginare un'alta temperatura seguita da un processo di raffreddamento molto lento.

Gli algoritmi basati su metodi di simulated annealing possono determinare punti di ottimo locale, e quindi sono generalmente combinati con altri metodi di ottimizzazione per evitare il problema dei minimi e massimi locali.

Ad esempio in [38] è stato sviluppato un modello matematico di minimizzazione dell'energia totale per determinare la posizione di sensori e/o attuatori in una trave per un sistema di controllo attivo basato su algoritmi genetici combinati con algoritmi di simulated annealing. Risultati sperimentali dimostrano che questo algoritmo ibrido ha un'alta efficienza e una convergenza globale per il problema di posizionamento dei sensori e/o attuatori. In [39] è stato sviluppato un processo di ottimizzazione multiobiettivo basato sugli algoritmi di Simulated Annealing includendo variabili sia discrete che continue. I risultati di esempi numerici tra i quali una trave incastrata con sezione scatolare hanno dimostrato che tale tipologia di algoritmo ha un ridotto onere computazionale rispetto alle tecniche di programmazione non lineare.

### 2.2.3 Algoritmi Particle Swarm

Gli algoritmi di ottimizzazione di tipo Particle Swarm (PSO), a sciami di particelle, sono tecniche basate su un metodo di ricerca stocastico a partire da una popolazione iniziale, ispirato al comportamento di raggruppamento degli uccelli in stormi [28]. Il procedimento è simile a quello degli algoritmi genetici e algoritmi basati sui processi evolutivisti, considerando una popolazione iniziale random tra le diverse soluzioni candidate, in questo caso di particelle.

Tali particelle si spostano nello spazio di ricerca con velocità random definite ad ogni step (velocità della corrente), tenendo memoria della migliore soluzione determinata nei diversi step (spazio esplorato), e della soluzione generale migliore trovata fino a quel punto (conoscenza generale condivisa). Gli algoritmi PSO hanno ottime performance rispetto ad altri algoritmi di ottimizzazione e sono semplici da realizzare. Molte ricerche si sono spese inoltre per migliorarne ulteriormente l'onere computazionale ed il tempo di calcolo per valutare la funzione obiettivo, tuttavia queste tipologie di algoritmo rimangono spesso impraticabili per ampie configurazioni di sensori da progettare per strutture al vero, con un ampio numero di gradi di libertà. Ad esempio sono state proposte procedure combinate PSO - algoritmi sequenziali (vedi successivo §2.3) che oltre a diminuire il tempo di analisi conferiscono una migliore convergenza al metodo [40].

### 2.2.4 Algoritmi Monkey

Gli algoritmi tipo Monkey sono basati sul processo attraverso il quale le scimmie si arrampicano sulle montagne [27, 41]. Si assume che ci siano diverse montagne in un territorio assegnato, cioè nello spazio di ottimizzazione del problema, e al fine di determinare la montagna più alta, cioè il valore massimo della funzione obiettivo, le scimmie devono salire rispetto alla loro rispettiva posizione.

Gli step sui quali si basa la procedura di determinazione dell'ottimo sono: il *climbing*, cioè l'arrampicamento nel quale viene ricercata la soluzione ottimale locale, il *watch-jump* nel quale si valuta la presenza di punti nei quali il valore della funzione obiettivo dia risultati migliori della soluzione determinata fino a quel momento e accelerare il processo di ricerca delle scimmie, ed infine il *somersault*, cioè la capriola che permette alle scimmie di spostarsi rapidamente in un nuovo dominio di ricerca. Ripetendo qualche volta il processo, attuato mediante questi tre step, le scimmie sono in grado di trovare la cima della montagna più alta, e quindi il valore ottimale. Questa tipologia di algoritmo viene utilizzata per risolvere problemi di non linearità, non differenziabilità e problemi di grandi dimensioni.

La sostanziale differenza con gli altri algoritmi di tipo evolutivo è che il tempo computazionale maggiore della procedura è utilizzato nello step di *climbing* per la ricerca dei punti di ottimo locale. La caratteristica essenziale dell'algoritmo è che richiede il calcolo del pseudogradiente della funzione obiettivo, che perciò necessita di solo due misure della funzione stessa indipendentemente dalla dimensione del problema di ottimizzazione. Questo comporta un significativo decremento dell'onere computazionale nel processo di ottimizzazione, ed inoltre fa convergere velocemente la soluzione anche in problemi di grosse dimensioni e con un ampio numero di punti di ottimo locale. In aggiunta sono richiesti solo pochi parametri nel processo di ottimizzazione e questo lo rende di facile implementazione.

### 2.2.5 Algoritmi di Ant Colony

Il primo algoritmo di ottimizzazione del tipo Ant Colony (ACO) aveva lo scopo di ricercare la traiettoria ottimale in un grafico, ed è basato sul comportamento delle formiche che cercano il percorso più breve tra la loro colonia e le risorse di cibo. L'idea originale è poi stata diversificata per risolvere una più ampia classe di problemi [42].

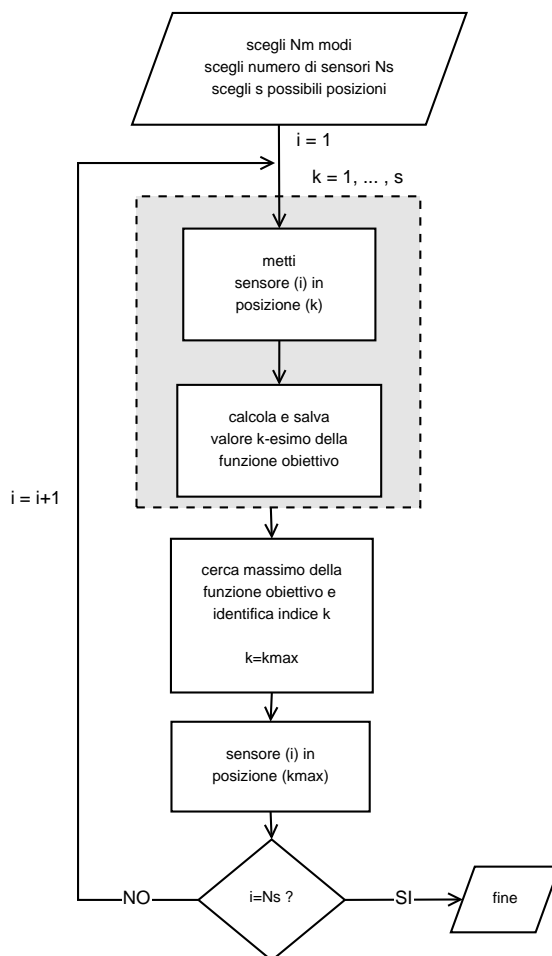
Nel mondo naturale le formiche girovagano inizialmente in modo casuale, e dopo aver trovato il cibo ritornano alla colonia rilasciando sul percorso del feromone. Se le altre formiche trovano questo percorso sono predisposte a seguire la traccia lasciata,

smettendo di girovagare ma tornando alla colonia e rinforzando la traccia stessa nel caso in cui trovino altro cibo. Nel tempo però il feromone tende ad evaporare riducendo l'attrazione sulle altre formiche e quindi più la formica si deve spostare per trovare il cibo e tornare alla colonia, più tempo il feromone ha per evaporare. D'altra parte un percorso corto viene marcato più frequentemente e quindi la densità del feromone cresce rispetto al percorso lungo. Quando una formica trova un buon percorso (corto), le altre formiche tendono a seguire questo percorso e una risposta positiva spinge tutte le formiche ad un solo percorso. L'evaporazione del feromone inoltre evita la convergenza in punti di ottimo locale. Inoltre se l'evaporazione è nulla il percorso scelto dalla prima formica tende ad essere eccessivamente attraente per le altre formiche, e quindi l'esplorazione dello spazio di soluzione deve essere vincolato.

L'idea è quindi quella di imitare il comportamento con delle formiche simulate che camminano nel grafico rappresentante il problema da risolvere, cominciando da posizioni random. Ad ogni step le formiche valutano i possibili movimenti e selezionano il migliore per completare il giro. Per applicare questo tipo di procedura a problemi di determinazione della configurazione ottimale sono state fatte alcune modifiche: la prima è che cercando uno dei possibili subset tra tutti i possibili, non è necessario che si visitino tutte le possibili posizioni a disposizione, l'altra differenza è che le formiche sono cieche e quindi la distribuzione dei sensori può essere valutata solo quando tutte le formiche sono tornate dal giro.

## 2.3 Metodi di ottimizzazione sequenziale

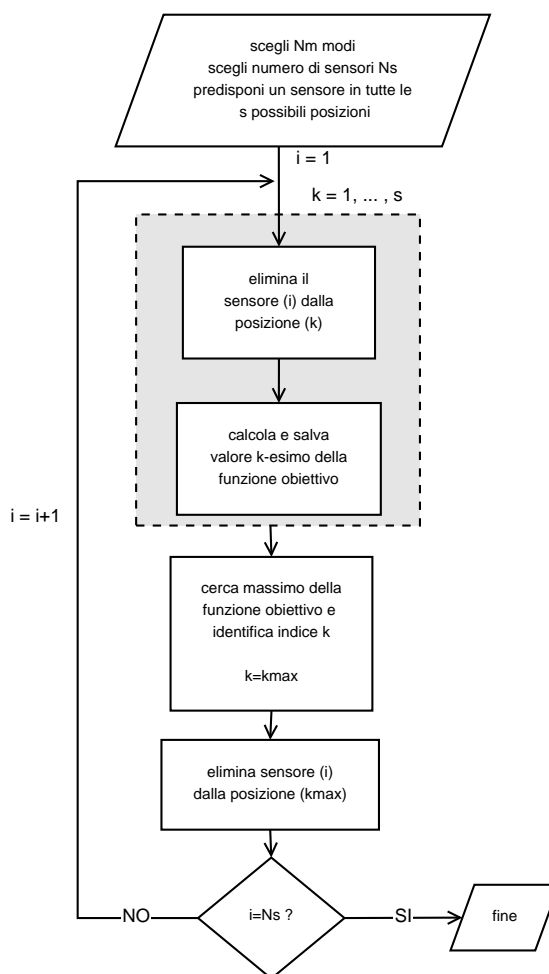
Gli algoritmi di posizionamento sequenziale (Sequential Sensor Placement, SSP) sono metodi sistematici e computazionalmente efficienti per ottenere una buona configurazione per i sensori anche se non è garantito che sia la posizione effettivamente ottimale [29]. La posizione di  $N_s$  sensori è valutata appunto sequenzialmente, posizionando sulla struttura un sensore alla volta, nella posizione in particolare che fornisce la massima riduzione della funzione obiettivo considerata (§1). Nello specifico, la posizione del primo sensore è scelta come quella che massimizza la funzione obiettivo per un solo sensore. Data la posizione ottimale per un sensore, la posizione del secondo sensore è scelta come quella che massimizza la funzione obiettivo calcolata per i due sensori, considerando il primo sensore fisso nella posizione ottimale definita allo step precedente. La procedura continua in questo modo ottenendo allo step  $i$ -esimo la posizione per il sensore  $i$ -esimo tenendo fisse e considerando ottimali



**Figura 2.1:** diagramma dell'algoritmo sequenziale di tipo FSSP.

le posizioni dei precedenti  $(i - 1)$  sensori determinate nei precedenti  $(i - 1)$  step. La procedura continua fino a quando tutti gli  $N_s$  sensori sono posizionati, Fig.2.1.

Questa procedura, come accennato in precedenza, fornisce in generale una soluzione che non è garantito sia realmente ottimale. Questa è garantita solo nel caso in cui la posizione ottimale per un numero  $i$  di sensori sia un sottoinsieme della posizione ottimale di  $(i + 1)$  sensori per ogni sottoinsieme  $i$  con  $i = 1, \dots, N_s$ , condizione che raramente viene soddisfatta. Applicazioni numeriche [24] dimostrano che in realtà la soluzione è molto vicina e in molti casi coincide con la configurazione realmente ottimale calcolata con altre tipologie di algoritmo. Dato che l'onere computazionale è considerevolmente inferiore rispetto ad algoritmi genetici, metodi di ricerca diretta, etc, e la soluzione mantiene un alto livello di accuratezza, questi algoritmi sono molto utilizzati ed in genere preferiti rispetto alle altre tipologie riportate nei precedenti paragrafi.



**Figura 2.2:** diagramma dell'algorithm sequenziale di tipo BSSP.

La procedura sequenziale esposta viene in genere chiamata Forward Sequential Sensor Placement (FSSP). L'algorithm sequenziale però può essere utilizzato anche in ordine inverso, avendo al primo step un sensore su ogni grado di libertà del sistema, ed eliminando successivamente ad ogni step il sensore della posizione che induce il minimo decremento della funzione obiettivo. La procedura prosegue fino a che il numero dei sensori rimanenti è pari al numero di sensori desiderato  $N_s$ . Questo algorithm è usualmente chiamato Backward Sequential Sensor Placement (BSSP), Fig.2.2.

Per iniziare la procedura di tipo SSP si deve scegliere un set iniziale di gradi di libertà plausibili per il posizionamento dei sensori che coprano la struttura ed in particolare le aree di interesse. Alcuni autori [4] fanno semplici deduzioni intuitive per operare tale selezione, basate sull'esperienza e sulla tipologia strutturale per

la visualizzazione delle forme modali. Tale metodo prende il nome di MinMAC e viene utilizzato per cominciare una procedura di tipo FSSP in cui però la funzione obiettivo richiede una minimizzazione. Tuttavia è stato successivamente determinato che la funzione obiettivo non è decrescente in modo monotono calando il numero di sensori, poiché il sensore che viene incluso o escluso dalla configurazione può entrare in conflitto con i sensori posizionati negli step precedenti o addirittura con il set di inizio procedura. Da un punto di vista analitico il vettore riga determinato per includere il nuovo sensore ha una forte relazione lineare con i precedenti. È stato quindi sviluppato sulla base del metodo MinMAC una procedura di tipo BSSP: la differenza sostanziale risiede nel criterio di stop, che prevede di ottenere un set iniziale di sensori con un numero complessivo maggiore di quello a cui si fermava il MinMAC originario.

Successivamente è stato dimostrato [24] che utilizzando algoritmi di tipo FSSP, il numero totale di valutazioni della funzione obiettivo per il posizionamento ottimale dell' $i$ -esimo sensore, posto che i sensori  $(i - 1)$  sono già stati posizionati, è pari a  $(N_p - i + 1)$ , con  $N_p$  pari al numero totale delle posizioni disponibili. Quindi il numero totale di valutazioni della funzione richieste per progettare la configurazione *sub-ottimale* dati  $N_s$  sensori è pari a  $\sum_{i=1}^{N_s} (N_d - i + 1) \leq N_s N_p$ . Il limite superiore di  $N_s N_p$  è una buona stima nel caso in cui il numero di sensori  $N_s$  sia piccolo rispetto al numero di posizioni totali disponibili  $N_p$ . In aggiunta la determinazione della configurazione ottimale da 1 fino a  $N_p$  sensori richiede un totale di  $N_d(N_d + 1)/2$  valutazioni della funzione che è un numero estremamente piccolo rispetto al numero  $N_{conf}$  dato in Eq. 2.1.

Si può similmente determinare il numero di volte in cui è necessario valutare la funzione nel caso di procedura BSSP, pari a  $\sum_{i=1}^{N_p - N_s + 1} (N_d - i + 1) \leq N_p(N_p + 1)/2$ , in cui il limite superiore  $N_p(N_p + 1)/2$  è una buona stima per un numero piccolo di sensori  $N_s$  rispetto al numero di posizioni possibili  $N_p$ . Nel caso in cui il numero di sensori sia piccolo rispetto al numero totale di posizioni possibili, caso abbastanza tipico in applicazioni della dinamica strutturale, un algoritmo di tipo BSSP ha uno sforzo computazionale di  $N_p/(2N_s)$  volte superiore rispetto ad un algoritmo di tipo FSSP. Quindi dal punto di vista computazionale un algoritmo di tipo FSSP è da preferirsi in queste tipologie di applicazioni.

## 2.4 Implementazione nel caso di ottimizzazione della posizione dei sensori

Molte volte le matrici che definiscono la funzione obiettivo del problema §1, risultano singolari qualora il numero di sensori  $N_s$  sia inferiore del numero di modi di vibrare  $N_M$  considerato. Questa osservazione ha la conseguenza che quando si considera una misura di tali matrici, che spesso è il determinante, per definire la funzione obiettivo vera e propria, questa sia sempre nulla, e quindi sia impossibile procedere con l'ottimizzazione (§1.6.1). Questo significa che in realtà il contenuto di informazioni nei dati misurati non sarebbe sufficiente per stimare tutti i parametri desiderati allo stesso tempo. In ogni caso il problema rimane rilevante nel caso in cui l'algoritmo di ottimizzazione sia del tipo FSSP, in quanto la procedura inizia con la struttura priva di sensori e procede posizionando un sensore alla volta sulla stessa, §2.3.

In letteratura si propone di ovviare a tale problema considerando il prodotto degli autovalori non nulli della matrice che definisce la funzione obiettivo, anziché il determinante [25] che implicherebbe invece la moltiplicazione di tutti gli autovalori dando l'indeterminatezza oggetto del problema. In questo modo la procedura permette di posizionare i sensori sistematicamente sulla struttura anche nel caso indefinito di un numero di sensori molto basso.

Tuttavia, a causa di approssimazioni numeriche nel processo di diagonalizzazione, possono apparire degli autovalori prossimi allo zero. Questo accade soprattutto qualora sia necessario l'inversione di una matrice, come ad esempio nel caso della funzione obiettivo dei metodi dell'Effective Independence (§1.3) e suoi sviluppi. Questi autovalori possono essere considerati o meno a seconda di un valore di soglia che deve essere impostato, e che tuttavia conferisce grande variabilità al risultato a seconda del valore scelto, ed in ogni caso si manifestano grosse fluttuazioni della funzione obiettivo anche per uno stesso valore soglia.

Per questi motivi si è ritenuto opportuno scegliere una procedura più stabile. Per chiarezza esplicitiva si consideri il caso in cui la funzione obiettivo sia definita dal metodo dell'Information Entropy (§1.6), per il quale, nel caso di identificazione modale si era definito all'Eq.1.48 e qui riportata

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}). \quad (2.2)$$

Dato che la matrice di Fisher  $\mathbf{Q}$  è definita positiva, allora anche termine  $(\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1}$  è una matrice definita positiva. Pertanto è possibile svolgere una fattorizzazione di

Cholesky ottenendo

$$(\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T \quad (2.3)$$

e quindi

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})^T \mathbf{C}\mathbf{C}^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (2.4)$$

in cui  $\mathbf{A} = \mathbf{C}^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})$  è una matrice di dimensioni  $N_s \times N_M$ , con  $N_s$  pari al numero di sensori e  $N_M$  pari al numero di modi. A questo punto si svolge una decomposizione a valori singolari della matrice  $\mathbf{A}$ , in cui il quadrato di ogni  $i$ -esimo valore singolare  $\sigma_i(\mathbf{A})$  è pari agli autovalori positivi della matrice di Fisher  $\mathbf{Q}$ . Pertanto la configurazione ottimale può essere facilmente determinata come

$$\mathbf{L}_{best} = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmax}} \det \mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}_t, \boldsymbol{\theta}) = \underset{\mathbf{L}}{\operatorname{argmax}} \prod_i \sigma_i(\mathbf{A}) . \quad (2.5)$$

La procedura proposta richiede un onere computazionale inferiore e permette di ottenere risultati più stabili rispetto al prodotto degli autovalori non nulli.

## Capitolo 3

# Confronto tra diverse metodologie nella determinazione della configurazione ottimale

Nella seguente sezione diversi metodi bibliografici saranno applicati a casi studio per valutarne analogie e differenze. In particolare sono stati considerati il metodo dell'Effective Independence EFI (§1.3), il metodo EFI-dpr (§1.3.1), il metodo della distribuzione di energia cinetica KEM (§1.4.2) ed il metodo dell'Information Entropy IE (§1.6). L'algoritmo di ottimizzazione implementato è del tipo Forward Sequential Sensor Placement, FSSP, facente parte delle procedure di tipo sequenziale (§2.3) e scelto in particolare per il ridotto onere computazionale richiesto. Per dare stabilità alla procedura e ridurre ulteriormente l'onere computazionale, si è svolta innanzitutto una fattorizzazione di Cholesky e successivamente una decomposizione ai valori singolari della funzione obiettivo, come discusso al capitolo §2.4.

Il caso studio è una trave semplicemente appoggiata, introdotto come semplice esempio per testare la qualità delle procedure e comprenderne l'applicabilità. Nel capitolo successivo saranno analizzati anche un telaio spaziale come semplice estensione tridimensionale ed una passerella pedonale per valutare l'applicabilità delle procedure ad un caso reale.

In casi molto semplici, per capire la qualità di una configurazione rispetto ad un'altra, possono bastare delle semplici deduzioni in base alle informazioni che si desiderano ottenere dal sistema di monitoraggio. Tuttavia, è interessante definire dei parametri che quantifichino la bontà di una soluzione rispetto le altre per avere un

metro oggettivo. Per questo sono stati introdotti dei criteri per valutarne la bontà di una configurazione rispetto ad un'altra. Bisogna sottolineare che tali criteri possono essere utilizzati solo per confrontare diverse configurazioni ottenute e non definiscono dei range assoluti. Generalmente tali metodi sono nati per definire essi stessi una configurazione ottimale dei sensori, e semplicemente vengono più ricorrentemente utilizzati in bibliografia per questo scopo piuttosto che l'altro. Per questo motivo è consigliabile considerare diversi criteri indipendenti tra loro [5, 31]; sono stati scelti in particolare l'errore quadratico medio, la decomposizione a valori singolari e la Fisher Information Matrix, tutti metodi di cui precedentemente discusso al capitolo §1 e in questa sede brevemente ritrattati per indicarne l'applicazione in tale ambito.

**Errore quadratico medio RMS** Questo metodo, detto Root Mean Square RMS, deriva direttamente dal Modal Assurance Criterion §1.1, nato per valutare la correlazione tra le deformate modali del modello numerico  $\phi_a$  e quelle provenienti da test sperimentali  $\phi_e$ . Se il termine  $hk$  della matrice MAC è nullo, allora i vettori  $\phi_{ah}$  e  $\phi_{ek}$  sono non correlati, mentre se tale termine è pari a 1 allora i modi hanno massima correlazione.

$$MAC_{hk} = \frac{(\phi_{ah}^T \phi_{ek})^2}{(\phi_{ah}^T \phi_{ah})(\phi_{ek}^T \phi_{ek})} \quad (3.1)$$

Nel caso in cui si voglia capire la qualità di una configurazione, dato che il problema di progetto del sistema di monitoraggio non ha a disposizione dati sperimentali perché i sensori devono ancora essere installati, si possono paragonare solo modi di vibrare analitici immaginando di avere l'informazione solo nei gradi di libertà sui quali verrà collocato il sensore. Come conseguenza i termini sulla diagonale ( $h = k$ ) sono sempre uguali ad 1, mentre i termini fuori diagonale possono variare tra 0 e 1. Quindi la migliore configurazione dei sensori è semplicemente quella che ha i termini fuori diagonali piccoli.

Per ottenere una misura della qualità della configurazione dei sensori, si calcola il valore medio quadratico (root mean square, *rms*) degli elementi fuori diagonale della matrice MAC

$$rms = \sqrt{\frac{1}{N_s(N_s - 1)} \sum_{h=1}^{N_s} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{N_s} (MAC_{hk})^2}. \quad (3.2)$$

Una buona procedura per testare l'accuratezza della configurazione selezionata è

paragonare il valore *rms* considerando tutti i sensori  $N_s$ . La configurazione migliore è quella che minimizza tale valore.

**Numero di Condizionamento CN** Questo metodo deriva dalle decomposizione a valori singolari della matrice di forma modale nel prodotto di tre matrici,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  e  $\mathbf{V}$ , come segue:

$$\mathbf{\Phi}_{m \times n} = \mathbf{U}_{m \times n} \mathbf{\Sigma}_{n \times n} \mathbf{V}_{n \times n}^T. \quad (3.3)$$

La matrice  $\mathbf{\Sigma}$  è una matrice diagonale con termini sulla diagonale pari ai valori singolari della matrice  $\mathbf{\Phi}$ , le matrici  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono ortogonali. Il numero di valori singolari non nulli determina il rango della matrice decomposta. Se i vettori delle deformate modali sono linearmente dipendenti, allora almeno un valore singolare è nullo. Per confrontare diverse configurazioni di sensori, si considera il rapporto tra il più grande  $\sigma_{max}$  ed il più piccolo  $\sigma_{min}$  valore singolare, che corrisponde al numero di condizionamento del problema,

$$cn = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}. \quad (3.4)$$

Ci sono diversi motivi per utilizzare tale metodo per valutare la bontà di una configurazione:

- *ortogonalità*: la decomposizione a valori singolari è un modo per valutare l'ortogonalità dei modi di vibrare. Se i modi sono ortogonali, allora ogni valore singolare della matrice di forma modale è uguale all'altro, ed il rapporto è pari a 1. Se i vettori sono linearmente dipendenti, allora almeno un valore singolare è nullo e il rapporto definito dal numero di condizionamento  $cn$  tende ad infinito;
- *espansione*: generalmente il numero dei punti di misura è basso a confronto del numero totale di gradi di libertà del sistema. Per paragonare gli autovettori ottenuti dal modello con tutti i gradi di libertà e le deformate modali misurate, gli autovettori analitici devono essere ridotti o in alternativa bisogna espandere le deformate modali misurate. In bibliografia [5] è stata ricavata un'espressione per espandere il vettore di risposta misurata nel vettore di risposta nelle coordinate analitiche. La condizione di esistenza di tale espressione è definita proprio dal rapporto tra il massimo e il minimo valore singolare della matrice di forma modale misurata, e quindi coincide con il numero di condizionamento  $cn$ ;

- *osservabilità*: le leggi analitiche del moto possono essere trasformate in coordinate modali. Si può quindi ottenere la matrice delle osservazioni, ed il rango è determinato dal rango della matrice degli autovettori ottenuta dai punti di misura selezionati, e perciò legato al numero di condizionamento  $cn$ ;

si può quindi dedurre che il numero di condizionamento migliore è il valore di minimo, con limite inferiore pari ad 1.

**Determinante della matrice di Fisher** Questo metodo deriva direttamente dal metodo dell'Information Entropy, §1.3. Per paragonare diverse configurazioni ottenute, si calcola il determinante della matrice di Fisher:

$$\det(\text{FIM}) = \det(\mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi}) \quad (3.5)$$

in cui la matrice  $\mathbf{\Phi}$  è la matrice di forma modale contenente i termini solo nei gradi di libertà misurati. Ogni volta che una riga viene eliminata dalla matrice di forma modale perché il grado di libertà non è misurato dalla configurazione, il determinante decresce, ma tende a mantenere lo stesso valore se la maggior parte delle informazioni sono comunque colte.

Supponendo di calcolare tale matrice considerando tutti i gradi di libertà del sistema, chiamata  $\text{FIM}_0$ , e si elimini l' $i$ -esimo grado di libertà, e quindi la riga  $\phi_i$  dalla matrice  $\mathbf{\Phi}$ , e si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{FIM} &= \text{FIM}_0 - \phi_i^T \phi_i \\ &= \text{FIM}_0 - (\mathbf{I} - \text{FIM}_0^{-1} \phi_i^T \phi_i), \end{aligned} \quad (3.6)$$

per le proprietà del determinante si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned} \det(\text{FIM}) &= \det(\text{FIM}_0) \det(\mathbf{I} - \text{FIM}_0^{-1} \phi_i^T \phi_i) \\ &= \det(\text{FIM}_0) (1 - \det(\phi_i^T \text{FIM}_0^{-1} \phi_i)) \\ &= \det(\text{FIM}_0) (1 - P_{ii}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

in cui  $P_{ii}$  rappresenta il contributo dell' $i$ -esimo grado di libertà alla matrice di Fisher. Dato che in ogni configurazione ci sono dei gradi di libertà che non vengono considerati per il posizionamento dei sensori, allora il determinante decresce. Per valutare se un criterio è più affidabile rispetto ad un altro, la configurazione che mantiene tale quantità più alta può essere considerata la migliore.

Si è poi in certi casi fatto riferimento ad un indice riassuntivo dei tre criteri di

valutazione introdotti, calcolato come

$$ir = \frac{1}{3} \left[ \frac{rms_{min}}{rms} + \frac{cn_{min}}{cn} + \frac{\det(FIM)}{\det(FIM)_{max}} \right] \quad (3.8)$$

in cui  $rms$ ,  $cn$  e  $\det(FIM)$  sono gli indici precedentemente illustrati calcolati per il metodo che si vuole analizzare, mentre  $rms_{min}$ ,  $cn_{min}$  e  $\det(FIM)_{max}$  sono gli indici migliori ottenuti tra tutti i metodi che si vogliono confrontare. È quindi chiaro come tale parametro  $ir$  sia un numero con limite inferiore pari a 0 e limite superiore, nel migliore dei casi, pari a 1.

## Trave semplicemente appoggiata

Si consideri una trave semplicemente appoggiata di lunghezza  $h$  posta unitaria per semplicità. La matrice di forma modale può essere determinata semplicemente attraverso la seguente relazione

$$\phi_k = \sin\left(\frac{k\pi l}{h}\right) \quad (3.9)$$

in cui  $\phi_k$  è il vettore di forma modale del  $k$ -esimo modo di vibrare considerato, ed  $l$  è il vettore che contiene i gradi di libertà del sistema, e cioè ogni possibile posizione per i sensori.

Sono stati applicati diversi metodi per valutare la configurazione ottimale dei sensori, in particolare i metodi dell'Effective Independence detto EFI (§1.3), il suo sviluppo tramite il coefficiente correttivo EFI-dpr (§1.3.1), il metodo della distribuzione di energia cinetica KEM (§1.4.2), il metodo dell'Information Entropy considerando una lunghezza di correlazione pari a 0.1 e 0.4 (§1.6.2). I risultati ottenuti considerando un sistema di 7 sensori per valutare le prime 4 forme modali sono indicati in Fig.3.1, in cui è riportata la trave con le diverse forme modali indicate con le linee colorate e la posizione dei sensori è identificata da linee verticali nere con un numero che indica la progressione del posizionamento nell'algorithm sequenziale FSSP implementato per la procedura di ottimizzazione. Le posizioni dei sensori sono numericamente indicate anche in Tab.3.1, in ordine di comparizione.

Si può notare che ogni metodo tende a posizionare almeno un sensore intorno alle posizioni (0.2; 0.4; 0.6; 0.8) che significa cercare di distribuire 4 sensori in modo circa equidistante per cogliere le prime quattro forme modali, ma anche in prossimità dei massimi dei modi 2, 3, 4; i metodi EFI-dpr, KEM e quello dell'Information Entropy con una lunghezza di correlazione pari a 0.1 posizionano un sensore anche

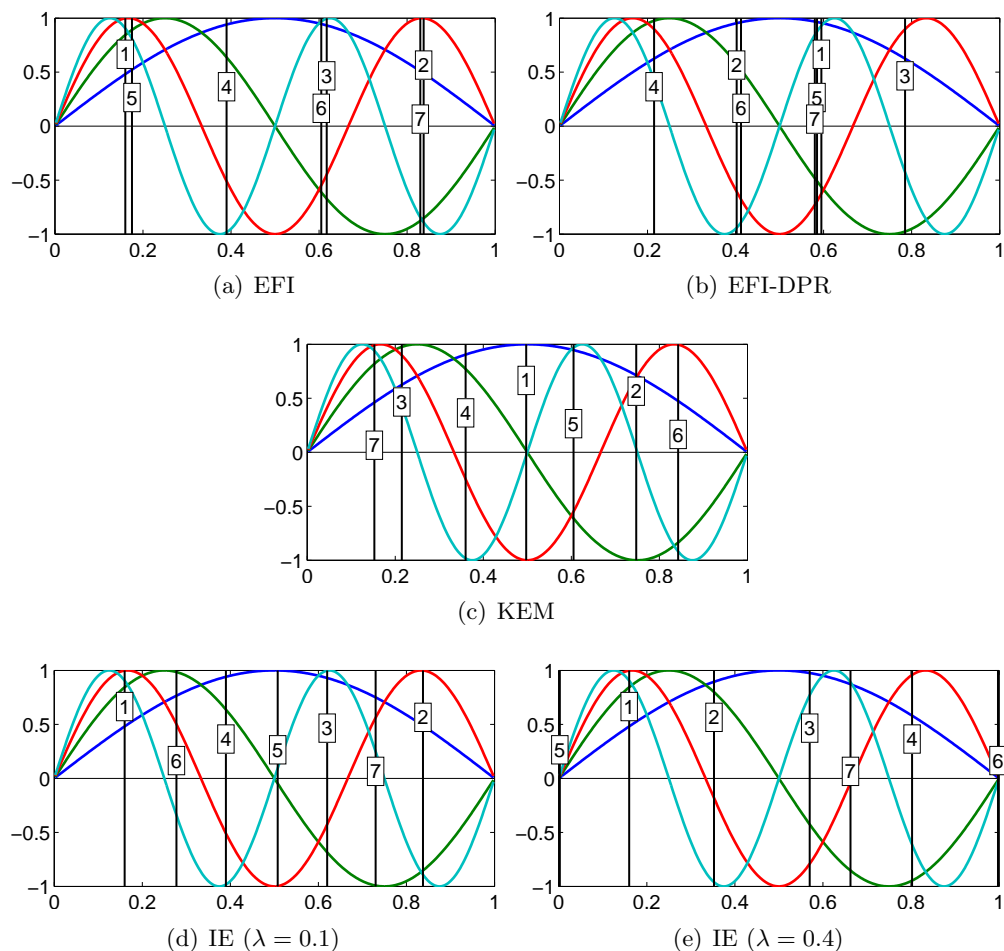


Figura 3.1: configurazione ottimale per 7 sensori e 4 modi di vibrare.

Tabella 3.1: configurazione ottimale per 7 sensori e 4 modi di vibrare.

metodo	posizione dei sensori						
	1	2	3	4	5	6	7
EFI	0.1600	0.8375	0.6175	0.3900	0.1750	0.6050	0.8300
EFI-dpr	0.5950	0.4025	0.7850	0.2150	0.5850	0.4125	0.5800
KEM	0.5000	0.7500	0.2175	0.3625	0.6075	0.8450	0.1550
IE $\lambda = 0.1$	0.1600	0.8375	0.6200	0.3900	0.5075	0.2775	0.7300
IE $\lambda = 0.4$	0.1600	0.3525	0.5700	0.8025	0.0025	0.9975	0.6625

in prossimità della mezzeria della trave. In particolare si può notare che la procedura ricorsiva nel metodo KEM, Fig.3.1(c), posiziona il primo sensore in mezzeria della trave, che significa cogliere al meglio il primo ed il terzo modo di vibrare, ma se ci si limita ad un solo sensore il metodo non permette di avere informazioni riguardanti il secondo ed il quarto modo in quanto la mezzeria è un nodo per questi modi di vibrare; il secondo sensore è ottimizzato invece per il secondo modo di vibrare. In ogni caso i diversi sensori sono ben distanziati sulla lunghezza della trave.

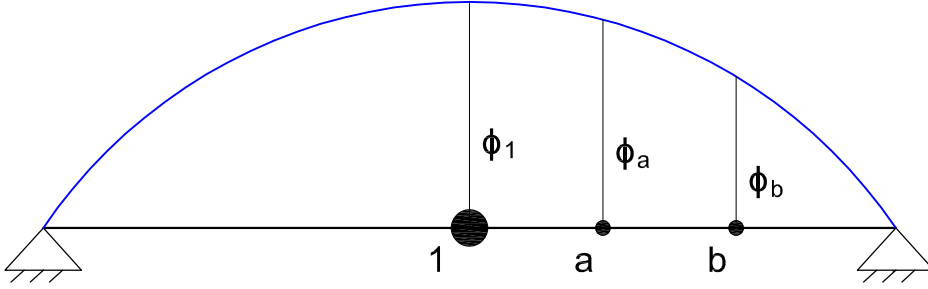
I metodi EFI ed EFI-dpr, Figg. 3.1(a)-3.1(b), ipotizzano già una prima posizione che permetta di vedere tutti e 4 i modi di vibrare, tuttavia tendono a prevedere diversi sensori nelle stesse posizioni, in particolare i sensori dopo il quarto: con quattro sensori e quattro modi di vibrare il problema è determinato e vengono definite quattro posizioni distinte che colgono il maggior numero di informazioni, ma una volta definite tali posizioni, data l'assenza di una funzione che sfavorisca una eventuale acquisizione di informazione doppia, gli altri sensori vengono sempre posizionati in quelle stesse 4 posizioni perché a più alto contenuto di informazioni per come è definita la funzione obiettivo.

Proprio a tale proposito il metodo dell'Information Entropy introduce una funzione di correlazione, si nota però che al variare della lunghezza di correlazione  $\lambda$  da 0.1 a 0.4 i risultati ottenuti cambiano considerevolmente. È importante sottolineare che quando il valore di  $\lambda$  è pari a 0.4, con l'intenzione di separare meglio i sensori, due di questi vengano predisposti alle estremità vincolate della trave non aggiungendo di fatto informazioni utili al sistema di acquisizione.

Per capire più nel dettaglio tale problema nel metodo dell'Information Entropy che consiste nella possibile collocazione di sensori agli estremi della trave, si analizzi il caso della trave semplicemente appoggiata, considerando un solo modo di vibrare ed un sistema di monitoraggio composto da due sensori, il modo è normalizzato all'unità, cioè  $\phi_1 = 1$  e la lunghezza della trave  $h = 1$ .

Con un solo modo di vibrare il primo sensore è collocato nella mezzeria della trave, indicato con il numero 1 in Fig.3.2. Si vuole valutare l'influenza del parametro  $\lambda$  sul posizionamento del secondo sensore. In particolare si consideri che venga posizionato nella generica posizione  $b$  che si trova a distanza  $\Delta$  da 1, e che sia disponibile anche la posizione  $a$  a distanza  $\Delta/2$ .

La funzione obiettivo è quella definita dalla matrice di Fisher  $\mathbf{Q}$  in Eq.1.48, che nel particolare caso di un solo modo di interesse è un numero, non si pone quindi il problema di utilizzare una sua misura come il determinante piuttosto che il prodotto dei valori singolari con eventuali problemi di accuratezza e stabilità di cui al §2.4.



**Figura 3.2:** ipotetica posizione del sensore in  $a$  o  $b$ , fissato il sensore 1 per cogliere la prima forma modale.

In particolare, data l'espressione della matrice

$$\mathbf{Q}(\mathbf{L}, \boldsymbol{\Sigma}) = (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi})^T (\mathbf{L}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{L}^T)^{-1} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}) \quad (3.10)$$

in cui, per l'esempio in questione, si ha che

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

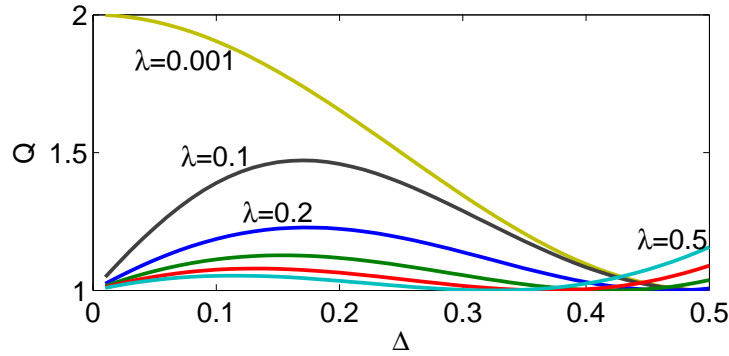
è la matrice di collocamento, che definisce la posizione dei sensori 1 e 2, rispettivamente nel primo e nell'ultimo grado di libertà disponibili,

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & \phi_a & \phi_b \end{bmatrix}^T \quad (3.12)$$

è la matrice di forma modale, in cui 1 è lo spostamento del primo modo di vibrare registrato dal sensore 1,  $\phi_a$  e  $\phi_b$  sono rispettivamente gli spostamenti registrati per il primo modo in posizione  $a$  e  $b$ , ed infine

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & \exp(-\Delta/2\lambda) & \exp(-\Delta/\lambda) \\ \exp(-\Delta/2\lambda) & 1 & \exp(-\Delta/2\lambda) \\ \exp(-\Delta/\lambda) & \exp(-\Delta/\lambda) & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

è la covarianza dell'errore di predizione considerando la funzione di correlazione come da §1.6.2.



**Figura 3.3:** andamento della matrice di Fisher al variare di  $\lambda$  tra 0.001 fino a 0.5 nel posizionamento del sensore 2 per valutare il primo modo di vibrare.

Si ottiene dunque

$$\begin{aligned}
 Q &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} \right)^T \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \exp(-\Delta/2\lambda) & \exp(-\Delta/\lambda) \\ \exp(-\Delta/2\lambda) & 1 & \exp(-\Delta/2\lambda) \\ \exp(-\Delta/\lambda) & \exp(-\Delta/\lambda) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_a \\ \phi_b \end{bmatrix} \right) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

ed in particolare svolgendo tale equazione si arriva all'espressione della matrice di Fisher per il caso in esame:

$$Q = \frac{1 - 2\phi_b \exp(-\Delta/\lambda) + \phi_b^2}{1 - \exp(-2\Delta/\lambda)}. \quad (3.15)$$

Si nota che quindi  $Q$  dipende solo dalla distanza del sensore  $b$  dal sensore 1, dalla deformata modale registrata nel punto stesso  $\phi_b = \cos(\pi\Delta)$  e dal valore della lunghezza di correlazione  $\lambda$ , mentre è indipendente dalla posizione del sensore  $a$ .

In Fig.3.3 è mostrato l'andamento di  $Q$  rispetto al variare della distanza  $\Delta$ , e le diverse curve indicano i risultati ottenuti per diversi valori del parametro  $\lambda$ . Quando  $\lambda$  è quasi nullo, la correlazione è trascurabile e l'andamento della funzione corrisponde a quello del metodo dell'Effective Independence EFI, che tende a posizionare il secondo sensore in corrispondenza del primo. Con un valore di  $\lambda$  piccolo, il massimo

della funzione è tra la posizione 0.1 e 0.2, ma ha un andamento che si dimostra crescente verso l'estremità della trave, determinato dal denominatore della funzione in Eq.3.15. Con valori di  $\lambda$  via via crescenti il valore all'estremità diventa anche maggiore del massimo locale, posto a circa 0.15, portando il sensore ad essere predisposto all'estremo vincolato. Si nota quindi da un lato come la determinazione della configurazione dipenda sensibilmente dalla scelta del parametro  $\lambda$  stesso, in particolare a piccole variazioni del parametro possono corrispondere sostanziali variazioni nei risultati ottenuti, dall'altro lato una scelta impropria di  $\lambda$  può comportare la presenza di sensori in posizioni che non forniscono di fatto utili informazioni al sistema di monitoraggio.

Tale comportamento può essere eliminato inserendo una dipendenza dalle deformate modali nella definizione della correlazione tra i sensori, in modo che compaia la dipendenza dal modo di vibrare anche nel termine  $\exp(-2\Delta/\lambda)$  a denominatore, e che quindi nel caso di posizione nodale di modi di vibrare faccia sì che il valore di  $Q$  sia pari ad 1, ossia valore di minimo della funzione. Per tale motivo è stata definita una nuova funzione di correlazione, esposta nel paragrafo successivo.

## Capitolo 4

# Metodo IE-dms: proposta di variazione del metodo IE

### *Formulazione ed esempi numerici*

Nel §1.6.2 si è illustrato come alcuni autori attribuiscono determinati valori alla matrice di covarianza ed alla lunghezza di correlazione. In questa sede si illustra una nuova proposta per l'assunzione di tale entità, anche per ovviare alla necessità di scegliere per ogni particolare problema un valore del parametro  $\lambda$  appropriato. Infatti, i risultati possono cambiare considerevolmente assumendo un valore piuttosto che un altro, e questo induce a dover svolgere diverse valutazioni per uno stesso problema cambiando tale parametro e verificare a posteriori la bontà di una configurazione piuttosto che un'altra. Inoltre a causa della definizione della funzione di correlazione non è assicurato che, con il desiderio di distanziare meglio i sensori, questi non siano collocati in corrispondenza o molto in prossimità dei vincoli qualora questi vengano manualmente esclusi come punti di interesse per il sistema di monitoraggio, come mostrato al precedente §3. Se poi da un lato i punti di vincolo possono essere facilmente eliminati manualmente come gradi di libertà in cui poter predisporre un sensore, assai più difficile potrebbe essere escludere tutti i gradi di libertà che sono nodi per le forme modali di interesse, e che quindi non aggiungerebbero informazioni al sistema di acquisizione nel caso in cui ci si posizionasse un sensore.

La funzione per determinare la configurazione ottimale dei sensori quindi, in caso di monitoraggio volto all'identificazione modale della struttura, deve essere sensibile sì alla distanza tra i sensori stessi per tenere conto della correlazione degli errori di modello, tanto maggiore tanto è minore la distanza, ma anche alle forme modali stesse per evitare che un sensore venga appunto posizionato in un nodo di tutti i

modi di vibrare. Per tale motivo si è pensato ad uno sviluppo del metodo dell'Information Entropy che consideri nella definizione della correlazione anche le forme modali (Information Entropy - distance and mode shapes, IE-dms), proponendo una matrice di covarianza come

$$\Sigma_{ij} = \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j^T \exp(-\delta_{ij}/\bar{\delta}). \quad (4.1)$$

In questa relazione, la matrice di covarianza dell'errore di predizione sul modello, è inversamente proporzionale alla distanza  $\delta_{ij}$  tra i sensori  $i$  e  $j$ , normalizzata rispetto alla distanza media prevista tra i sensori  $\bar{\delta}$ , pensata come il rapporto tra la massima distanza tra tutti i gradi di libertà del sistema e il loro numero totale. I vettori  $\boldsymbol{\varphi}_i$  e  $\boldsymbol{\varphi}_j$ , invece sono definiti come  $\boldsymbol{\varphi}_i = [\varphi_{i1} \varphi_{i2} \dots \varphi_{iN_M}]$  e  $\boldsymbol{\varphi}_j = [\varphi_{j1} \varphi_{j2} \dots \varphi_{jN_M}]$ , in cui il  $k$ -esimo elemento del vettore, con  $k = 1, \dots, N_M$  numero totale dei modi è pari a

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \frac{\phi_{ik}}{\max(\phi_{ik}; \phi_{jk})} \\ \varphi_{jk} &= \frac{\phi_{jk}}{\max(\phi_{ik}; \phi_{jk})} \end{aligned} \quad (4.2)$$

e  $\phi_{ik}$  e  $\phi_{jk}$  sono gli spostamenti dei nodi rispettivamente  $i$  e  $j$  per il  $k$ -esimo modo di vibrare.

In questo modo la distanza tra due sensori è combinata e pesata con l'informazione fornita dai modi di vibrare nelle posizioni  $i$  e  $j$  per ogni modo di vibrare considerato  $k$ . Il vettore  $\boldsymbol{\varphi}$  può essere interpretato come un modo di vibrare normalizzato, infatti il suo valore può variare tra 0 e 1. In altre parole, i termini  $\varphi_{ik}$  e  $\varphi_{jk}$  variano tra 0 e 1 dando un peso al fattore  $\exp(-\delta_{ij}/\bar{\delta})$ . Tanto più le deformate modali sono correlate, tanto più questi termini tendono all'unità. Nel caso della forma indeterminata  $\varphi_{ik} = \frac{0}{0}$ , il valore  $\varphi_{ik}$  è imposto uguale all'unità perché il segnale acquisito è identico e quindi la correlazione è massima. Il prodotto  $\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j^T$  varia tra 0 e il numero di modi  $N_M$ .

Il termine della matrice di covarianza dell'errore di predizione sul modello  $\Sigma_{ij}$  quindi assume il valore massimo, uguale a  $N_M$  se la correlazione del segnale è massima e decresce se la correlazione tra i segnali decresce, per esempio se i sensori sono molto lontani la correlazione è bassa. D'altra parte se gli autovettori sono ortogonali, cioè per forme modali totalmente scorrelate, il prodotto  $\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_j^T$  è nullo, e il termine  $\Sigma_{ij}$  è nullo anche nel caso in cui la distanza tra i sensori sia molto piccola.

**Tabella 4.1:** configurazione ottimale per 7 sensori e 4 modi di vibrare.

metodo	posizione dei sensori						
	1	2	3	4	5	6	7
EFI	0.1600	0.8375	0.6175	0.3900	0.1750	0.6050	0.8300
EFI-dpr	0.5950	0.4025	0.7850	0.2150	0.5850	0.4125	0.5800
KEM	0.5000	0.7500	0.2175	0.3625	0.6075	0.8450	0.1550
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.1600	0.8375	0.6200	0.3900	0.5075	0.2775	0.7300
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.1600	0.3525	0.5700	0.8025	0.0025	0.9975	0.6625
IE-dms	0.1600	0.8375	0.6175	0.3900	0.2825	0.5075	0.7150

## 4.1 Trave semplicemente appoggiata

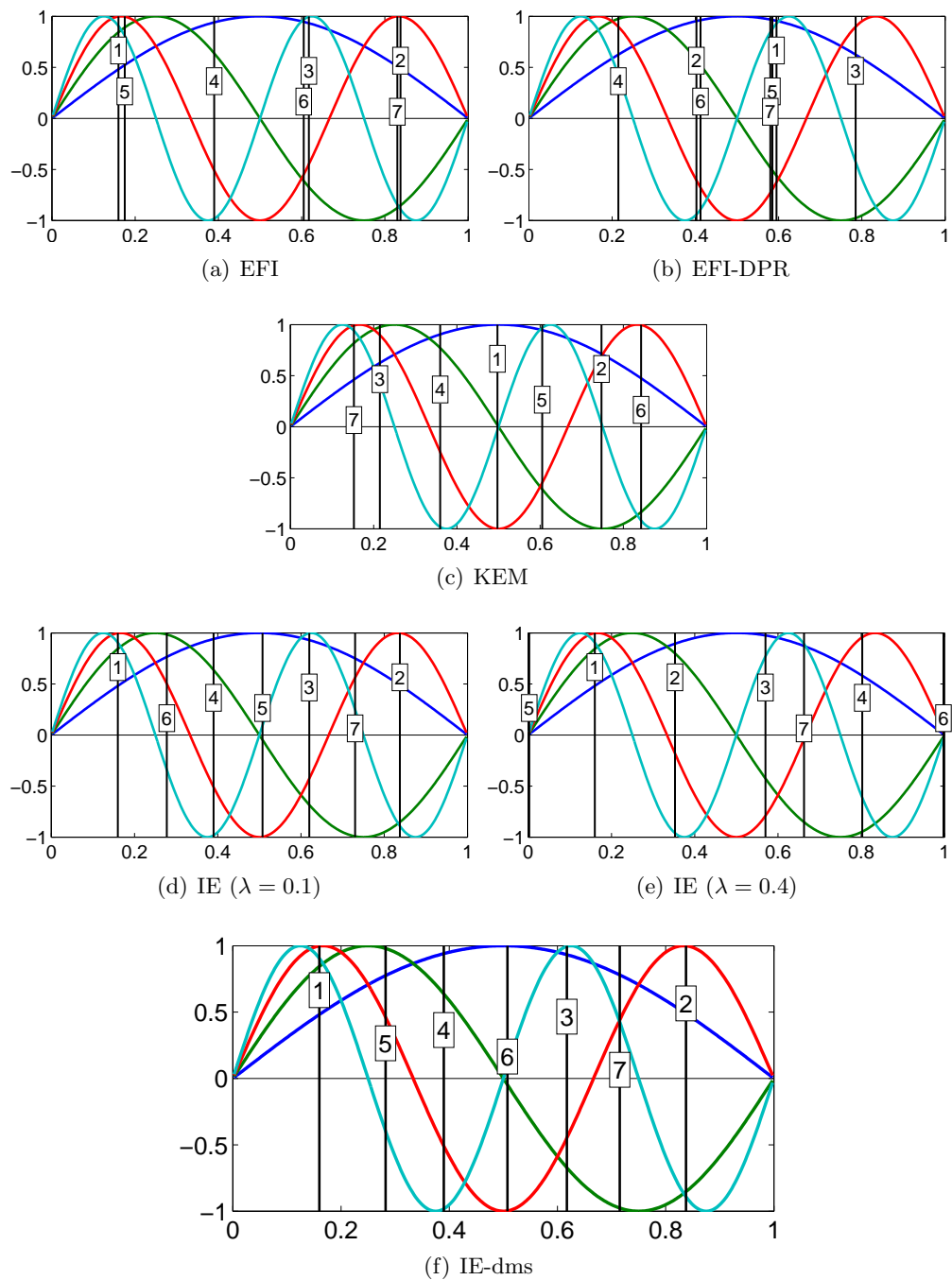
Per valutare l'efficacia del metodo IE-dms si è considerato il caso studio della trave semplicemente appoggiata trattata al precedente §3. I risultati ottenuti considerando i primi quattro modi di vibrare ed i risultati del procedimento per un sistema composto da 7 sensori sono riportati in Fig.4.1. Le posizioni sono numericamente riportate in ordine in Tab.4.1 e confrontate anche con i risultati ottenuti dagli altri metodi.

Si può notare che il metodo IE-dms come gli altri metodi tende a posizionare 4 sensori intorno alle posizioni (0.2; 0.4; 0.6; 0.8) che significa cercare di distribuire 4 sensori in modo circa equidistante per cogliere le prime quattro forme modali ed in prossimità dei massimi dei modi 2, 3, 4; come i metodi KEM e quello dell'Information Entropy con una lunghezza di correlazione  $\lambda$  pari a 0.1, il metodo proposto posiziona un sensore anche in prossimità della mezzera della trave.

Si rammenta che il metodo IE, quando il valore di  $\lambda$  è pari a 0.4, con l'intenzione di separare meglio i sensori, posiziona due di questi alle estremità vincolate della trave non aggiungendo di fatto informazioni utili al sistema di acquisizione. Tale risultato viene evitato con il metodo IE-dms che propone una correlazione che dipende sia dalla distanza tra i sensori che dalle deformate modali: in questo modo è sì preferibile avere i sensori il più distante possibile, ma i punti che sono dei nodi per ogni modo di vibrare vengono evitati dalla procedura come preferenziali.

In aggiunta si può notare da Tab.4.1 che i primi quattro sensori vengono posizionati esattamente come nel metodo EFI, non solo nelle stesse posizioni ma anche nello stesso ordine, attitudine anche del metodo IE con lunghezza di correlazione pari a 0.1.

Inoltre, si consideri il posizionamento del sensore 5 per il metodo EFI, IE-dms e il sensore 6 del metodo IE con  $\lambda = 0.1$ . Il metodo EFI predispone tale sensore in corrispondenza del sensore 1 in quanto punto che massimizza la funzione obiettivo



**Figura 4.1:** configurazione ottimale per 7 sensori e 4 modi di vibrare confrontando il metodo IE-dms alle altre soluzioni ottenute.

**Tabella 4.2:** bontà della soluzione: configurazione ottimale per 4 modi di vibrare.

(a) 6 sensori				
metodo	rms	cn	det(FIM)	ir
EFI	0.06	1.61	<u>179.06</u>	0.337
EFI-dpr	0.07	1.57	129.24	0.571
KEM	0.03	1.42	131.49	0.665
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.14	1.34	155.53	0.646
IE ( $\lambda = 0.4$ )	<u>0.01</u>	<u>1.16</u>	38.54	0.749
IE-dmf	0.02	1.36	154.77	0.783

(b) 7 sensori				
metodo	rms	cn	det(FIM)	ir
EFI	0.03	1.65	<u>358.67</u>	0.671
EFI-dpr	0.11	1.85	192.16	0.411
KEM	<u>0.01</u>	1.22	296.86	0.915
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.02	<u>1.12</u>	277.69	0.758
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.03	1.40	78.64	0.451
IE-dmf	<u>0.01</u>	1.17	275.15	0.908

trascurando la presenza del sensore precedentemente installato, fornendo di fatto una informazione totalmente correlata o doppia; il metodo IE pone il sensore 6 esattamente in mezzo tra il numero 1 ed il 4 a causa dell'effetto della distanza nella funzione dei correlazione, fattore che diventa quindi preponderante rispetto ad altre informazioni; il sensore 5 del metodo IE-dms è sì tra il sensore 1 e 4, ma non esattamente a metà, è spostato verso il sensore 4, in modo che la forma modale 2 sia vicino al massimo e le deformate modali numero 3 e 4 abbiano valori paragonabili senza penalizzare l'una o l'altra.

**Valutazione della bontà della soluzione** I criteri riportati al §3 per confrontare la qualità delle configurazioni sono stati applicati alle diverse soluzioni ottenute nel presente capitolo, considerando i primi sei sensori Tab. 4.2(a) e i primi sette sensori Tab. 4.2(b) per valutare le prime 4 forme modali, con le funzioni obiettivo proposte dai metodi EFI, EFI-dpr, KEM, IE con lunghezza di correlazione  $\lambda$  pari a 0.1 e 0.4 ed il metodo IE-dms.

Si rammenta che i valori *rms* e *cn* migliori sono i più bassi, mentre il valore del *det(FIM)* è un parametro da massimizzare; i valori migliori ottenuti sono sottolineati. Si può notare che nessun metodo ottimizza tutti i criteri contemporaneamente. È anche riportato il parametro sintetico *ir* che riassume gli altri tre indici; tale parametro varia tra 0 e 1, in cui il valore ottimale è 1.

Il metodo EFI risulta il migliore nel caso in cui si consideri come parametro di valutazione il  $\det(FIM)$ , risultato atteso in quanto il metodo di valutazione ha come parametro da ottimizzare esattamente la funzione obiettivo del metodo utilizzato per determinare la configurazione dei sensori. Il metodo dell'Information Entropy che ipotizza  $\lambda = 0.4$  risulta essere una migliore stima nel caso di *rms* e *cn*, nel caso in cui si considerino solo i primi sei sensori, mentre nel caso di sette sensori i valori migliori di *rms* sono forniti dal metodo dell'energia cinetica e il metodo IE-dms, mentre il *cn* migliore è raggiunto dal metodo dell'Information Entropy con lunghezza di correlazione pari a 0.1.

Si noti, in ogni caso, come alcuni metodi che in un caso forniscono il valore ottimale per alcuni parametri di valutazione o sono molto prossimi ad essi, nel caso in cui si valutino gli indici per gli altri parametri, o nel caso in cui si cambi il numero di sensori, la soluzione è molto lontana dalla ottimale. Ad esempio il caso dell'Information Entropy con  $\lambda = 0.4$ , fornisce il valore ottimale nel caso di 6 sensori per ben due metodi di valutazione, ma ed è lontanissima dal valore ottimale del metodo EFI che soddisfa al meglio il criterio di valutazione del  $\det(FIM)$  nelle stesse condizioni.

Il metodo EFI-dpr è sempre lontano dal valore ottimale per i parametri di valutazione, sia nel caso in cui si consideri la configurazione di 6 sensori che nel caso di 7 sensori. Il metodo dell'energia cinetica KEM fornisce valori prossimi all'ottimale, tuttavia si rammenta la sua scarsa versatilità nelle applicazioni in quanto non consente di considerare una correlazione tra i diversi segnali acquisiti dai sensori, e pertanto poco propenso ad essere utilizzato soprattutto nel caso di incertezze sui dati o sul modello. Il metodo IE-dms, anche qualora non raggiunga il valore ottimale per i parametri di valutazione, è sempre prossimo ad esso, dimostrando una discreta robustezza; infatti, considerando l'indice riassuntivo *ir*, tale metodo risulta il migliore nel caso di 6 sensori e paragonabile al migliore, che risulta essere il metodo KEM, nel caso di 7 sensori. Gli altri metodi mostrano valori di *ir* molto distanti dagli ottimali.

Si consideri ora che per la stessa configurazione di sensori, progettata ed ottimizzata per cogliere le prime quattro forme modali, sia disponibile una ulteriore forma modale: si vuole quindi indagare quanto il sistema sia in grado di cogliere eventuali informazioni disponibili aggiuntive. Sono quindi stati applicati gli stessi criteri di valutazione sulle diverse configurazioni con i sensori nelle posizioni precedentemente determinate, considerando però 5 modi di vibrare acquisiti. I risultati ottenuti considerando i primi sei sensori della configurazione o i primi sette sono riportati in Tab. 4.3.

**Tabella 4.3:** bontà della soluzione: configurazione ottimale per 5 modi di vibrare.

(a) 6 sensori				
metodo	rms	cn	det(FIM)	ir
EFI	0.30	12.27	9.12	0.086
EFI-dpr	0.29	17.44	2.46	0.068
KEM	0.04	1.83	249.96	0.775
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.36	<u>1.61</u>	<u>360.08</u>	0.694
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.26	42.48	0.11	0.051
IE-dms	<u>0.03</u>	1.65	353.94	0.986

(b) 7 sensori				
metodo	rms	cn	det(FIM)	ir
EFI	0.30	12.06	19.88	0.052
EFI-dpr	0.30	16.13	6.06	0.039
KEM	<u>0.01</u>	1.40	793.73	0.903
IE ( $\lambda = 0.1$ )	0.06	<u>1.24</u>	922.19	0.708
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.05	2.21	94.88	0.286
IE-dms	<u>0.01</u>	<u>1.25</u>	<u>964.54</u>	0.997

Si nota che il metodo IE-dms soddisfa sempre al meglio il criterio di valutazione  $rms$ , e quello del  $det(FIM)$  nel caso di sette sensori, ed è molto prossimo alla soluzione ottimale nel caso del  $cn$  e del  $det(FIM)$  con sei sensori (in cui il miglior metodo risulta quello dell'Information Entropy con  $\lambda = 0.1$ ). Quando  $\lambda = 0.4$  i criteri di valutazione mostrano che la configurazione determinata è sempre poco efficace. Si nota come il parametro riassuntivo  $ir$  sia sempre migliore nel caso del metodo IE-dms, con un ampio scarto nei confronti degli altri metodi, sia nel caso di 6 che di 7 sensori. Solo il metodo KEM nel caso di 7 sensori ha un indice qualitativamente paragonabile.

Il fatto che a seconda della scelta del parametro  $\lambda$  ci sia una così ampia variabilità della bontà della configurazione ottenuta conferisce molte incertezze sulla robustezza ed efficace applicabilità del metodo. Ridefinendo invece la correlazione come proposto al §4 nel metodo IE-dms la configurazione determinata pare affidabile per i diversi criteri di valutazione introdotti e robusta nel caso in cui vengano introdotte ulteriori informazioni utili per il sistema di monitoraggio già progettato ed ottimizzato per altre condizioni.

## 4.2 Telaio spaziale asimmetrico in pianta

Questo caso studio è un telaio spaziale di otto piani, con una distribuzione asimmetrica dei pilastri in pianta. Considerando i piani come diaframmi rigidi, si è

valutata la matrice modale a partire dagli spostamenti dei baricentri di ogni piano, considerando tutti i modi di interesse. Le forme modali sono state normalizzate con la norma del fattore di partecipazione modale nelle direzioni  $x$ ,  $y$  e per la rotazione, in questo modo i primi modi di vibrare assumono una rilevanza maggiore rispetto agli altri modi superiori. Per ogni impalcato sono state considerate 25 possibili posizioni per i sensori, suddivise in una griglia che divide il piano con una maglia di  $5 \times 5$  posizioni.

I metodi per la ricerca della configurazione ottimale utilizzati, dato l'interesse particolare nel valutare la correlazione tra il segnale dei sensori nel caso tridimensionale, sono il metodo EFI che trascura la correlazione, e il metodo IE-dms §4.

Solitamente l'errore di predizione viene considerato completamente non correlato nelle due direzioni ortogonali  $x$  ed  $y$ , ipotizzando che i modi di vibrare nelle direzioni ortogonali  $x$  ed  $y$  siano anch'essi ortogonali. Tuttavia le misure sono correlate se la struttura ha modi di vibrare flessio-torsionali accoppiati, ad esempio nel caso di strutture spaziali asimmetriche. Pensando alla matrice della covarianza dell'errore di predizione del metodo dell'Information Entropy, in cui la correlazione del segnale dipende solo dalla distanza, questa potrebbe essere assemblata sostanzialmente secondo due filosofie: si considera che il segnale nelle direzioni  $x$  ed  $y$  sia totalmente scorrelato, e dunque si ottiene una matrice del tipo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{1x1x} & \Sigma_{1x2x} & \dots & \Sigma_{1xsx} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Sigma_{2x1x} & \Sigma_{2x2x} & \dots & \Sigma_{2xsx} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{sx1x} & \Sigma_{sx2x} & \dots & \Sigma_{sxsx} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{1y1y} & \Sigma_{1y2y} & \dots & \Sigma_{1ysy} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{2y1y} & \Sigma_{2y2y} & \dots & \Sigma_{2ysy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Sigma_{sy1y} & \Sigma_{sy2y} & \dots & \Sigma_{sysy} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

in cui per i generici sensori  $i$  e  $j$  si ha che  $\Sigma_{ixjx} = \exp[-\delta_{ij}/\lambda]$  e  $\Sigma_{iyjy} = \exp[-\delta_{ij}/\lambda]$ , con  $\delta_{ij}$  la distanza tra il sensore  $i$  ed il sensore  $j$ , ed  $s$  è il numero dei gradi di libertà del problema, oppure si può considerare la filosofia duale, in cui la

matrice di covarianza valuta la correlazione anche lungo le direzioni  $x$  ed  $y$ , per cui

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{1x1x} & \Sigma_{1x2x} & \cdots & \Sigma_{1xsx} & \Sigma_{1x1y} & \Sigma_{1x2y} & \cdots & \Sigma_{1xsy} \\ \Sigma_{2x1x} & \Sigma_{2x2x} & \cdots & \Sigma_{2xsx} & \Sigma_{2x1y} & \Sigma_{2x2y} & \cdots & \Sigma_{2xsy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{sx1x} & \Sigma_{sx2x} & \cdots & \Sigma_{sxsx} & \Sigma_{sx1y} & \Sigma_{sx2y} & \cdots & \Sigma_{sxsy} \\ \Sigma_{1y1x} & \Sigma_{1y2x} & \cdots & \Sigma_{1y sx} & \Sigma_{1y1y} & \Sigma_{1y2y} & \cdots & \Sigma_{1y sy} \\ \Sigma_{2y1x} & \Sigma_{2y2x} & \cdots & \Sigma_{2y sx} & \Sigma_{2y1y} & \Sigma_{2y2y} & \cdots & \Sigma_{2y sy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{sy1x} & \Sigma_{sy2x} & \cdots & \Sigma_{sy sx} & \Sigma_{sy1y} & \Sigma_{sy2y} & \cdots & \Sigma_{sy sy} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ed  $s$  è il numero delle possibili posizioni. In questo caso, i termini  $\Sigma_{ixjx}$  e  $\Sigma_{iyjy}$  vengono valutati come in precedenza, ed anche i termini  $\Sigma_{ixjy} = \Sigma_{iyjx} = \exp[-\delta_{ij}/\lambda]$  sono valutati nello stesso modo.

Utilizzando il primo tipo di approccio, se i modi di vibrare non sono perfettamente ortogonali non si coglie la potenziale correlazione dei segnali nelle due direzioni, mentre con il secondo tipo di approccio qualora i modi siano ortogonali non si considera che se un sensore acquisisce in direzione  $x$  ed uno in  $y$ , per quanto siano vicini, l'informazione è comunque totalmente scorrelata.

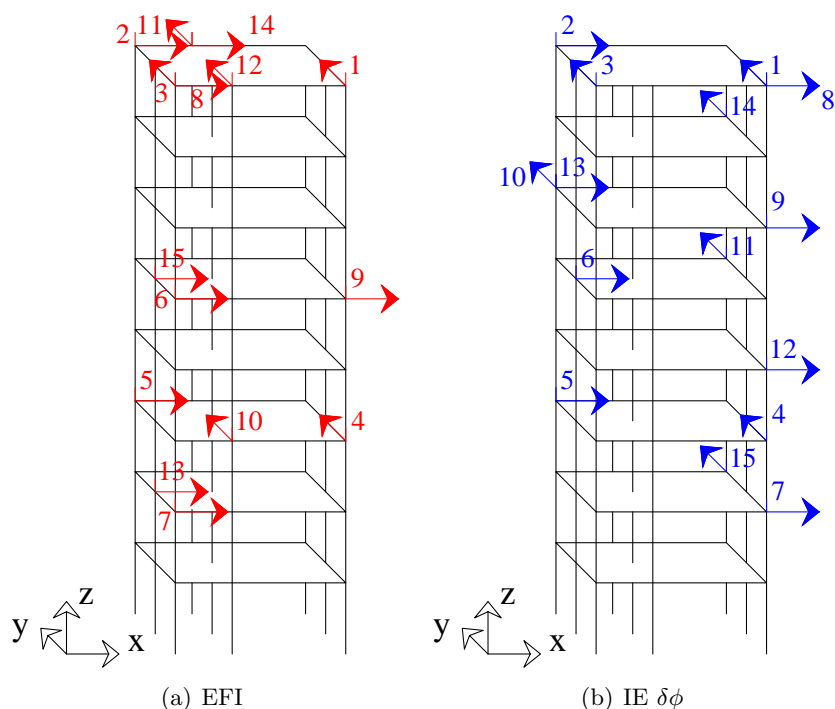
Il metodo IE-dms invece, permette di considerare facilmente la correlazione spaziale nelle strutture tridimensionali attraverso i termini  $\varphi$ , Eq.4.2, per cui la distanza tra due sensori è combinata e pesata con l'informazione fornita dai modi di vibrare nelle posizioni  $i$  e  $j$  per ogni modo di vibrare considerato nelle diverse direzioni. Qualora gli autovettori siano ortogonali, ad esempio per modi di vibrare non correlati in direzioni ortogonali, il prodotto  $\varphi_i \varphi_j^T$  in Eq.4.1 è zero, e quindi la correlazione è nulla anche se la distanza tra i sensori è molto bassa.

Per quanto riguarda la distanza media prevista tra i sensori in Eq.4.1, si considera una distanza media pesata in ogni direzione: considerando il grado di libertà  $i$  di coordinate  $(x_i; y_i; z_i)$  ed il grado di libertà  $j$  di coordinate  $(x_j; y_j; z_j)$  si ha

$$\frac{\delta_{ij}}{\bar{\delta}} = \sqrt{\frac{(x_i - x_j)^2}{\delta_x^2} + \frac{(y_i - y_j)^2}{\delta_y^2} + \frac{(z_i - z_j)^2}{\delta_z^2}} \quad (4.5)$$

in cui  $\delta_x$  e  $\delta_y$  sono ottenute dalla distanza massima nella direzione rispettivamente  $x$  ed  $y$  ed il numero di gradi di libertà previsti in quella direzione in un piano, quindi 5, mentre  $\delta_z$  è l'altezza interpiano.

Le procedure di posizionamento secondo il metodo EFI ed IE-dms sono state



**Figura 4.2:** configurazione ottimale per i primi 15 sensori e 6 modi di vibrare.

applicate valutando i primi sei modi di vibrare, in Fig.4.2 sono riportate le posizioni dei primi 15 sensori; le forme modali sono caratterizzate da spostamenti prevalenti in direzione  $x$  per i modi 1 e 4, in  $y$  per i modi 2 e 5, e i modi 3 e 6 sono essenzialmente torsionali. Ovviamente, essendo la struttura asimmetrica in pianta, nessun modo di vibrare prevede ortogonalità nei confronti degli altri, valse a dire che un modo che prevede una elevata percentuale di massa attivata in direzione  $x$  avrà comunque componenti rotazionali ed in direzione  $y$ , e così per ogni altro modo di vibrare.

Le posizioni ottenute per i sensori sono indicate con un numero crescente che dipende dall'ordine di collocamento all'interno della procedura sequenziale, la freccia indica la direzione di acquisizione, Fig.4.2. I primi tre sensori sono posizionati all'ultimo piano in entrambe le direzioni, e questo permette di identificare lo spostamento di piano rigido. Sono inoltre posizionati ai vertici del piano stesso, evitando i punti centrali, preferendo dunque le posizioni con gli spostamenti maggiori. Gli altri sensori sono posizionati ai piani sottostanti per valutare anche i modi superiori, in particolare fino al sensore 5 le collocazioni sono le medesime. Il metodo IE-dms permette di avere i sensori ben distribuiti su tutta l'altezza dell'edificio lasciando scoperto solo il primo piano che ha spostamenti molto piccoli rispetto agli altri, mentre il metodo EFI tende a concentrare molti sensori all'ultimo piano lasciando

**Tabella 4.4:** bontà della soluzione: configurazione ottimale per 6 modi di vibrare.

(a) 12 sensori			
<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.18	65.63	1.61
IE-dms	0.17	67.93	1.08

(b) 15 sensori			
<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.19	55.27	6.11
IE-dms	0.19	71.56	2.99

(c) 20 sensori			
<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.18	58.28	36.37
IE-dms	0.16	66.24	12.55

(d) 25 sensori			
<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.17	58.29	139.26
IE-dms	0.18	67.68	40.26

completamente liberi oltre al primo, anche piani 4, 6 e 7.

**Valutazione della bontà della soluzione** Sono stati applicati i diversi criteri per valutare la bontà della soluzione esposti nell'introduzione del capitolo §3. In particolare si è inizialmente ipotizzato di avere una configurazione di 12, 15, 20 oppure 25 sensori per cogliere le prime 6 forme modali, i risultati ottenuti sono riportati in Tab.4.4. Si ricorda che i valori migliori per i parametri *rms* e *cn* sono quelli di minimo, mentre il *det(FIM)* migliore è quello con valore più alto. Si può notare come generalmente il metodo EFI raggiunga i valori migliori per i criteri introdotti, anche se l'ordine di grandezza è comunque paragonabile per i due metodi.

Se si ipotizzano le stesse configurazioni di 12, 15, 20, 25 sensori ottimizzate per cogliere le prime 6 forme modali, ma si considera che ne siano effettivamente disponibili 9, aggiungendo un modo con massa attivata principalmente in direzione *x*, uno in *y* ed uno principalmente torsionale, si ottengono i risultati riportati in Tab.4.5. Si nota come la configurazione ottenuta mediante il metodo IE-dms sia nettamente migliore di quella ottenuta dal metodo EFI, portando a risultati con anche diversi ordini di grandezza di differenza, per tutti i criteri di valutazione utilizzati, in tutte le configurazioni considerate. Se in particolare si osservano i valori ottenuti per gli indici nel caso di 12 e 15 sensori, il metodo EFI ha valori di *cn* dell'ordine del  $10^9$ ,

**Tabella 4.5:** bontà della soluzione: configurazione ottimale per 9 modi di vibrare.

(a) 12 sensori			
metodo	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.29	7.90E+09	-1.12E-24
IE-dms	0.17	236.31	2.81E-08

(b) 15 sensori			
metodo	rms	cn	det(FIM)
EFI	00.31	7.46E+09	-4.45E-23
IE-dms	0.14	189.06	7.62E-07

(c) 20 sensori			
metodo	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.30	493.35	6.53E-08
IE-dms	0.11	169.63	1.40E-05

(d) 25 sensori			
metodo	rms	cn	det(FIM)
EFI	0.29	512.28	4.47E-07
IE-dms	0.12	163.28	1.01E-04

che significa una grossa instabilità del metodo; ciò comporta una sua inaffidabilità in termini di risultato; inoltre anche il  $det(FIM)$  mostra addirittura valori negativi, risultato in disaccordo con il concetto fisico di tale entità.

Ciò porta alla considerazione che la funzione di correlazione definita dal metodo IE-dms appaia stabile e robusta in quanto qualora non fornisca il migliore dato tra tutti i possibili considerati è sempre molto vicino ad esso, e variando leggermente le condizioni al contorno ad esempio i dati acquisiti in questo caso, continua a fornire risultati ottimi per tutti i criteri di valutazione analizzati; al contrario le altre funzioni obiettivo possono dimostrare diverse instabilità portando tanto ad ottimi quanto a pessimi indici per i diversi criteri di valutazione. In particolare la funzione obiettivo IE-dms si dimostra robusta nel caso in cui si vogliono valutare con relativa accuratezza anche modi superiori non considerati nel processo di ottimizzazione per determinare la configurazione ottimale.

### 4.3 Passerella pedonale

La passerella pedonale oggetto di studio, Fig.4.3, si trova a Correggio, in provincia di Reggio Emilia. È stata costruita nel 2011, è lunga 168 m ed è composta da cinque campate semplicemente appoggiate e collegate tra loro a livello dell'impalca-



**Figura 4.3:** foto della passerella pedonale di Correggio.

to. La campata centrale è lunga 40 m e le quattro campate laterali sono lunghe 32 m ciascuna. Sono presenti 4 pile, quelle centrali sono alte 5.20 m mentre quelle laterali 2.80 m. La struttura ha una sezione scatolare composta da reticolari in acciaio di sezione rettangolare cava. Un sistema di rinforzo laterale nella parte inferiore è formato da profili a L. L'impalcato in legno è largo 3 m e giace su una lamina corrugata. La struttura è leggera, snella e caratterizzata da un'alta sensibilità alle vibrazioni indotte dai pedoni.

Il progetto di un sistema di monitoraggio è fondamentale per studiare l'interazione dei pedoni con la passerella pedonale, per poi utilizzare i dati acquisiti in procedure di identificazione modale e ottimizzazione del modello. Lo scopo della ricerca della configurazione ottimale è quindi l'identificazione modale. A tale proposito si è sviluppato un modello agli elementi finiti per determinare le deformate modali analitiche, utilizzando elementi *truss* ed elementi *beam*; l'impalcato è stato considerato vincolato alla base delle pile e in corrispondenza delle spalle, alle estremità delle campate laterali. Sono state ricavate le prime 10 forme modali e relative frequenze; i modi sono di tipo laterale, verticale e torsionale, e coinvolgono globalmente la struttura. Non sono stati considerati modi di vibrare di tipo locale. Le frequenze e la corrispondente tipologia del modo di vibrare sono riportate in Tab.4.6, e illustrate in Fig.4.4.

È stata progettata la configurazione ottimale dei sensori con il metodo IE-dms §4, considerando diverse condizioni: innanzitutto si sono considerati solo i modi di vibrare di tipo verticale (*caso 1*), poi i modi orizzontali e torsionali insieme (*caso 2*), ed infine tutti e 10 i modi di vibrare (*caso 3*).

I risultati ottenuti sono illustrati in Fig.4.5, le campate del ponte sono indicate

**Tabella 4.6:** passerella pedonale, frequenze dei dieci modi di vibrare considerati.

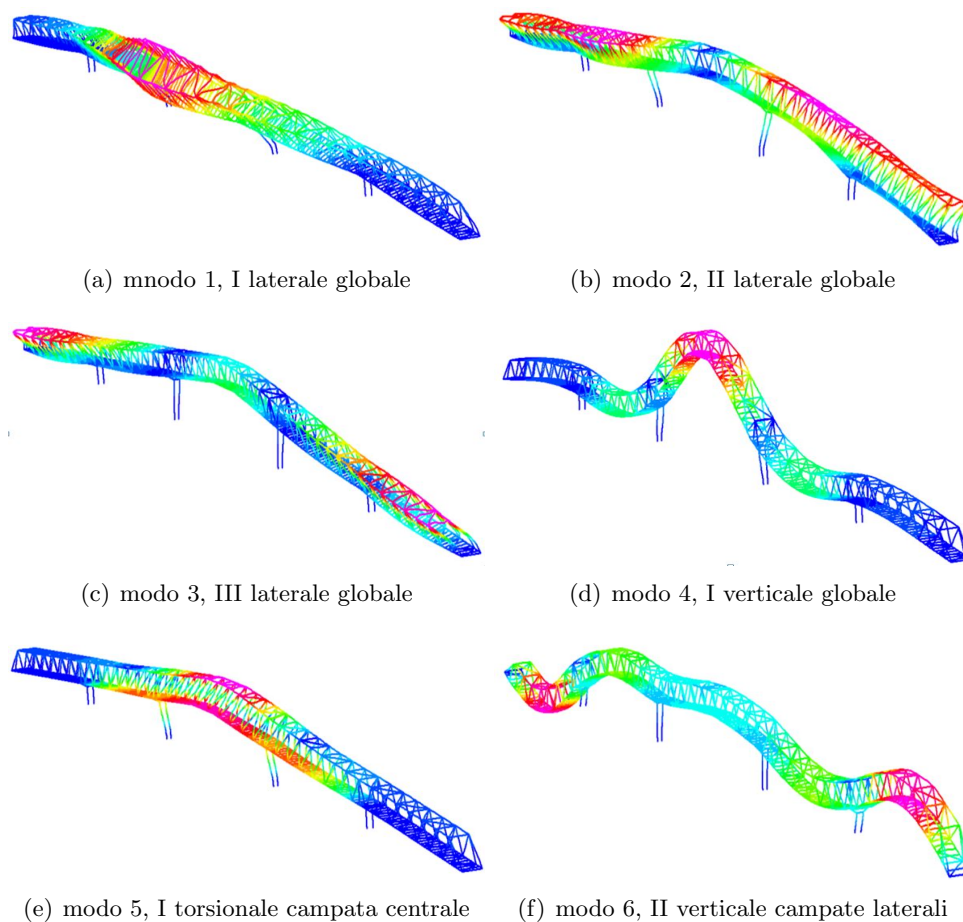
	frequenza [HZ]	modo
1	1.676	I laterale
2	2.702	II laterale
3	3.103	III laterale
4	4.293	I verticale
5	5.236	I torsionale campata centrale
6	5.520	II verticale campate laterali
7	6.476	III verticale campate laterali
8	6.521	II torsionale
9	6.521	III torsionale
10	11.063	IV verticale, campata centrale

con numeri romani per semplicità, la posizione del sensore sulla struttura è indicata in rosso e le lettere Y, Z sono le direzioni di acquisizione verticale e laterale rispettivamente, il numero indica lo step di posizionamento nella procedura sequenziale FSSP applicata, §2.3.

Nel *caso 1* i sensori sono logicamente posizionati tutti in direzione verticale, da ambo le parti della passerella pedonale e ben distribuiti su tutta la lunghezza del ponte, a causa della globalità dei modi di vibrare, ed inoltre sono in posizione approssimativamente simmetrica rispetto la mezzeria. Si nota inoltre come considerando anche solo i primi 6 sensori questi siano predisposti in modo tale da coprire l'intera luce della passerella. La campata centrale presenta un maggior numero di sensori rispetto alle altre campate a causa delle forme dei modi di vibrare selezionati, in particolare il modo numero 4.

Nel *caso 2* i sensori sono posizionati sia nella parte superiore che inferiore della sezione scatolare della passerella per poter cogliere con maggiore accuratezza i modi torsionali, indicati in Tab. 4.6 come il numero 5, 8 e 9. Allo stesso scopo una coppia di sensori è posizionata nella campata centrale (Y19 e Y20). Si nota inoltre nonostante si siano considerati anche i modi torsionali assieme agli orizzontali, i sensori tendono ad essere posizionati comunque tutti in direzione orizzontale per cogliere entrambe le tipologie. Solo gli ultimi due sensori, i precedentemente citati Y19 e Y20 sono predisposti in direzione verticale.

In ultimo, il *caso 3* valuta la configurazione ottimale considerando tutti e 10 i modi di vibrare, prendendo quindi in considerazione allo stesso tempo modi verticali, laterali e torsionali. La configurazione ottenuta prevede sensori posizionati in ambo le direzioni Y e Z, da entrambe le parti dell'impalcato e sono presenti sia nella parte superiore che inferiore della sezione scatolare. La configurazione prevede sensori ben



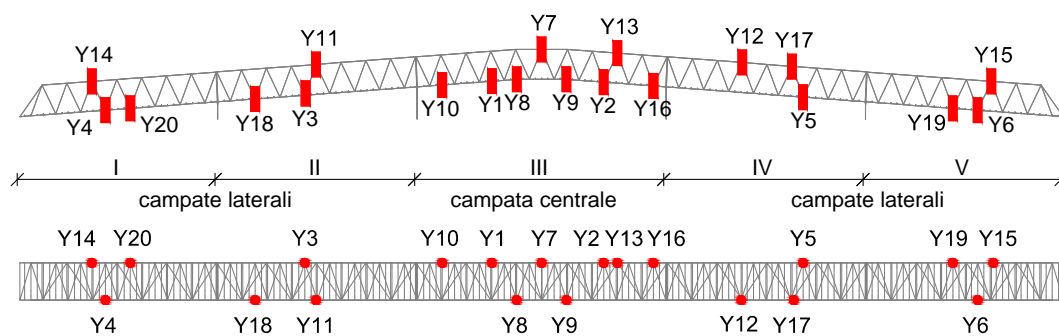
**Figura 4.4:** modi di vibrare della passerella pedonale ottenuti mediante modello agli elementi finiti.

distribuiti su tutta la passerella in modo quasi totalmente simmetrico, con differenze sostanzialmente nella distribuzione in pianta piuttosto che nella sezione trasversale.

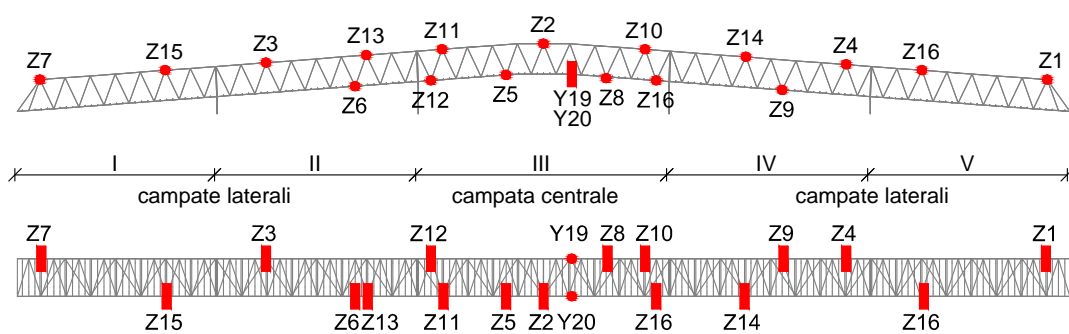
**Valutazione della bontà della soluzione** Per valutare la qualità della configurazione ottenuta, non sono stati considerati i criteri di valutazione di cui all'introduzione del presente §3 in quanto utili solo a scopo comparativo, ma è stato calcolato il MAC

$$MAC_{hk} = \frac{(\phi_h^T \phi_k)^2}{(\phi_h^T \phi_h)(\phi_k^T \phi_k)} . \quad (4.6)$$

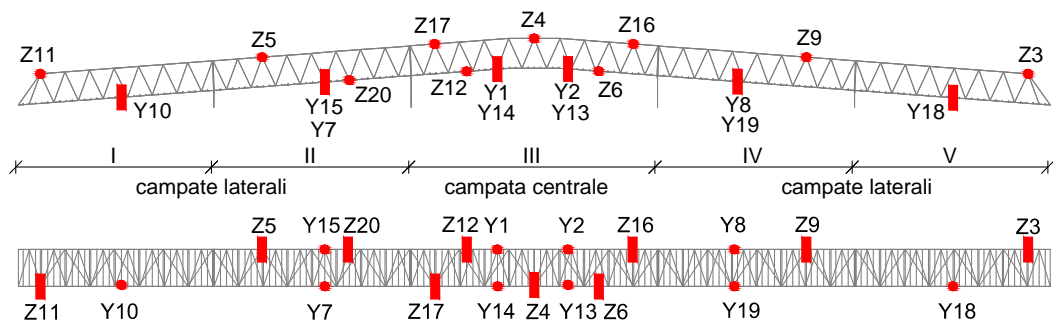
I termini sulla diagonale, cioè per  $h = k$ , sono ovviamente tutti uguali all'unità in quanto i dati sono analitici, ma si può notare che i termini fuori diagonale principale,



(a) caso 1 modi verticali

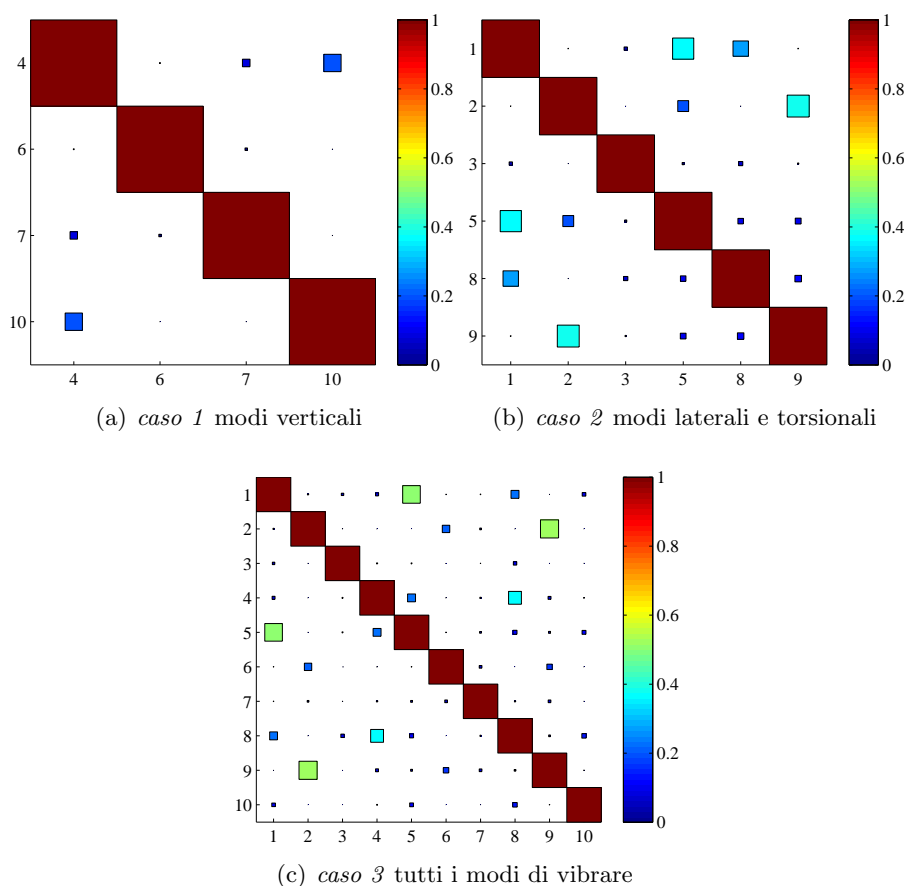


(b) caso 2 modi laterali e torsionali



(c) caso 3 tutti i modi di vibrare

**Figura 4.5:** passerella pedonale, configurazione ottimale per 20 sensori.



**Figura 4.6:** passerella pedonale, valori MAC per valutare la qualità delle soluzioni.

cioè per  $h \neq k$ , sono molto bassi con l'eccezione di qualche valore, Fig. 4.6.

Si consideri il *caso 3* volto a cogliere tutti e 10 i modi di vibrare, Fig. 4.6(c): la presenza di valori non trascurabili fuori diagonale mostra una correlazione intorno al 50%, legata ad una correlazione tra il primo modo laterale con il primo torsionale, ed il secondo modo laterale con il terzo torsionale. Si nota come utilizzando tutti e 20 i sensori per cogliere solo i modi laterali e torsionali, Fig. 4.6(b), la correlazione tra questi modi di vibrare sia minore, grazie alle maggiori informazioni colte dal sistema di monitoraggio ottimizzato proprio per valutare queste deformate modali. Nel caso in cui si considerino, per determinare la configurazione ottimale dei sensori, solo i modi verticali, la correlazione è sempre molto bassa e quindi le posizioni determinate appaiono efficienti, Fig. 4.6(a).



## Capitolo 5

# Posizionamento dei sensori in presenza di incertezze

La ricerca della configurazione ottimale dei sensori sulle strutture è un problema a priori in quanto sono disponibili solo dati analitici, provenienti ad esempio da un modello agli elementi finiti, in quanto il sistema di acquisizione deve ancora essere predisposto sulla struttura di interesse. Quindi, in generale, il processo di determinazione della configurazione ottimale dei sensori è soggetto a diversi errori ed incertezze dovuti al modello numerico. Questo aspetto è poco considerato in ambito scientifico, solo recentemente alcune ricerche hanno cominciato a considerare errori ed incertezze nella procedura di determinazione della configurazione ottimale per rendere la predizione più affidabile ed attendibile.

Alcuni studi [43] hanno sviluppato un metodo per valutare la configurazione ottimale dei sensori nel caso di incertezze in campo meccanico. In particolare è stato impiegato un metodo per validare il modello agli elementi finiti utilizzato, con dati sperimentali, che quantifica le incertezze stesse nel caso di carichi termici e meccanici transitori. I primi metodi che considerano le incertezze in fase di progetto della configurazione dei sensori sono applicati al problema di identificazione del danno, di cui è incerta sia la posizione che l'entità, e nello studio del sistema di monitoraggio è bene considerare la presenza di tali incertezze che possono compromettere la stima dei parametri di interesse a posteriori. Inizialmente si ovvia alla mancanza di tali informazioni svolgendo analisi probabilistiche su modelli a elementi finiti [43]. Azarbayejani [44] presenta un approccio probabilistico per identificare il numero ottimale e le posizioni dei sensori in caso di monitoraggio permanente, introducendo una distribuzione di probabilità che caratterizza entità e posizione del danno sulle strutture. Vinot [45] ha studiato la robustezza dei problemi sul posizionamento dei

sensori considerando diverse incertezze circa la conoscenza di determinate caratteristiche del modello. Le analisi delle incertezze possono essere svolte utilizzando diversi metodi stocastici presenti in letteratura, ad esempio il metodo Monte Carlo è uno dei più utilizzati [31].

In generale le incertezze possono essere considerate *a posteriori*, cioè valutare la configurazione ottimale in un caso perfetto, e successivamente verificare se la configurazione determinata è ugualmente efficiente anche con presenza di errori, oppure possono essere considerate *a priori*, cioè valutare la variazione della posizione dei sensori sulla struttura con le incertezze introdotte nelle analisi. Si sottolinea che entrambi gli approcci *a posteriori* ed *a priori* sono di tipo numerico in quanto in fase di progettazione del sistema di acquisizione non sono generalmente disponibili dati sperimentali. Per quanto riguarda le diverse tipologie di errori, si possono immaginare incertezze nelle misure in quanto utilizzati solo dati analitici, detti *errori di misura*, come ad esempio il rumore sui dati, ed errori dovuti alla rappresentazione del reale comportamento della struttura, che sono detti *errori di modello* dovuti ad una eccessiva semplificazione nel processo di modellazione o ad inaccuratezze. Le incertezze di modello possono poi essere classificate come parametriche e di forma, [31]. Le incertezze di tipo parametrico sono associate alle differenze tra il reale valore dei parametri del sistema fisico ed i valori dei parametri di input utilizzati per l'analisi, mentre le incertezze di forma sono associate a una mancanza di accuratezza nella modellazione del sistema fisico stesso.

Per quanto riguarda gli errori di misura in particolare, sono errori di tipo random, si presume a media nulla, e producono imprecisione nelle misure ma non deviazioni; gli errori di modello invece, possono portare ad una deviazione della stima della posizione dei sensori. Tali incertezze potrebbero alterare la posizione ottimale dei sensori e quindi incidere sulla qualità del monitoraggio delle strutture stesse. Per tale motivo sarebbe bene scegliere una configurazione in modo tale da poter comunque prevedere di ottenere dati utili dal sistema di acquisizione nonostante la presenza di tali errori.

Castro Triguero [31] in particolare, oltre a considerare l'effetto delle incertezze in diversi metodi esistenti per la determinazione della configurazione ottimale e a proporre un metodo basato sul concetto di *sensor affinity* per valutare, una volta determinate le posizioni più probabili con la presenza di incertezze, altre posizioni che forniscano informazioni aggiuntive e non doppie, propone anche dei criteri per valutare l'efficacia di una configurazione nei confronti degli errori di misura e di modello.

Gli errori di misura possono essere incorporati nei modelli agli elementi finiti,

per simulare numericamente il loro effetto [31]. Per misurare il livello di rumore si può utilizzare il rapporto segnale-rumore (signal to noise ratio SNR) definito come il rapporto tra la potenza del segnale  $P_{signal}$  (informazioni desiderate), e il rumore di fondo  $P_{noise}$  (segnale non desiderato),

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}}. \quad (5.1)$$

Ad esempio, nel caso di progetto della configurazione ottimale per raccogliere informazioni modali, il rumore può essere direttamente aggiunto ai modi di vibrare di interesse.

Per quanto riguarda gli errori di modello, la selezione delle posizioni è basata su un modello agli elementi finiti che è predisposto a contenere errori di modellazione significativi rispetto alla struttura reale. In [31] ad esempio sono considerati errori sulle proprietà dei materiali e sulla sezione geometrica, assumendo una distribuzione di probabilità gaussiana di media e deviazione standard note, ed imponendo un determinato coefficiente di variazione. Tuttavia il valore medio ed il coefficiente di variazione possono essere diversi dai valori esatti dell'applicazione reale. In aggiunta ci possono anche essere errori nella formulazione del problema stesso. Si può quindi valutare che i valori medi gaussiani per dei generici parametri  $p_i$  abbiano un errore definito come

$$\mu(p_i) = (1 + e)\mu_0(p_i) \quad (5.2)$$

in cui  $e$  rappresenta la deviazione della media dal suo valore medio reale  $\mu_0$ . Tale effetto può essere considerato ad esempio introducendo un errore statistico *bias error* con diversi livelli (da un -20% fino ad un +20% in [31]); la distribuzione di probabilità ed il coefficiente di variazione di  $p_i$  rimangono costanti.

Nel presente capitolo si analizzerà l'influenza dei diversi tipi di errori sulla collocazione ottimale dei sensori sulle strutture, considerando gli errori sia *a posteriori* che *a priori*, di misura e di modello. I casi studio sono quelli già trattati al precedente §3: la trave semplicemente appoggiata, il telaio spaziale asimmetrico in pianta e la passerella pedonale.

Sulla trave semplicemente appoggiata, come caso benchmark, si valuterà l'influenza dell'errore *a posteriori* sulle configurazioni ottimali progettate, in particolare come errore di misura introdotto come rumore sui dati, e come errore di modello introdotto nello specifico come errore sul grado di vincolo; successivamente si è valutata la variabilità della configurazione ottimale considerando la presenza di incertezze *a priori*, introdotte in un caso come variabilità del grado di vincolo e successivamen-

te come variabilità sulla distribuzione di massa e rigidità della trave stessa. Per quanto riguarda il telaio spaziale è stata considerata un'incertezza *a priori* sulla distribuzione delle masse di piano, che comporta una variazione delle deformate modali, e si è dunque valutata la variabilità della posizione dei sensori sulla struttura. In ultimo, per l'applicazione alla struttura reale, si è considerata una variazione *a priori* del grado di vincolo che connette le diverse campate, ed anche una variazione della distribuzione di massa dell'impalcato.

## 5.1 Trave semplicemente appoggiata

Il primo caso studio è la trave semplicemente appoggiata già trattata al §3. Si vuole valutare l'influenza delle incertezze sulla qualità della configurazione dei sensori e sulla variabilità delle posizioni. Sono state confrontate e paragonate le soluzioni ottenute applicando i metodi EFI, il metodo dell'Effective Independence con lunghezza di correlazione fissa, in particolare con  $\lambda = 0.4$  e il metodo IE-dms, che propone una funzione di correlazione dipendente dalla distanza tra i sensori ed i modi di vibrare.

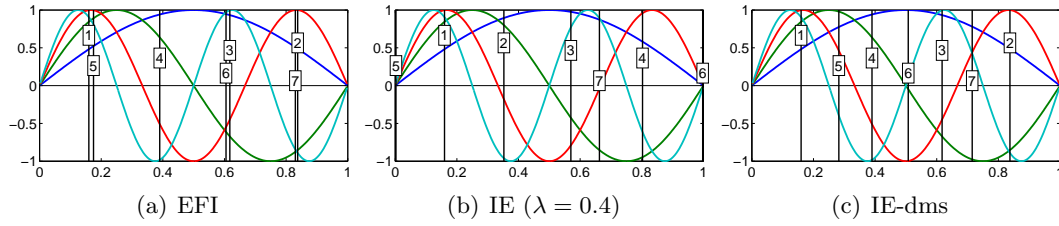
### 5.1.1 Errori a posteriori

Inizialmente si è ipotizzato di progettare il sistema di monitoraggio per un sistema immaginato perfetto e sono stati introdotti successivamente gli errori per valutare se la configurazione prevista nel caso perfetto sia comunque efficiente anche con la presenza di errori. In particolare, si è ipotizzato un sistema di monitoraggio di 7 sensori per cogliere le prime 4 forme modali di una trave semplicemente appoggiata, con modi di vibrare ottenuti come da Eq. 3.9, ed i risultati per quanto riguarda le posizioni dei sensori sono quelli in Fig. 4.1, riportati anche nel presente capitolo in Fig. 5.1 per i soli casi di interesse.

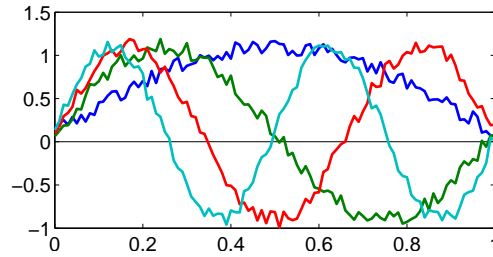
Sono stati considerati l'errore di misura, introdotto come rumore sui dati e l'errore di modello immaginato come una variazione del grado di vincolo, comportando una variazione e/o distorsione delle forme modali, e quindi una variazione del segnale acquisito dai sensori.

#### Errore di misura

Per considerare l'errore di misura, sono stati utilizzati dei dati pseudosperimentali, ottenuti moltiplicando i valori esatti delle componenti delle forme modali per dei coefficienti non correlati estratti da una distribuzione di probabilità di tipo normale, con media unitaria e coefficiente di variazione fissato, volto a simulare una



**Figura 5.1:** configurazione ottimale per 7 sensori e 4 modi di vibrare.



**Figura 5.2:** variazione delle prime quattro forme modali per un livello di rumore pari al 20%.

certa percentuale di rumore; un esempio delle forme modali ottenute per un livello di rumore del 20% è indicato in Fig. 5.2. Le configurazioni di sensori considerate sono sempre quelle indicate in Fig. 5.1, quindi progettate per il sistema immaginato senza incertezze né errori.

Per ogni livello di rumore assunto, sono stati svolti 300 test per avere un'analisi statistica dei risultati. In Tab. 5.1 e Tab. 5.2 sono indicati i risultati ottenuti applicando i criteri di valutazione introdotti al §3 considerando 6 o 7 sensori rispettivamente valutando di acquisire 4 modi di vibrare; si è ipotizzato un rumore sui dati pari al 20%, 30% e 40%. Sono riportati i valori medi (*med*) e la deviazione media assoluta, (median absolute deviation *mad*) per ogni parametro di valutazione. In particolare, la deviazione media assoluta è assunta come misura della dispersione statistica di un campione. Assunto un campione di dati  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , il valore *mad* è definito come la mediana del valore assoluto dei dati mediati, per cui

$$mad = \text{median}_i \|p_i - \text{median}_j(p_j)\| \quad (5.3)$$

cioè, partendo dalle deviazioni dei dati rispetto la mediana, *mad* è la mediana del loro valore assoluto.

In Tab. 5.3 e Tab. 5.4 sono indicati i risultati ottenuti applicando i criteri di valutazione introdotti al §3, con 6 o 7 sensori rispettivamente, considerando di avere informazioni aggiuntive in sede di acquisizione ed in particolare 5 modi di vibrare;

**Tabella 5.1:** trave semplicemente appoggiata, bontà della soluzione per 7 sensori e 4 modi di vibrare, valore medio *med* dei 300 test per ogni parametro e deviazione media assoluta *mad*.

(a) 20% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.054	0.007	1.756	0.062	491.731	41.748
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.050	0.008	1.556	0.008	110.277	10.978
IE-dms	0.016	0.004	1.386	0.041	370.723	33.110

(b) 30% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.075	0.010	1.893	0.090	570.028	73.411
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.070	0.014	1.707	0.014	133.909	19.466
IE-dms	0.031	0.007	1.548	0.073	431.03	53.974

(c) 40% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.096	0.015	2.025	0.132	664.026	125.809
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.097	0.020	1.900	0.020	159.848	31.122
IE-dms	0.052	0.012	1.735	0.099	496.339	89.805

il rumore sui dati si è ipotizzato sempre pari al 20%, 30% e 40%.

Si valuti inizialmente il caso di 4 modi di vibrare, Tab. 5.1 e Tab. 5.2. Il metodo EFI risulta il migliore nel caso in cui si consideri come parametro di valutazione il  $det(FIM)$ , risultato atteso in quanto il metodo di valutazione ha come parametro da ottimizzare esattamente la funzione obiettivo del metodo utilizzato per determinare la configurazione dei sensori. Il metodo dell'Information Entropy che ipotizza una lunghezza di correlazione  $\lambda = 0.4$  risulta essere una migliore stima nel caso di *rms* e *cn* nel caso in cui si considerino solo i primi 6 sensori; nel caso di sette sensori i valori migliori di *rms* e *cn* sono forniti dal metodo IE-dmf. Il metodo IE-dms, anche qualora non raggiunga il valore ottimale per i parametri di valutazione, è sempre prossimo ad esso, dimostrando una discreta robustezza.

Si consideri ora che per la stessa configurazione di sensori, progettata ed ottimizzata per cogliere le prime quattro forme modali, sia disponibile una ulteriore forma modale, sempre soggetta alle stesse soglie di rumore sul dato. Si vuole quindi indagare quanto il sistema di acquisizione con le posizioni ottimizzate per valutare 4 modi sia in grado di cogliere eventuali ulteriori informazioni disponibili, analoga-

**Tabella 5.2:** trave semplicemente appoggiata, bontà della soluzione per 6 sensori e 4 modi di vibrare, valore medio *med* dei 300 test per ogni parametro e deviazione media assoluta *mad*.

(a) 20% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.092	0.009	1.828	0.061	243.905	23.961
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.029	0.006	1.408	0.006	54.0193	6.097
IE-dms	0.043	0.007	1.534	0.054	208.743	20.083

(b) 30% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.113	0.014	1.987	0.100	284.769	39.187
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.053	0.012	1.587	0.012	66.0865	12.069
IE-dms	0.062	0.012	1.689	0.084	244.057	34.668

(c) 40% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.139	0.020	2.157	0.140	323.89	58.011
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.085	0.019	1.809	0.019	76.6388	18.635
IE-dms	0.085	0.018	1.865	0.125	274.684	49.579

**Tabella 5.3:** trave semplicemente appoggiata, bontà della soluzione per 7 sensori e 5 modi di vibrare, valore medio *med* dei 300 test per ogni parametro e deviazione media assoluta *mad*.

(a) 20% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.298	0.007	14.115	3.490	32.9265	13.249
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.063	0.007	2.426	0.007	136.164	18.593
IE-dms	0.013	0.003	1.423	0.042	1331.66	136.818

(b) 30% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.300	0.010	14.173	4.086	48.7712	23.263
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.082	0.013	2.640	0.013	167.879	34.755
IE-dms	0.026	0.005	1.604	0.068	1551.75	221.805

(c) 40% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.307	0.012	14.321	4.367	69.3017	35.364
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.108	0.017	2.894	0.017	201.371	49.841
IE-dms	0.045	0.009	1.816	0.092	1834.21	379.373

mente a come era stato fatto al §4.1. Sono quindi stati applicati gli stessi criteri di valutazione *rms*, *cn* e *det(FIM)* sulle diverse configurazioni con i sensori nelle stesse posizioni. I risultati ottenuti considerando i primi 6 sensori della configurazione o i primi 7 sono riportati in Tab. 5.3 e Tab. 5.4. Si nota che il metodo IE-dms soddisfa sempre al meglio i criteri di valutazione, con un ampio scarto rispetto agli altri metodi.

Si può quindi notare come il rumore sui dati non modifichi la relazione tra la bontà di una configurazione rispetto alle altre valutata nel caso di assenza di rumore. Solo in certi casi all'aumentare del rumore, le differenze si attenuano, come nel caso del valore medio di *rms* e *cn* in Tab.5.2. Come già anticipato ed ipotizzato in bibliografia quindi, la posizione ottimale dei sensori su una struttura è indipendente dal rumore sui dati, motivo per il quale nella covarianza dell'errore di predizione si assume che la bontà della configurazione sia correlata solo agli errori di modello §1.6.2. Nel seguito pertanto non sarà più simulato ed introdotto nei dati pseudo-sperimentali l'errore di misura.

**Tabella 5.4:** trave semplicemente appoggiata, bontà della soluzione per 6 sensori e 5 modi di vibrare, valore medio *med* dei 300 test per ogni parametro e deviazione media assoluta *mad*.

(a) 20% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.295	0.009	14.966	3.821	14.6941	6.526
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.255	0.012	35.104	0.012	0.996222	0.665
IE-dms	0.046	0.005	1.956	0.083	483.262	56.379

(b) 30% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.302	0.012	17.588	7.283	20.3211	11.149
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.260	0.016	28.973	0.016	2.11838	1.525
IE-dms	0.064	0.009	2.186	0.143	573.544	106.840

(c) 40% rumore						
metodo	rms		cn		det(FIM)	
	med	mad	med	mad	med	mad
EFI	0.307	0.016	20.248	11.655	28.8959	18.369
IE( $\lambda = 0.4$ )	0.264	0.019	23.436	0.019	4.29788	3.080
IE-dms	0.086	0.013	2.434	0.195	655.533	151.985

### Errore di modello

Si suppone che la trave abbia una molla rotazionale di rigidezza  $K$  ad una estremità, ma per mancanza di informazioni circa il grado di vincolo stesso, il sistema di monitoraggio è stato progettato pensando ad una trave semplicemente appoggiata. Questo comporta ad una distorsione delle forme modali rispetto a quelle considerate. Ipotizzando che la molla sia all'estremità di destra della trave, l'equazione delle frequenze è:

$$2\alpha^2 \sin(\alpha L) \sinh(\alpha L) - \frac{\alpha K}{EI} \left[ \frac{\cosh(\alpha L)}{\sinh(\alpha L)} \sin(\alpha L) - \cos(\alpha L) - \cosh(\alpha L) - \frac{\cosh(\alpha L)}{\sinh(\alpha L)} \right] = 0 \quad (5.4)$$

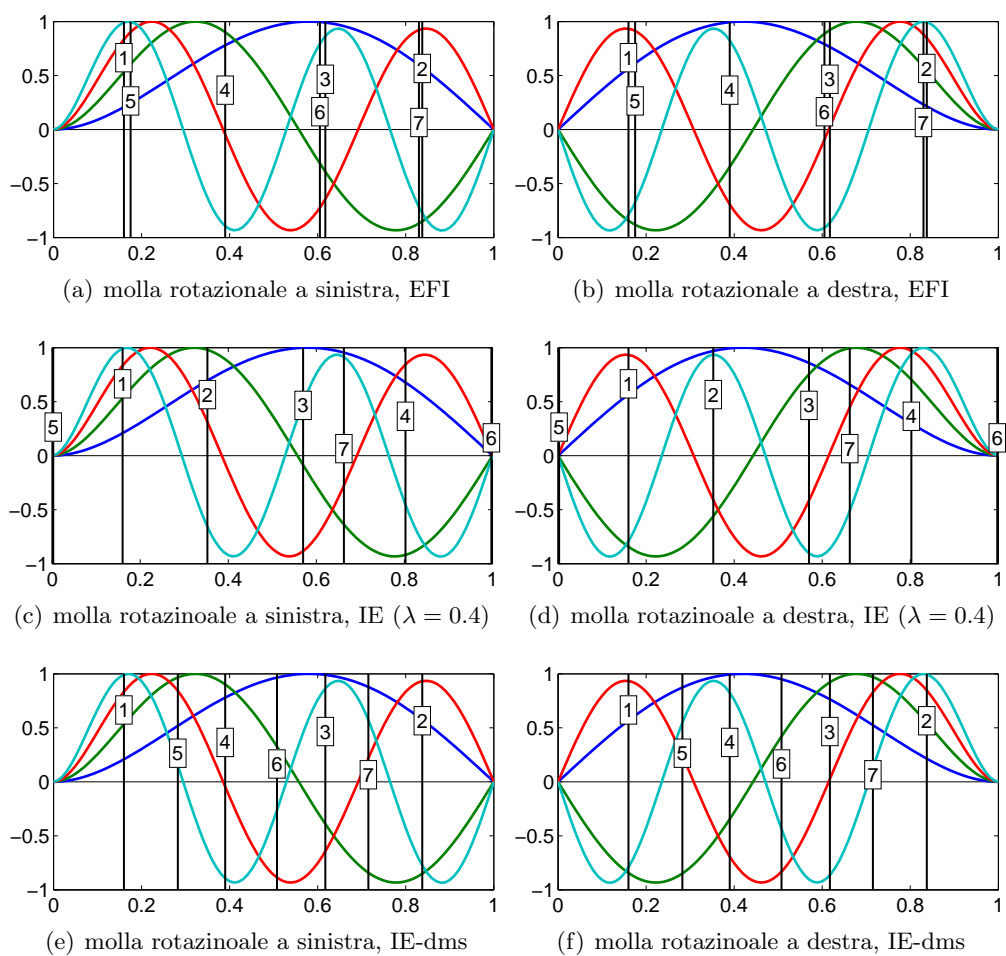
e le deformate modali possono essere ottenute in accordo con la seguente equazione:

$$\nu_{\alpha_k} = \cos(\bar{\alpha}_k x) + \frac{\cos(\bar{\alpha}_k L) + \cosh(\bar{\alpha}_k L) + \frac{\cosh(\bar{\alpha}_k L)}{\sinh(\bar{\alpha}_k L)}}{\sin(\bar{\alpha}_k L)} \sin(\bar{\alpha}_k x) - \cosh(\bar{\alpha}_k x) + \frac{\cosh(\bar{\alpha}_k L)}{\sinh(\bar{\alpha}_k L)} \sinh(\bar{\alpha}_k x) \quad (5.5)$$

in cui  $\alpha^4 = m\omega^2/EI$ ,  $L$  è la lunghezza della trave,  $m$  è la massa per unità di lunghezza,  $\omega$  è la pulsazione ed  $EI$  sono rispettivamente il modulo di Young e il momento di inerzia della sezione. Senza perdere generalità e per semplificare il problema, si assume che il valore  $K/EI$  sia unitario, ed in Eq. 5.5  $\bar{\alpha}_k$  è la  $k$ -esima soluzione di Eq. 5.4. La soluzione di Eq. 5.4 fornisce le forme modali di riferimento, riportate in Fig. 5.3, si noti la distorsione che provoca una asimmetria nelle deformate modali a causa della molla rotazionale. Le forme modali di riferimento sono ora quindi quelle distorte rispetto alle forme modali della trave semplicemente appoggiata utilizzate per il progetto del sistema di monitoraggio.

Per valutare la qualità delle informazioni ottenute sono stati applicati i criteri di valutazione di cui al §3. In Tab. 5.5 sono riportati i valori ottenuti per i diversi parametri di valutazione, sia nel caso di molla a sinistra che a destra della trave. Con le variazioni di deformate modali ipotizzate, la funzione di correlazione dipendente sia dalla distanza che dalle deformate modali pare soddisfare al meglio i criteri di valutazione quando sono considerati i primi 4 modi, con l'unica eccezione del determinante della matrice di Fisher  $\det(FIM)$  nel caso di molla a sinistra, in cui il migliore indice è fornito dal metodo EFI.

Qualora si considerino 5 modi di vibrare, allora il metodo IE-dms fornisce i migliori indici e con ampio margine rispetto agli altri metodi.



**Figura 5.3:** errore di modello, deformate modali e posizione dei sensori con molla rotazionale ad una estremità della trave.

**Tabella 5.5:** trave semplicemente appoggiata, bontà della soluzione con errore di modello.

(a) 4 modi, molla a sinistra

<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.035	1.68	196.78
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.039	1.48	39.06
IE-dms	0.005	1.17	178.63

(b) 4 modi, molla a destra

<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.032	1.66	194.24
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.018	1.41	58.20
IE-dms	0.005	1.16	180.21

(c) 5 modi, molla a sinistra

<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.181	13.33	11.40
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.087	2.20	62.47
IE-dms	0.005	1.24	599.36

(d) 5 modi, molla a destra

<b>metodo</b>	<b>rms</b>	<b>cn</b>	<b>det(FIM)</b>
EFI	0.204	13.03	12.89
IE ( $\lambda = 0.4$ )	0.060	2.32	61.88
IE-dms	0.005	1.23	605.91

Bisogna anche notare che i risultati ottenuti sono diversi a seconda della posizione della molla, e variano anche al variare del numero di sensori. Ciò è dovuto al fatto che quando si determina la configurazione ottimale il problema della trave semplicemente appoggiata (progetto con il sistema perfetto) è simmetrico, e quindi vengono trovate in realtà due possibili configurazioni per i sensori che sono simmetriche rispetto alla mezzzeria della trave. La scelta di una configurazione rispetto all'altra è equivalente nel caso del problema della trave semplicemente appoggiata ma diventa cruciale qualora si introduca la molla rotazionale.

Per questa ragione può essere interessante e importante considerare l'errore di modello nel processo di determinazione della configurazione ottimale, cercando di stimarlo a priori.

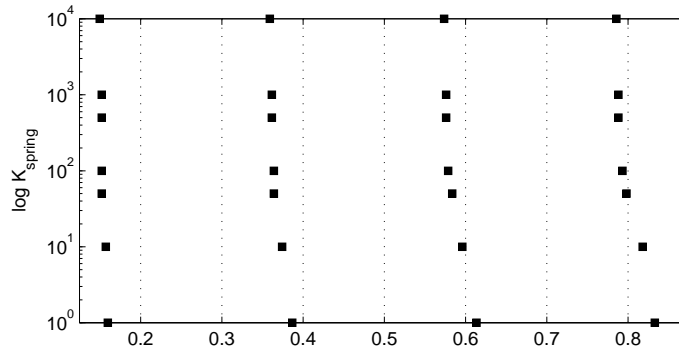
### 5.1.2 Errori a priori

In questa sezione si è valutato il variare della posizione dei sensori nella determinazione delle diverse configurazioni ottimali, per i diversi metodi, al variare delle incertezze ipotizzate nel modello. Si è presupposto che le incertezze sul modello possano essere principalmente di due tipi: incertezza sul grado di vincolo ed incertezza nelle proprietà meccaniche. In particolare per quanto riguarda l'incertezza sul grado di vincolo si è ipotizzato di non sapere esattamente il grado di rigidità del vincolo all'estremità della trave, e si è valutato la variazione della posizione dei sensori nelle configurazioni secondo i diversi metodi EFI, Effective Independence con lunghezza di correlazione pari a 0.4 e il metodo IE-dms. Per quanto riguarda le incertezze sui parametri meccanici si è considerato di avere una certa incertezza sulla distribuzione di massa e rigidità lungo trave.

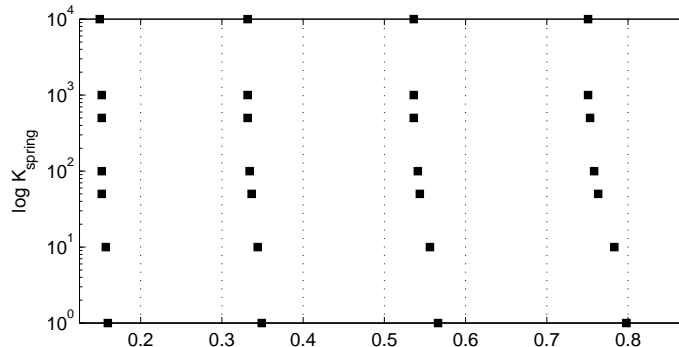
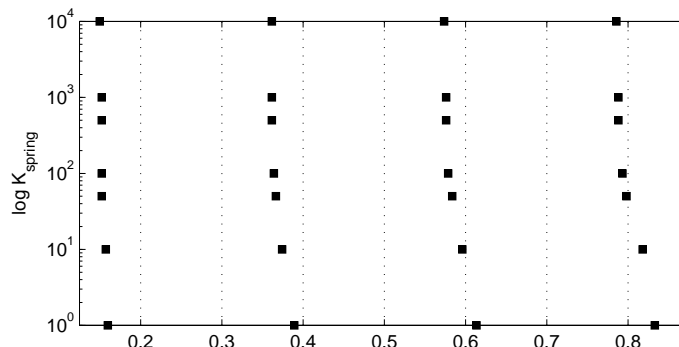
#### Incertezza sul grado di vincolo

Nel problema perfetto della trave semplicemente appoggiata, la simmetria iniziale porta alla determinazione di due configurazioni ottimali simmetriche rispetto alla mezzzeria e la scelta inizialmente indifferente di una delle due soluzioni può essere cruciale nella qualità dei risultati qualora si inserisca un errore di modello a posteriori. Si è pensato di valutare la presenza di incertezza sui dati in fase di progettazione del sistema di monitoraggio stesso, per valutare la variabilità della soluzione al variare delle incertezze.

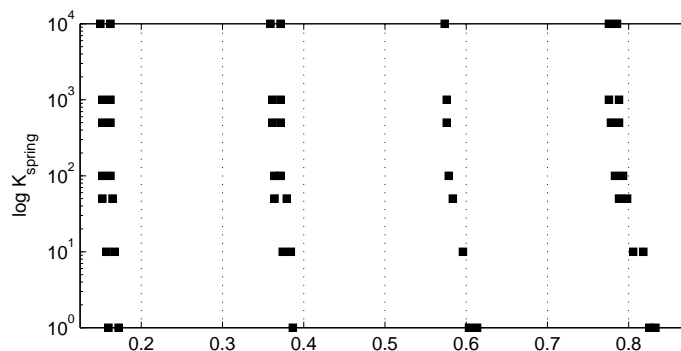
In Fig. 5.4-5.5 sono rappresentate le configurazioni ottenute per valutare le prime quattro forme modali dai metodi EFI, dell'Effective Independence considerando la lunghezza di correlazione pari a 0.4 ed il metodo IE-dms che propone una correlazione



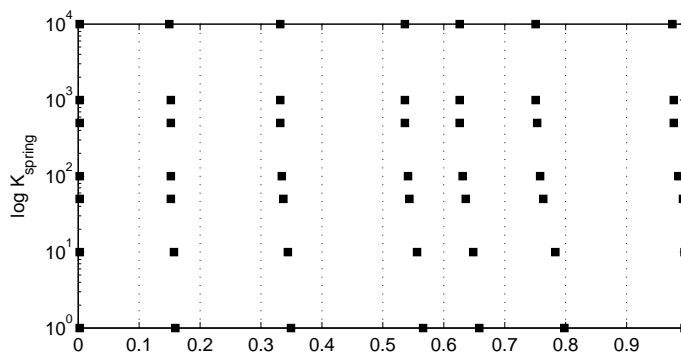
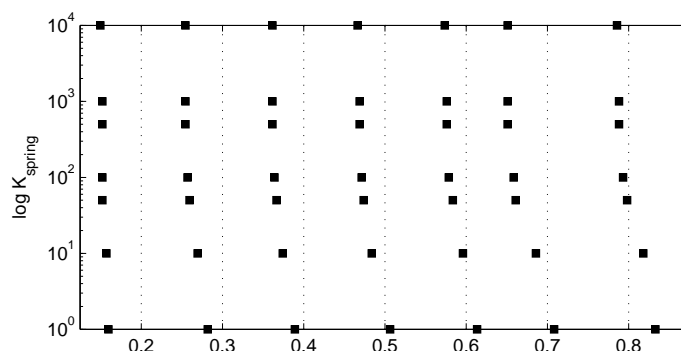
(a) 4 sensori, EFI

(b) 4 sensori, IE  $\lambda = 0.4$ (c) 4 sensori, IE  $\delta\phi$ 

**Figura 5.4:** errore di modello, variabilità della posizione dei primi 4 sensori al variare della rigidità del vincolo a destra della trave considerando i primi quattro modi di vibrare.



(a) 7 sensori, EFI

(b) 7 sensori, IE  $\lambda = 0.4$ (c) 7 sensori, IE  $\delta\phi$ 

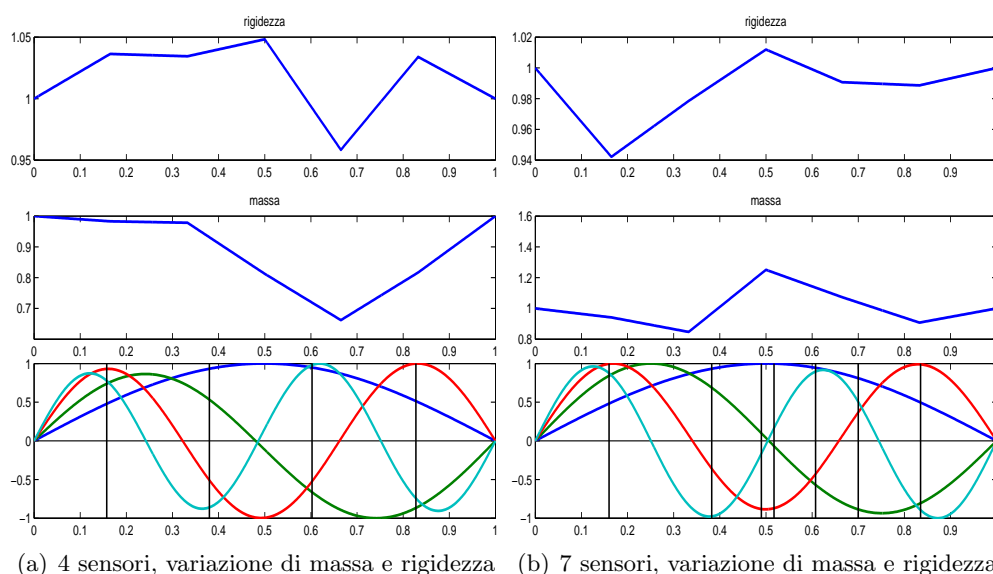
**Figura 5.5:** errore di modello, variabilità della posizione dei primi 7 sensori al variare della rigidità del vincolo a destra della trave considerando i primi quattro modi di vibrare.

tra il segnale dei sensori dipendente dalla distanza e dalle deformate modali. Si è considerata una trave con un appoggio all'estremità sinistra e con un vincolo di rigidità rotazionale variabile a destra, che spazia dal simulare la condizione di appoggio fino ad una condizione di incastro. La configurazione è stata considerata composta dapprima di 4 sensori, Fig. 5.4, e successivamente di 7, Fig. 5.5. I sensori sono indicati dai quadratini neri lungo la trave (ascissa), al variare della rigidità del vincolo (ordinate, asse logaritmico); ad ogni assegnata rigidità del vincolo è riportata la configurazione ottenuta.

Si può notare che le configurazioni di 4 sensori sono simili tra loro, Fig. 5.4. La posizione dei sensori più vicina al vincolo soggetto ad incertezza è ovviamente soggetta a maggiore variabilità rispetto alle altre, con circa un 10% di variazione dalla condizione che presuppone un appoggio a quella che presuppone un incastro. Per quanto riguarda le configurazioni con 7 sensori per cogliere le prime 4 forme modali, si nota che il metodo EFI tende a posizionare sempre tutti i sensori in sole 4 posizioni, Fig. 5.5(a), che sono le 4 posizioni a maggiore contenuto di informazioni per la funzione obiettivo. Il metodo dell'Information Entropy introduce una correlazione tra i segnali dei sensori al fine di evitare la sovrapposizione degli stessi in poche posizioni, ed al fine di distanziarli però si può arrivare ad avere sensori posizionati alle estremità vincolate dell'elemento, Fig. 5.5(b). In questo modo questi sensori non sono in grado di aggiungere informazioni utili al sistema di monitoraggio. Nel metodo IE-dms, che definisce una funzione di correlazione dipendente sia dalla distanza che dalle forme modali, pone i sensori ben distanziati lungo la struttura evitando i punti a deformata nulla, Fig. 5.5(c).

### **Incertezza sulla distribuzione di massa e rigidità**

Si è ipotizzato successivamente di non conoscere a priori l'esatta distribuzione di massa e rigidità lungo l'elemento trave. Tale simulazione è svolta introducendo dati *pseudosperimentali*, ottenuti moltiplicando i valori medi di massa e rigidità per coefficienti non correlati estratti da una distribuzione di probabilità di tipo normale, con media unitaria e coefficiente di variazione fissato. Si è introdotta una possibile variazione del 5% sulla distribuzione di massa e un 15% sulla distribuzione di rigidità. Per evitare estreme variabilità della massa in piccole distanze, la variazione random rispetto al valore medio è stata inserita in 5 punti dell'elemento trave e su tutte le altre posizioni il valore è stato interpolato, ottenendo così una variazione graduale. È stata svolta una analisi Monte Carlo con 100 simulazioni per ogni metodo di posizionamento dei sensori, facendo variare massa e rigidità, valutando le forme modali in ogni analisi a seconda delle proprietà meccaniche e definendo quindi

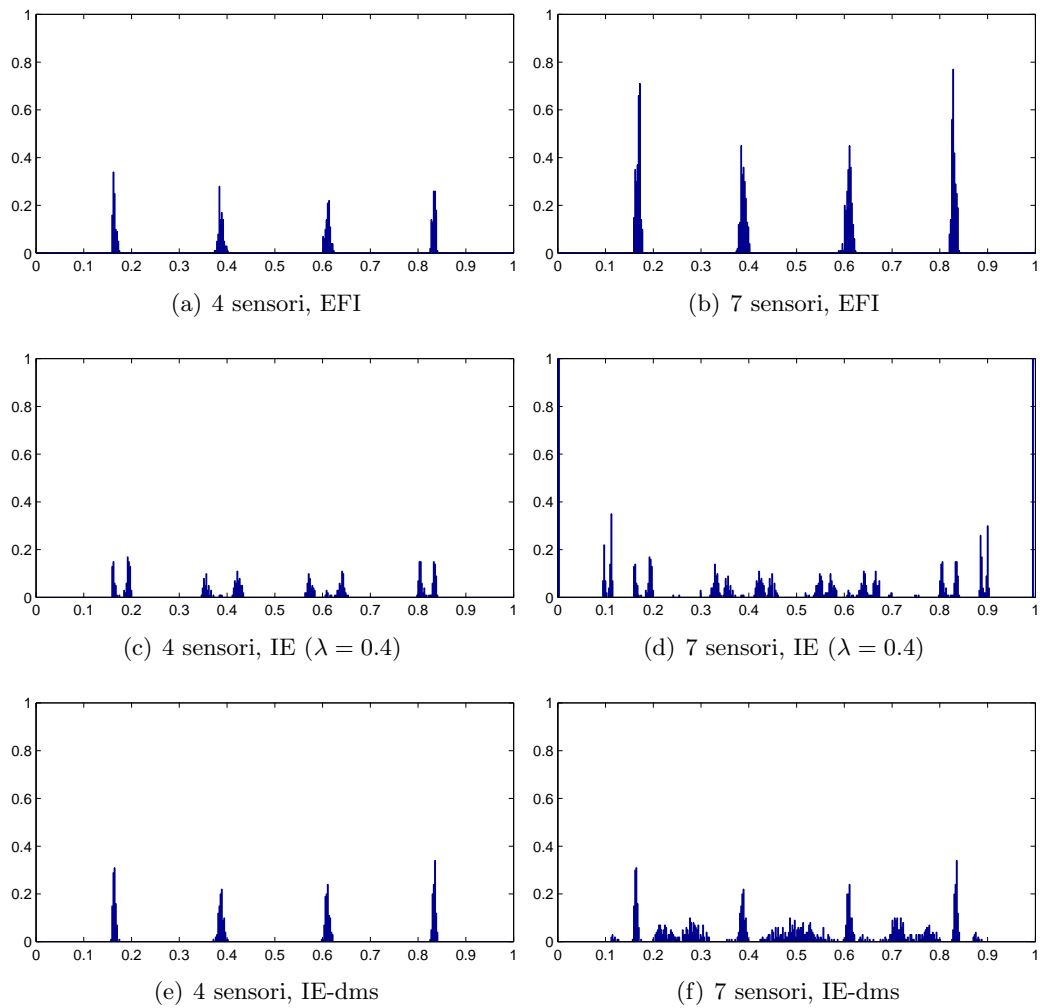


**Figura 5.6:** errore di modello, esempio di distorsione dei modi a causa della variazione di distribuzione di massa e rigidezza della trave e conseguente posizione dei sensori.

la configurazione. Un esempio di variazione di massa, rigidezza, deformate modali e configurazione ottenuta da tali dati in input, è riportata in Fig. 5.6 nel caso di 4 o 7 sensori.

La probabilità che i diversi gradi di libertà hanno di essere selezionati come collocazione ottimale per un sensore è riportata in Fig. 5.7, nel caso di una configurazione di 4 sensori per cogliere i primi 4 modi di vibrare, oppure di 7 sensori.

Considerando le configurazioni ottenute ipotizzando 4 sensori, si nota che i metodi EFI e IE-dms identificano 4 posizioni più probabili, mentre il metodo dell'Information Entropy con lunghezza di correlazione fissa e pari a 0.4 ha una dispersione tale da non permettere di identificare 4 posizioni a maggiore probabilità. Portando il numero di sensori previsti dal sistema di acquisizione da 4 a 7, si nota che il metodo EFI identifica sempre solo 4 posizioni per i sensori, permettendo di identificare solo i 4 modi di vibrare per i quali il sistema è ottimizzato, Fig. 5.7(b). Il metodo dell'Information Entropy con lunghezza di correlazione pari a 0.4 posiziona sempre 2 sensori alle estremità vincolate della trave e l'alta dispersione dei risultati sull'intero elemento non permette di determinare altre posizioni più probabili per i sensori, Fig. 5.7(d). Il metodo IE-dms permette di identificare 4 posizioni più probabili e tende a distribuire gli altri sensori sulla trave per cercare di fornire ulteriori informazioni attraverso i sensori aggiuntivi, ma di fatto la variabilità random delle



**Figura 5.7:** errore di modello, variabilità della posizione dei sensori al variare della distribuzione di massa e rigidezza della trave.

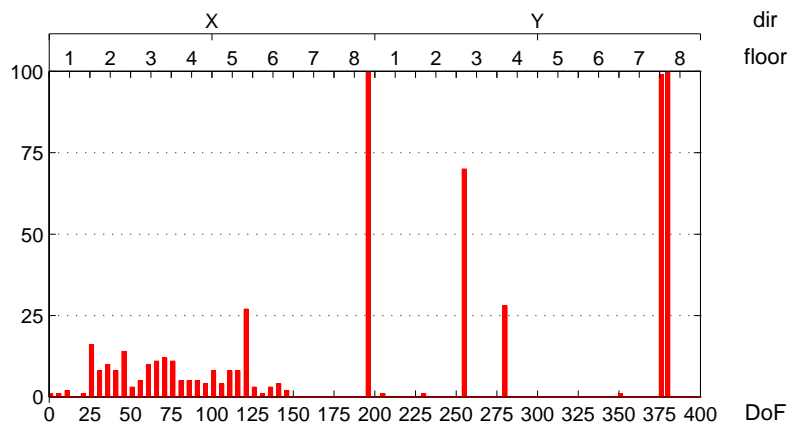
caratteristiche meccaniche implica una dispersione sulle posizioni addizionali alle 4 comunque tale da fornire difficilmente altre 3 posizioni ad alta probabilità. Tale dispersione è comunque giustificabile dalla variabilità delle deformate modali, parametro da cui dipende il problema del posizionamento dei sensori. Bisogna tuttavia sottolineare che una non eccessiva variazione di massa e rigidezza ( $\pm 5/15\%$ ) porta una più ampia incertezza sulla definizione della posizione dei 3 sensori addizionali.

## 5.2 Telaio spaziale asimmetrico in pianta

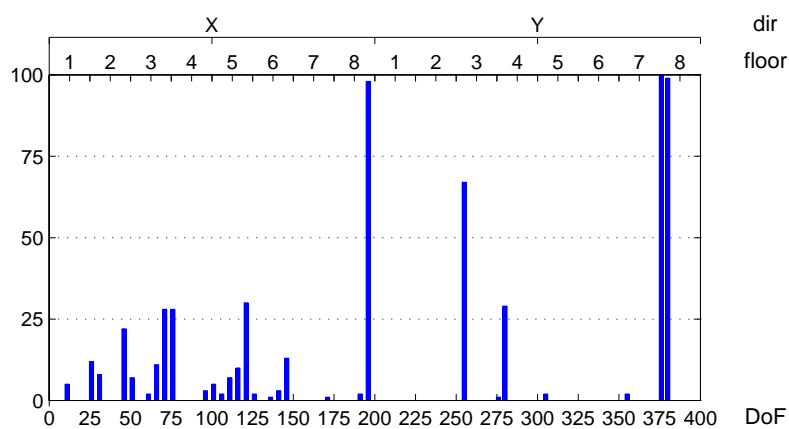
Il telaio considerato è il medesimo già trattato al §4.2. Per quanto riguarda le incertezze, è stata considerata una variabilità a priori della massa di piano. In particolare sono state determinate diverse configurazioni di sensori a partire da dati pseudosperimentali, ottenuti moltiplicando i valori medi, considerati come esatti, delle masse di piano per dei coefficienti non correlati, estratti da una distribuzione di probabilità normale con valore medio unitario e coefficiente di variazione pari al 40%. Si è svolta una analisi Monte Carlo composta da 100 test. Generalmente le analisi Monte Carlo richiedono un numero di simulazioni molto alto e si ottengono risultati solo a fronte di alti sforzi computazionali. Se in elementi semplici quali la trave semplicemente appoggiata questo non era certo un problema in quanto l'onere computazionale rimaneva contenuto, potrebbe esserlo per strutture più complesse. Tuttavia per questa struttura, ancora relativamente piccola e semplice, il metodo è considerato e ritenuto ancora efficace per lo scopo.

I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 5.8. Si è considerato un numero di sensori pari a 6 per cogliere i primi 6 modi di vibrare, e sono stati applicati e confrontati i metodi EFI, che quindi considera correlazione nulla tra il segnale dei sensori, ed il metodo IE-dms, che considera una correlazione del segnale dipendente dalla distanza tra i sensori e dalle deformate modali. L'asse delle ordinate riporta il numero di volte in cui il grado di libertà (indicato nell'asse delle ascisse) è stato selezionato nei 100 test svolti. Sono stati suddivisi i gradi di libertà in cui è possibile posizionare il sensore nelle due direzioni  $x$  ed  $y$ , e nei diversi piani del telaio, in particolare i gradi di libertà da 1 a 200 indicano che il sensore acquisisce in direzione  $x$ , mentre da 201 a 400 in direzione  $y$ ; per ogni piano poi sono considerati 25 possibili posizioni di acquisizione, con numero crescente dal piano primo fino alla sommità.

Si nota, da Fig. 5.8, che 3 sensori sono sempre posizionati all'ultimo piano, ritenuti perciò di importanza fondamentale per il processo di identificazione. Questo risultato era assolutamente auspicabile, infatti i 3 sensori permettono di identificare il moto di piano rigido, ovviamente sono all'ultimo piano in quanto è quello che ha



(a) EFI



(b) IE-dms

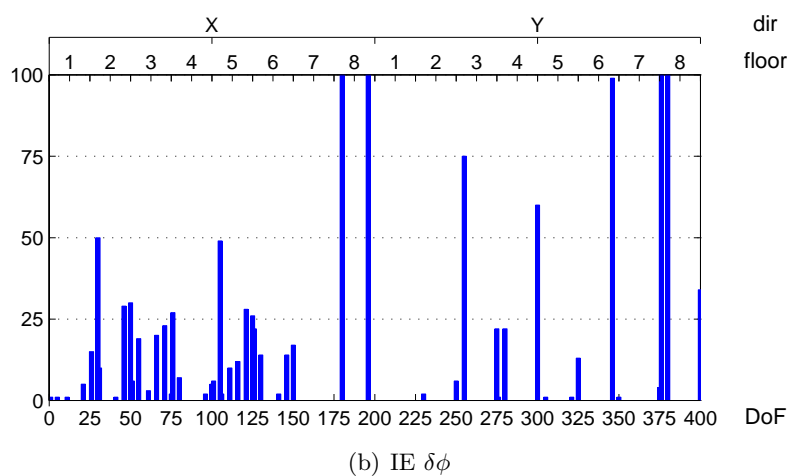
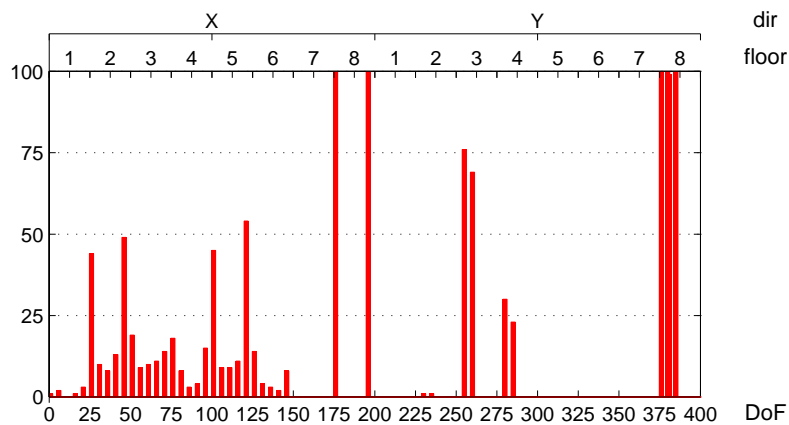
**Figura 5.8:** errore di modello, probabilità della posizione ottimale al variare della massa di piano considerando 6 sensori e 6 modi di vibrare; *dir* indica la direzione di acquisizione, *floor* indica il piano, *DoF* è il numero del grado di libertà.

spostamenti modali maggiori e quindi prediletto rispetto agli altri. Tali gradi di libertà sono i 276, 376 e 380, indicati in Fig. 5.8. Si può tuttavia notare, purtroppo una certa dispersione nel risultato nel posizionamento dei sensori successivi, dovuta all'alta variazione random dei dati di input. Una grande variazione dei parametri di input infatti, causa una grande variazione delle deformate modali, in particolare la posizione dei punti di massimo e minimo locale dei modi superiori al primo, che coinvolgono i piani inferiori.

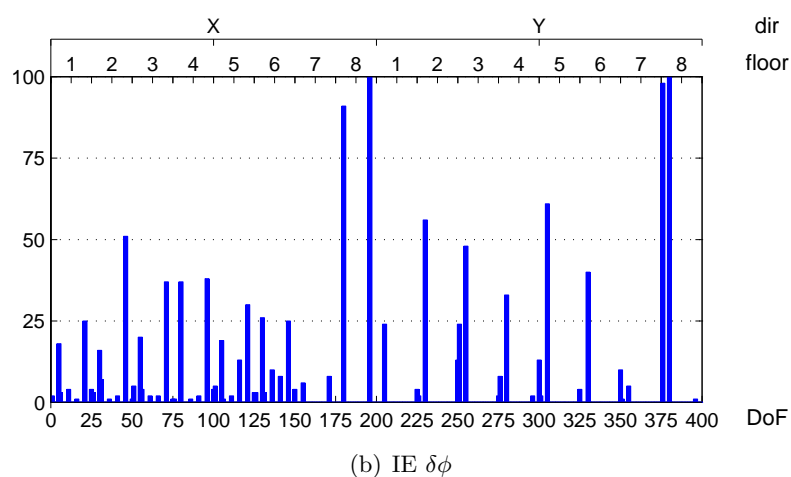
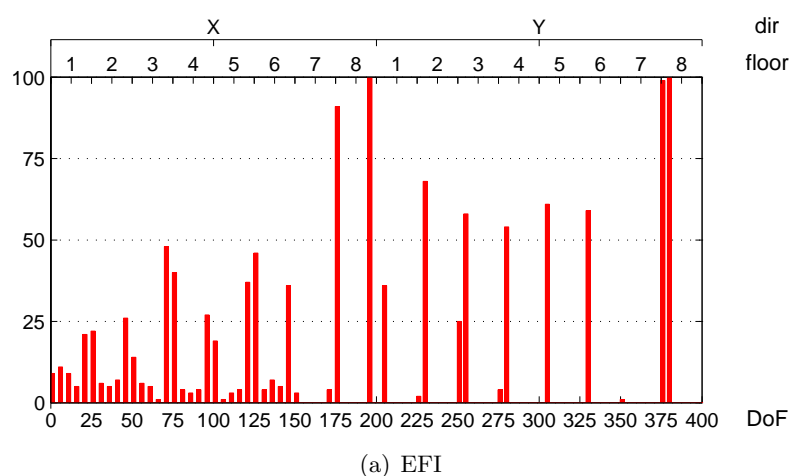
Considerando il metodo EFI, Fig. 5.8(a), infatti, viene determinata una distribuzione pressoché uniforme di sensori e quindi determinare un set di posizioni preferibili ad altre è molto complicato, a maggior ragione se si vogliono evitare posizioni di acquisizione vicine che generalmente non contribuirebbero efficacemente nel fornire informazioni aggiuntive. Anche se una certa dispersione è presente anche nel caso di applicazione del metodo IE-dms, la variazione dei risultati è meno sensibile alla variazione dei parametri di input e possono essere identificate alcune posizioni preferenziali per i sensori, Fig. 5.8(b).

Si sono successivamente considerati sempre 6 modi di vibrare ma valutando di posizionare 12 sensori, Fig. 5.9, applicando nuovamente il metodo EFI e IE-dms. Si può notare che il metodo EFI, Fig. 5.9(a), prevede 6 sensori all'ultimo piano con un'alta ridondanza di informazioni, in particolare sono considerati i gradi di libertà 176, 196, 376, 380, 381, 385; è inoltre presente una grande dispersione nella definizione della posizione del sensore ai piani inferiori principalmente in direzione  $x$  dato che il metodo sostanzialmente non predilige certi gradi di libertà di un piano rispetto ad altri. La funzione IE-dms permette di avere meno dispersione nei risultati anche aumentando il numero di sensori, Fig. 5.9(b), preferendo almeno i gradi di libertà di spigolo rispetto a quelli in posizione centrale del piano; inoltre il numero di sensori all'ultimo piano è inferiore rispetto all'altro metodo, anche se comunque l'aggiunta del quarto sensore introduce ridondanza di informazioni (gradi di libertà numero 180, 196, 376, 380), già comunque ipotizzata al sensore n8 nella situazione senza incertezze, Fig. 4.2.

In ultimo è stata svolta una analisi Monte Carlo di 100 test applicando i metodi EFI e IE-dms considerando di ottimizzare un sistema di 12 sensori per i primi 9 modi di vibrare, aggiungendo un modo con percentuale di massa attivata prevalentemente in direzione  $x$ , uno prevalente in direzione  $y$  ed uno prevalentemente torsionale. I modi sono sempre normalizzati secondo il fattore di partecipazione modale, per conferire maggiore importanza ai primi modi. Si nota in Fig. 5.10 che, nonostante i modi aggiunti abbiano una importanza inferiore rispetto agli altri modi di vibrare, la probabilità dei gradi di libertà di essere scelti come posizione ottimale cambia



**Figura 5.9:** errore di modello, probabilità della posizione ottimale al variare della massa di piano considerando 12 sensori e 6 modi di vibrare; *dir* indica la direzione di acquisizione, *floor* indica il piano, *DoF* è il numero del grado di libertà.



**Figura 5.10:** errore di modello, probabilità della posizione ottimale al variare della massa di piano considerando 12 sensori e 9 modi di vibrare; *dir* indica la direzione di acquisizione, *floor* indica il piano, *DoF* è il numero del grado di libertà.

rispetto a quanto ottenuto in Fig. 5.9 quando 12 sensori erano ottimizzati per 6 modi di vibrare. Si può notare come vengano definite alcune posizioni preferibili in direzione  $y$ , direzione in cui avvengono i maggiori spostamenti, mentre ci sia maggiore dispersione per quanto riguarda la direzione  $x$ , più accentuata per il metodo EFI.

### 5.3 Passerella pedonale

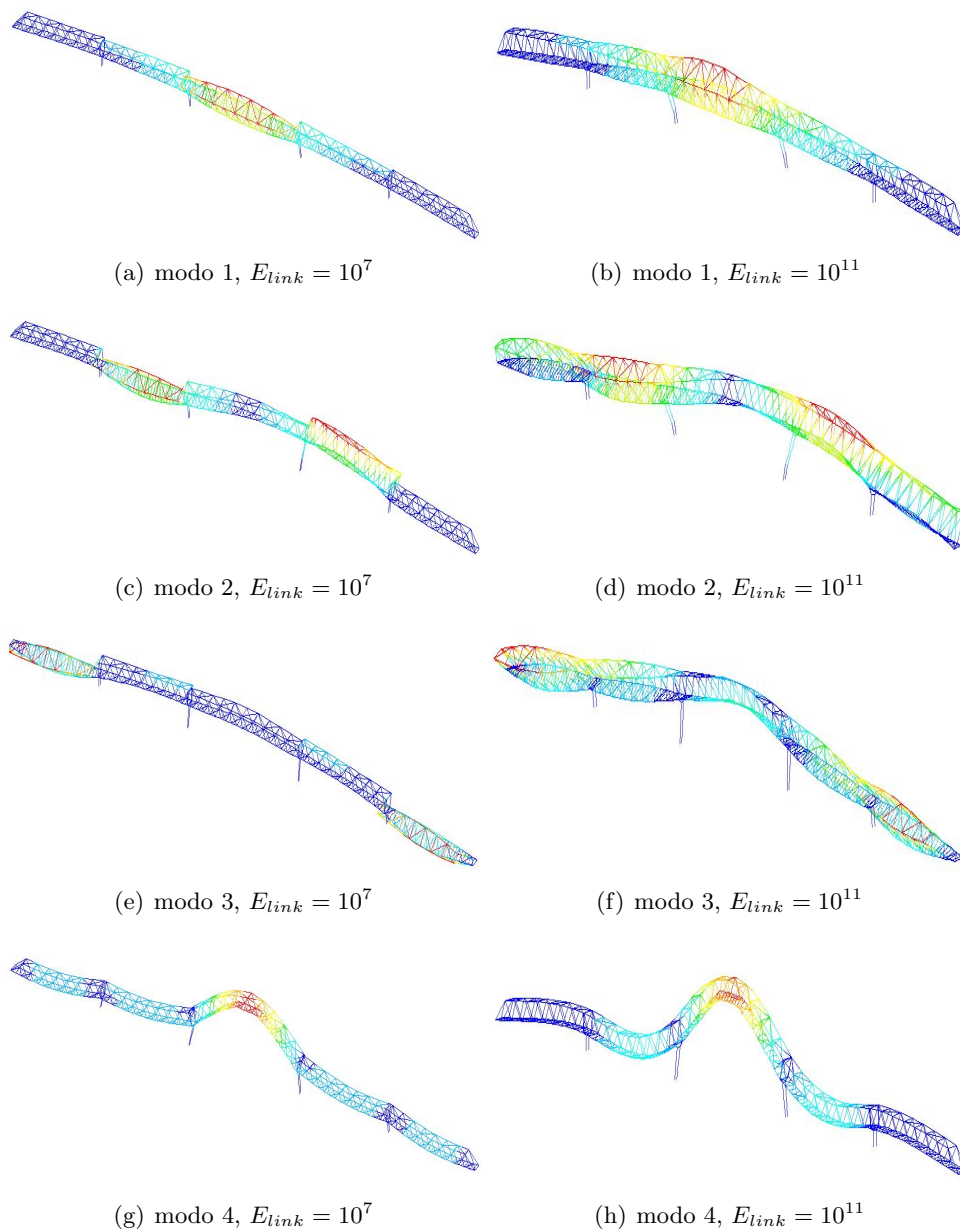
In analogia all'analisi delle incertezze per il caso studio della trave e del telaio tridimensionale, si è valutato quanto la presenza dei possibili errori nel caso della passerella pedonale incida sulla determinazione della configurazione ottimale dei

sensori. Si è considerato di avere inizialmente un'incertezza a priori sul grado di vincolo che connette le diverse campate: tale connessione infatti è realizzata attraverso una sottile lamina d'acciaio bullonata, ipotizzata nel caso perfetto del §4.3 come una connessione rigida, ma che di fatto potrebbe avere una certa cedevolezza e quindi modificare le deformate modali rispetto a quelle considerate. Per modellare tale elemento sono stati introdotti nel modello agli elementi finiti degli elementi *beam* con rigidezza  $k_{link}$ . Si nota che ad una variazione di rigidezza di tali elementi corrisponde una variazione delle deformate modali; in particolare è significativo il cambiamento in quelle con componente laterale preponderante, Fig. 5.11-5.12. Si è quindi valutata la variazione della configurazione ottimale dei sensori al variare della rigidezza della connessione, facendo variare il modulo elastico dell'elemento *beam* che simula la lamina d'acciaio bullonata da un valore di  $10^7$ Pa fino a  $10^{11}$ Pa.

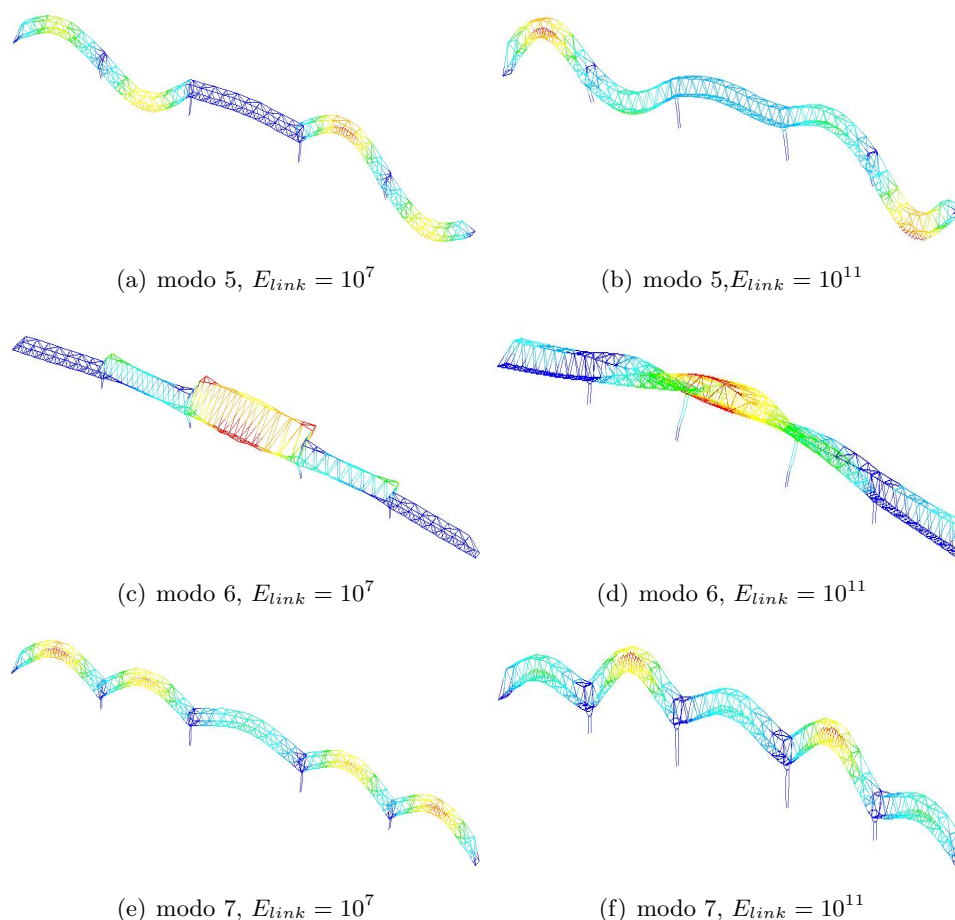
La variazione del modulo elastico  $E_{link}$ , come già anticipato, può modificare considerevolmente le deformate modali ed il loro ordine. Sono stati selezionati, quindi, per ogni caso, i modi con la più alta percentuale di massa partecipante nella direzione verticale o orizzontale. Tali modi sono considerati come input per la successiva procedura di determinazione della configurazione ottimale. I risultati ottenuti sono riportati in Fig. 5.13, in cui i quadratini neri descrivono le posizioni dei sensori ottenute dalla procedura di ottimizzazione per un dato valore di modulo elastico del collegamento  $E_{link}$ , riportato in ordinata. Sono state considerate diverse combinazioni di modi di vibrare e valutate diverse configurazioni ottimali: nel *caso 1* sono stati considerati solo i primi 3 modi verticali, nel *caso 2* solo i primi 3 modi di tipo orizzontale e nel *caso 3* i primi 7 modi di vibrare analoghi a quelli considerati nel §4.3. In Fig. 5.13 sono riportate le prime 10 posizioni ottenute nei *caso 1-3*, applicando il metodo IE-dms, che considera una funzione di correlazione dipendente dalla distanza e dalle forme modali.

Nel *caso 1*, in cui sono stati considerati solo i modi di tipo verticale, 9 sensori sono sempre nelle stesse posizioni, Fig. 5.13(a); i sensori sono presenti in ogni campata e sono approssimativamente al centro di ognuna. Dato che i modi sono di tipo globale, è positivo che i sensori coprano tutta la luce della passerella; inoltre i punti che in ogni campata hanno i maggiori spostamenti verticali sono quelli in prossimità della mezzeria, e pertanto è plausibile che le posizioni preferibili siano queste. Nelle campate I e V le posizioni più stabili ottenute per i sensori sono spostate tra la mezzeria e la spalla, presumibilmente a causa della forma del modo di vibrare numero 6.

Data la maggior variabilità delle forme modali laterali a causa della variazione della rigidezza del collegamento nel *caso 2*, ci si aspetta di ottenere una maggiore



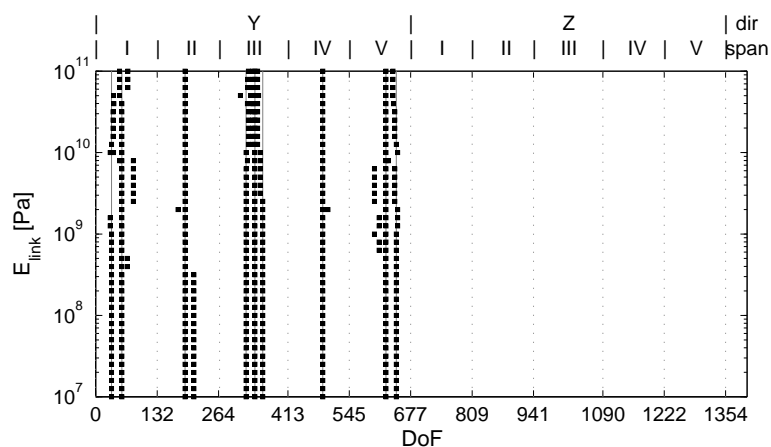
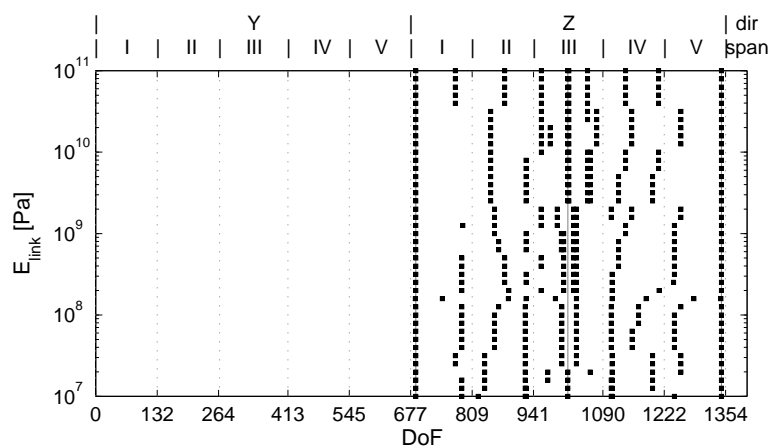
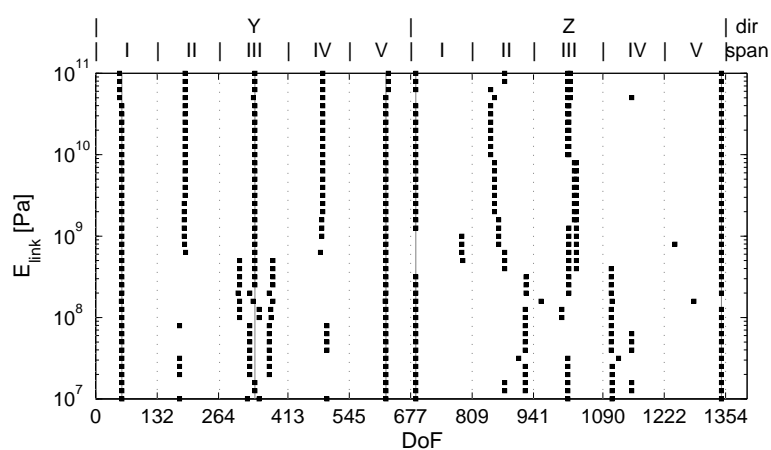
**Figura 5.11:** modi di vibrare 1-4 della passerella pedonale ottenuti mediante modello agli elementi finiti al variare della rigidità del collegamento tra le campate.



**Figura 5.12:** modi di vibrare 5-7 della passerella pedonale ottenuti mediante modello agli elementi finiti al variare della rigidità del collegamento tra le campate.

dispersione nel risultato, effettivamente manifesta in Fig. 5.13(b). Si può sempre constatare che i sensori sono ben distribuiti su tutta la luce della passerella pedonale, conseguenza dei modi di vibrare di tipo globale. Il primo ed il secondo sensore sono sempre posizionati in prossimità delle spalle nella parte superiore della sezione trasversale, per cogliere al meglio i modi 2 e 3 laterali; mentre un terzo sensore, a volte accoppiato con un quarto a seconda della rigidità della connessione, viene sempre posizionato in mezzeria della campata centrale, al fine di cogliere il modo laterale numero 1. Nei primi modi di vibrare le forme modali cambiano considerevolmente anche solo con una piccola variazione della rigidità del vincolo, motivo per il quale le configurazioni ottimali cambiano considerevolmente al variare della rigidità della connessione,  $E_{link}$ .

Nel *caso 3* sono stati considerati tutti i modi di vibrare nel determinare la confi-

(a) *caso 1*, modi verticali(b) *caso 2*, modi orizzontali(c) *caso 3*, tutti i modi

**Figura 5.13:** errore di modello, variabilità della posizione dei primi 10 sensori al variare della rigidità della connessione  $E_{link}$ ; *dir* indica la direzione di acquisizione, *span* indica la campata, *DoF* è il numero del grado di libertà.

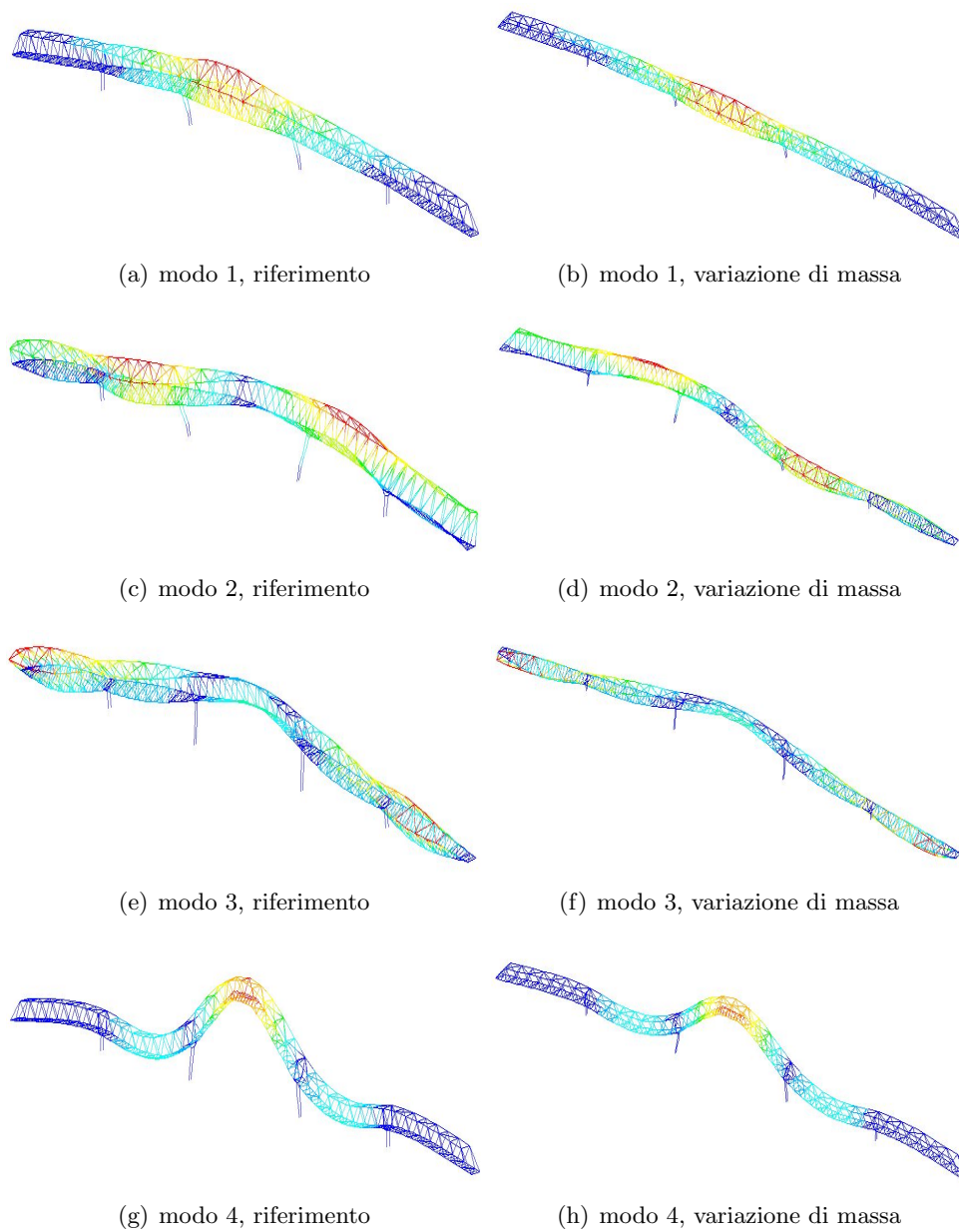
gurazione ottimale dei sensori, quindi laterali, verticali ed anche torsionali. I risultati riportano sempre le posizioni dei primi 10 sensori, Fig. 5.13(c). Nei casi studio precedenti si era riscontrato che, qualora il numero dei sensori sia prossimo al numero di modi di vibrare, allora si ha una bassa variabilità della soluzione anche nel caso di variazioni esterne indotte, si veda ad esempio il caso della trave al §5.1.2, in particolare Fig. 5.4 e Fig. 5.7. In questo caso particolare, anche nella passerella pedonale, i risultati ottenuti sono piuttosto stabili al variare delle incertezze. Con l'eccezione dei valori più bassi del modulo elastico del collegamento, i sensori sono posizionati in mezzeria di ogni campata in direzione verticale, e alle spalle della passerella in direzione orizzontale.

Successivamente si è considerata una variazione delle deformate modali causata da una variazione lineare a tratti della distribuzione di massa dell'impalcato. In particolare sono stati inseriti degli elementi *massa concentrata* sui quali viene definita la variazione random sul valore medio per ognuno dei 50 test dell'analisi Monte Carlo svolta. Per dare una variazione graduale di massa, per ogni campata è stato attribuito solo agli elementi *massa concentrata* della mezzeria e degli appoggi un valore random, scelto da una distribuzione di tipo normale a media nulla e coefficiente di variazione pari al 50%. Assegnati tali valori per ogni analisi Monte Carlo, il valore di massa in ogni altro punto dell'impalcato è stata interpolata, metodo di azione simile a quanto illustrato per la trave di cui si era fatta variare però anche la distribuzione di rigidezza §5.1.2. Dato che la variazione di massa può comportare una sensibile variazione dei modi di vibrare, sia come forma che come ordine, una volta selezionati i 7 modi di vibrare di riferimento, si è calcolata la matrice MAC ad ogni iterazione con tutti i modi di vibrare ottenuti dal modello agli elementi finiti  $\phi_e$  rispetto ai modi di riferimento  $\phi_r$ ,

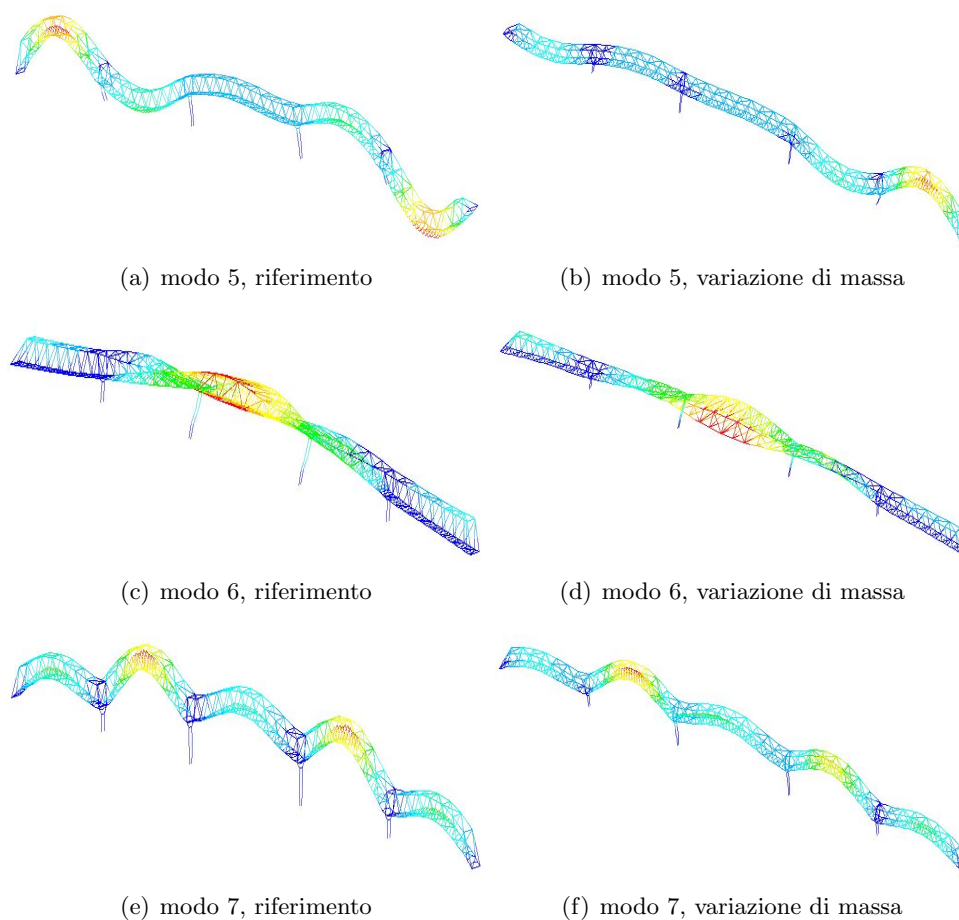
$$MAC_{hk} = \frac{(\phi_{rh}^T \phi_{ek})^2}{(\phi_{rh}^T \phi_{rh})(\phi_{ek}^T \phi_{ek})} \quad (5.6)$$

e si sono selezionati i 7 modi che fornissero i valori di MAC maggiori, quindi i più simili alle forme di riferimento; un esempio di risultati ottenuti, confrontati con i modi di riferimento, è riportata in Figg.5.14-5.15.

È stata determinata la variazione della configurazione ottimale dei sensori nelle diverse analisi Monte Carlo, applicando il metodo IE-dms e valutando diverse combinazioni dei modi di vibrare: nel *caso 1* sono stati considerati solo i primi 3 modi, di tipo prevalentemente orizzontale, nel *caso 2* i modi 4, 5, 6, 7 di tipo prevalentemente verticale ed uno di tipo torsionale e nel *caso 3* tutti i 7 modi di vibrare. Sono riportati i risultati ottenuti per i primi 10 sensori nei *caso 1-3*, considerando



**Figura 5.14:** modi di vibrare 1-4 della passerella pedonale ottenuti mediante modello agli elementi finiti, confronto tra modi di riferimento e con variazione di massa.



**Figura 5.15:** modi di vibrare 5-7 della passerella pedonale ottenuti mediante modello agli elementi finiti, confronto tra modi di riferimento e con variazione di massa.

una distanza media tra i sensori  $\bar{\delta}$  di 3m in Fig. 5.16 e di 15m in Fig. 5.17 nella funzione di correlazione del metodo IE-dms, Eq. 4.1.

Si consideri inizialmente il caso di distanza media tra i sensori imposta pari a 3m. Nel *caso 1*, Fig. 5.16(a), in cui la configurazione di 10 sensori è ottimizzata per cogliere i soli modi orizzontali, si nota come ci siano diversi allineamenti ma anche una certa dispersione nel dato, dovuta all'alto numero di sensori rispetto ai pochi modi di vibrare da cogliere. Vengono sempre collocati due sensori nella sezione di sommità alle spalle della passerella, per cogliere al meglio gli alti spostamenti modali previsti al modo 2 e 3.

Nel *caso 2*, Fig. 5.16(b), vengono determinate alcune posizioni preferenziali, in particolare viene posto un sensore in direzione verticale nella sezione centrale di ogni campata, in particolare nella campata III vengono ipotizzati sempre 2 o 3 sensori

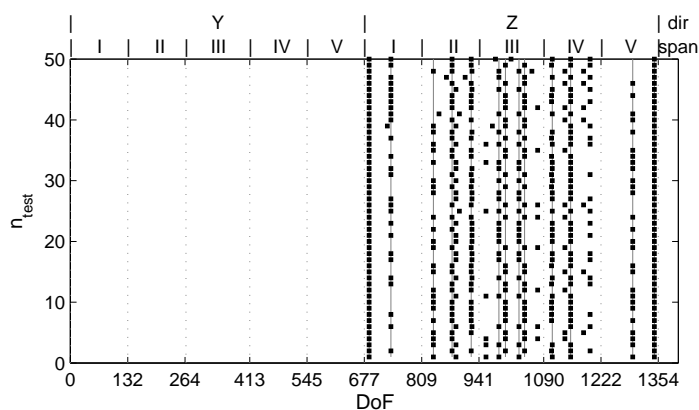
in corrispondenza della mezzeria. Si nota un po' di dispersione dei risultati nella campata centrale (numero III) in direzione  $z$ , probabilmente causata dalla presenza del modo numero 6 di tipo torsionale proprio di tale campata.

Considerando tutti e 7 i modi di vibrare nel *caso 3*, Fig. 5.16(c), vengono determinati diversi gradi di libertà come preferenziali, in particolare al centro di ogni campata in direzione  $y$  per cogliere al meglio i modi di tipo verticale che hanno massimo spostamento in questa sezione, e nella sezione sommitale in corrispondenza delle spalle in direzione  $z$ , a causa presumibilmente dei modi di vibrare numero 2 e 3 di tipo orizzontale. In direzione  $z$  nelle campate II, III e IV, viene previsto un numero variabile di 2-3 sensori, con una certa dispersione.

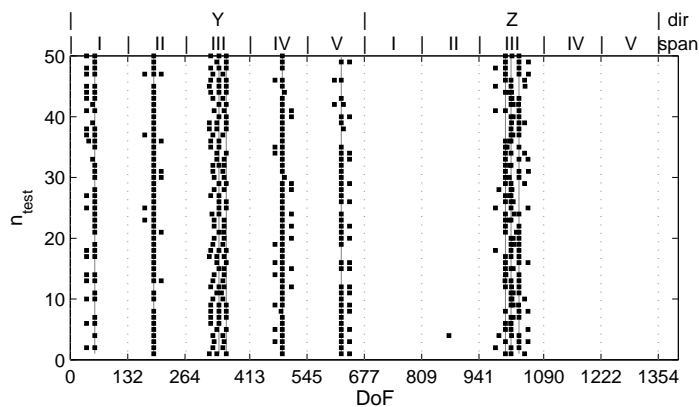
Si considerino ora i risultati ottenuti con una distanza media tra i sensori imposta pari a 15m, Fig. 5.17. Nel *caso 1*, Fig. 5.17(a), in cui la configurazione di 10 sensori è ottimizzata per cogliere i modi orizzontali, si nota come ci siano diversi allineamenti, in questo caso con dispersione minore che nel caso di distanza media tra i sensori imposta pari a 3m. Si nota infatti che oltre ai due sensori nella sezione di sommità alle spalle della passerella, per cogliere al meglio gli alti spostamenti modali previsti al modo 2 e 3, vengono previsti anche un sensore nella mezzeria della campata II e nella mezzeria della campata IV, presumibilmente per cogliere il modo 2, che è un secondo modo trasversale. Rimane una certa incertezza nella previsione della posizione dei sensori tra la campata II e III e tra la campata III e IV. È previsto un sensore anche all'estremità della campata I verso la campata II, ed un sensore simmetrico dall'altra parte della passerella nella campata V verso la campata IV, che presenta tuttavia una certa incertezza sul grado di libertà ottimale.

Nel *caso 2*, in cui si sono considerati i modi verticali ed un modo di tipo torsionale, Fig. 5.17(b), vengono determinate alcune posizioni preferenziali, in particolare viene posto un sensore in direzione verticale nella sezione centrale di ogni campata, con dispersione inferiore nelle campate I, II, IV e V rispetto al caso con distanza media pari a 3m, Fig. 5.16(b). Si nota però dispersione maggiore nella campata centrale sempre in direzione  $y$ , probabilmente a causa della maggiore distanza media imposta che cerca di distanziare maggiormente i sensori. Tale attitudine è ancora più evidente nella campata centrale in direzione trasversale  $z$  (campata numero III), in cui non si riescono a deputare gradi di libertà preferenziali per i sensori rispetto ad altri, quando invece in Fig. 5.16(b) venivano scelte alcune posizioni centrali a maggiore probabilità.

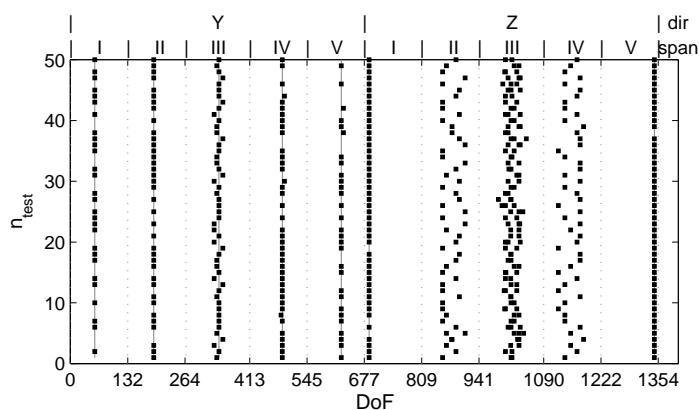
Nel *caso 3*, Fig. 5.16(c), considerando tutti e 7 i modi di vibrare, vengono determinati diversi gradi di libertà come preferenziali, in particolare al centro di ogni campata in direzione  $y$  per cogliere al meglio i modi di tipo verticale che hanno



(a) caso 1, modi orizzontali

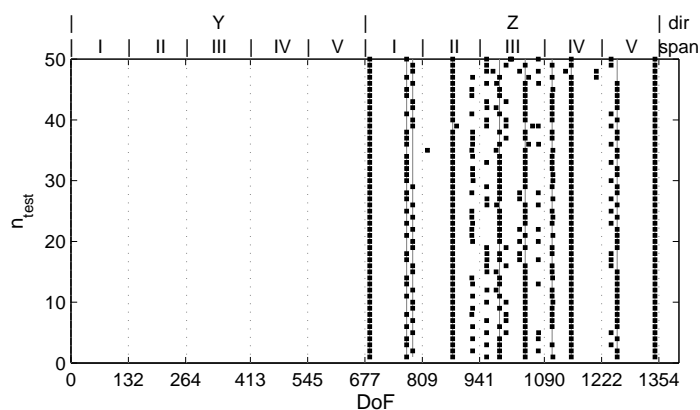


(b) caso 2, modi verticali e torsionale

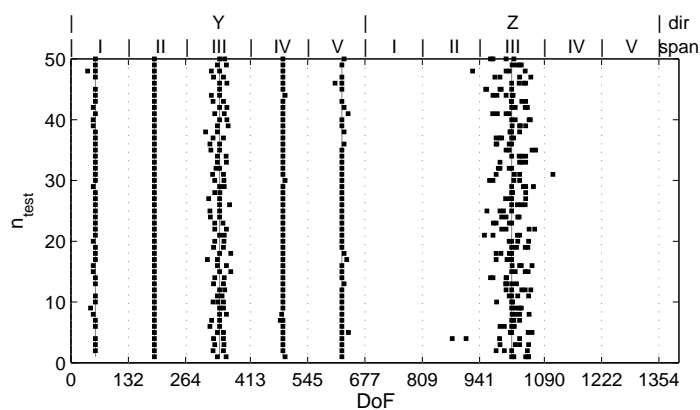


(c) caso 3, tutti i modi

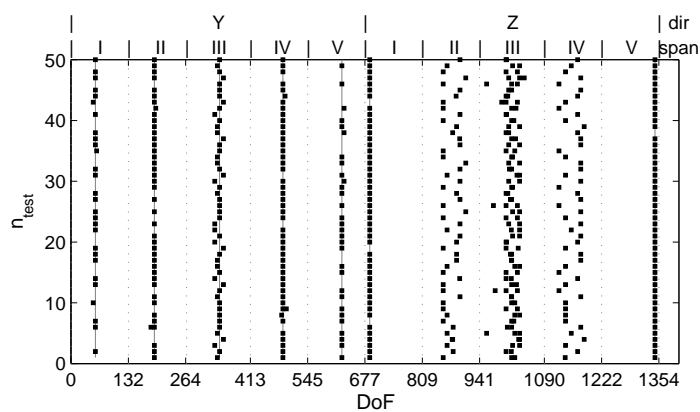
**Figura 5.16:** errore di modello, variabilità della posizione dei primi 10 sensori al variare della distribuzione di massa dell'impalcato, distanza media sensori 3m; *dir* indica la direzione di acquisizione, *span* indica la campata, *DoF* è il numero del grado di libertà.



(a) caso 1, modi orizzontali



(b) caso 2, modi verticali e torsionale



(c) caso 3, tutti i modi

**Figura 5.17:** errore di modello, variabilità della posizione dei primi 10 sensori al variare della distribuzione di massa dell'impalcato, distanza media sensori 15m; *dir* indica la direzione di acquisizione, *span* indica la campata, *DoF* è il numero del grado di libertà.

massimo spostamento in questa sezione, e nella sezione sommitale in corrispondenza delle spalle in direzione  $z$ , a causa presumibilmente dei modi di vibrare numero 2 e 3 di tipo orizzontale ed in direzione  $z$  nelle campate II, III e IV, viene previsto un numero variabile di 2-3 sensori, con una certa dispersione. Sostanzialmente la configurazione ottenuta è del tutto paragonabile a quella con distanza media prevista tra i sensori pari a  $3m$ : quando il numero di sensori è prossimo al numero di modi di vibrare, non solo la configurazione ottimale è meno sensibile alla variabilità dei modi di vibrare dovuti alle incertezze introdotte, ma anche alla correlazione, ed al tipo di correlazione stessa tra il segnale dei sensori.

# Conclusioni

Nel presente lavoro sono stati inizialmente analizzati diversi metodi bibliografici, dai meno recenti di tipo sostanzialmente qualitativo, i successivi metodi energetici, il metodo dell'Effective Independence e relativi sviluppi, fino al metodo dell'Information Entropy ritenuto di particolare interesse perché permette di considerare la correlazione tra il segnale dei diversi sensori. Il metodo dell'Information Entropy introduce una funzione di correlazione, si nota però che al variare della lunghezza di correlazione i risultati ottenuti cambiano considerevolmente. È importante sottolineare che quando il valore della lunghezza di correlazione è alto, con l'intenzione di separare meglio i sensori, alcuni di questi vengono predisposti anche in punti nodali della struttura considerata, non aggiungendo di fatto informazioni utili al sistema di acquisizione. Tale comportamento può essere eliminato inserendo una dipendenza dalle deformate modali nella definizione della correlazione tra i sensori, come è stato sottolineato nel dettaglio analizzando esempi benchmark.

La funzione per determinare la configurazione ottimale dei sensori quindi, in caso di monitoraggio volto all'identificazione modale della struttura, deve essere sensibile sì alla distanza tra i sensori stessi per tenere conto della correlazione degli errori di modello, tanto maggiore tanto è minore la distanza, ma anche alle forme modali stesse per evitare che un sensore venga appunto posizionato in un nodo di tutti i modi di vibrare. Per tale motivo si è proposto uno sviluppo del metodo dell'Information Entropy che consideri nella definizione della correlazione anche le forme modali (Information Entropy - distance and mode shapes, IE-dms).

Sono stati introdotti dei criteri di valutazione, indipendenti uno dall'altro, per poter definire numericamente la qualità di una configurazione rispetto ad un'altra. In particolare sono stati utilizzati un metodo derivante dal Modal Assurance Criterion *rms*, il numero di condizionamento *cn* e il determinante della matrice di Fisher  $\det(FIM)$ . È anche riportato il parametro sintetico *ir* che riassume gli altri tre indici; tale parametro varia tra 0 e 1, in cui il valore ottimale è 1.

Sono poi stati trattati diversi algoritmi di ottimizzazione che vengono general-

mente utilizzati in problemi di determinazione della configurazione ottimale, in particolare nel presente lavoro è stato utilizzato un algoritmo di tipo sequenziale FSSP. Per risolvere problemi di approssimazione numerica che generano instabilità, è stato proposto di svolgere una fattorizzazione di Colesky ed una decomposizione a valori singolari, e quindi di considerare il prodotto degli autovalori anziché il determinante generalmente utilizzato in bibliografia.

Attraverso un semplice caso studio, una trave in semplice appoggio, si è ipotizzato un sistema di monitoraggio. Sono stati applicati i metodi EFI, EFI-dpr, KEM, il metodo IE con diverse lunghezze di correlazione, ed il metodo proposto IE-dms. Nessun metodo ottimizza tutti i criteri contemporaneamente; alcuni metodi che in un caso forniscono il valore ottimale per alcuni parametri di valutazione o sono molto prossimi ad essi, nel caso in cui si valutino gli altri parametri di valutazione, o nel caso in cui si cambi il numero di sensori, forniscono una soluzione molto lontana dalla ottimale. Il metodo IE-dms, anche qualora non raggiunga il valore ottimale per i parametri di valutazione, è sempre prossimo ad esso, dimostrando una discreta robustezza, infatti l'indice riassuntivo  $ir$  è sempre prossimo all'unità; in particolare la configurazione determinata con il metodo IE-dms è affidabile per i diversi criteri di valutazione introdotti e il metodo risulta robusto nel caso in cui vengano introdotte ulteriori informazioni utili per il sistema di monitoraggio già progettato. In particolare, nel caso in cui la configurazione dei sensori sia ottimizzata per un determinato numero di modi di vibrare, e poi ne sia effettivamente disponibile un numero maggiore, il metodo proposto permette di coglierli meglio delle configurazioni determinate con gli altri metodi. Il metodo IE-dms risulta quindi efficiente per valutare i modi superiori non considerati per l'ottimizzazione del sistema di monitoraggio, ma comunque di interesse una volta installato il sistema.

Si è passati successivamente all'estensione ad un caso tridimensionale, in particolare un telaio asimmetrico in pianta, per avere modi flesso-torsionali accoppiati. Solitamente l'errore di predizione viene considerato completamente non correlato nelle due direzioni ortogonali  $x$  ed  $y$ ; il metodo IE-dms invece, permette di considerare facilmente la correlazione spaziale nelle strutture tridimensionali, per cui la distanza tra due sensori è combinata e pesata con l'informazione fornita dai modi di vibrare, per ogni modo di vibrare considerato, nelle diverse direzioni. Le procedure di posizionamento secondo il metodo EFI (totalmente non correlato) ed IE-dms sono state applicate valutando i primi 6 modi di vibrare (e successivamente 9) e un numero variabile tra 12 e 25 sensori. Si nota come la configurazione ottenuta mediante il metodo IE-dms sia nettamente migliore di quella ottenuta dal metodo EFI, considerando tutti i criteri di valutazione.

---

Infine la procedura IE-dms è stata applicata ad una struttura reale, in particolare una passerella pedonale metallica di 5 campate lunga circa 170 m. È stata progettata la configurazione ottimale dei sensori con il metodo IE-dms considerando diverse condizioni: si sono considerati solo i modi di vibrare di tipo verticale, poi i modi orizzontali e torsionali insieme, ed infine tutti e 10 i modi di vibrare.

Bisogna poi considerare che la ricerca della configurazione ottimale dei sensori sulle strutture è un problema a priori in quanto sono disponibili solo dati analitici, dato che il sistema di acquisizione deve ancora essere installato. Quindi, in generale, il processo di determinazione della configurazione ottimale dei sensori è soggetto a diversi errori ed incertezze dovuti al modello numerico, che possono considerevolmente alterare la posizione prevista per i sensori.

Con riferimento alla trave semplicemente appoggiata è stata valutata l'influenza delle incertezze sulla qualità della configurazione dei sensori e sulla variabilità delle posizioni. Sono state confrontate le soluzioni ottenute applicando i metodi EFI, il metodo dell'Effective Independence con lunghezza di correlazione fissa e il metodo proposto IE-dms.

Inizialmente si è ipotizzato di progettare il sistema di monitoraggio per un sistema immaginato perfetto e sono stati introdotti successivamente gli errori *a posteriori* per valutare se la configurazione prevista nel caso perfetto sia comunque efficiente anche con la presenza di errori. Sono stati considerati l'errore di misura, introdotto come rumore sui dati e l'errore di modello immaginato come una variazione del grado di vincolo, introducendo una molla rotazionale, comportando una variazione e/o distorsione delle forme modali, e quindi una variazione del segnale acquisito dai sensori. Si è potuto constatare che il rumore sui dati non modifica la relazione tra la bontà di una configurazione rispetto alle altre valutate nel caso di assenza di rumore. Per quanto riguarda l'errore di modello, il metodo IE-dms risulta molto efficiente, soprattutto qualora si vogliano valutare anche modi superiori. Si è anche potuto verificare che la posizione dei sensori è diversa a seconda della posizione della molla all'estremità di destra oppure di sinistra della trave, e varia anche al variare del numero di sensori. Ciò è dovuto al fatto che la configurazione ottimale sulla trave semplicemente appoggiata, è valutata su un sistema perfetto e simmetrico, quindi vengono trovate in realtà due possibili configurazioni per i sensori, simmetriche rispetto alla mezzeria della trave. La scelta di una configurazione rispetto all'altra è equivalente in assenza di errore di modello ma diventa cruciale qualora si introduca la molla rotazionale.

L'importanza di considerare l'errore di modello nel processo di determinazione della configurazione ottimale, è stata valutata anche per errori *a priori*, stimando il

variare della posizione dei sensori nella determinazione delle diverse configurazioni ottimali al variare delle incertezze ipotizzate nel modello. Si è presupposto che le incertezze sul modello possano essere principalmente di due tipi: incertezza sul grado di vincolo ed incertezza nelle proprietà meccaniche. In particolare per quanto riguarda l'incertezza sul grado di vincolo si è ipotizzato di non sapere esattamente il grado di rigidità del vincolo all'estremità della trave, e si è valutata la variazione della posizione dei sensori nelle configurazioni secondo i diversi metodi EFI, Effective Independence e il metodo IE-dms. Per quanto riguarda le incertezze sui parametri meccanici si è considerato di avere una certa incertezza sulla distribuzione di massa e rigidità lungo trave.

I risultati ottenuti con l'incertezza sul grado di vincolo mostrano che le configurazioni con un numero di sensori pari al numero di modi di interesse sono simili tra loro. Aumentando il numero di sensori, si nota che il metodo EFI tende a posizionare sempre tutti i sensori in alcune posizioni; il metodo dell'Information Entropy al fine di evitare la sovrapposizione in poche posizioni, può arrivare ad avere sensori in posizioni nodali; nel metodo IE-dms, che definisce una funzione di correlazione dipendente sia dalla distanza che dalle forme modali, i sensori sono ben distanziati lungo la struttura evitando i punti a deformata nulla. Introducendo una possibile variazione sulla distribuzione di massa e sulla distribuzione di rigidità, si nota che i metodi EFI e IE-dms identificano alcune posizioni più probabili, mentre il metodo dell'Information Entropy ha una dispersione tale da non permettere di identificare posizioni a maggiore probabilità. Aumentando il numero di sensori rispetto al numero di modi di interesse, il metodo EFI non determina altre posizioni per i sensori ma li posiziona sempre nelle stesse, mentre il metodo IE-dms cerca di distribuirli sulla trave anche se una limitata variazione dei parametri di input porta una più ampia incertezza sulla definizione della posizione dei sensori addizionali.

Per strutture tridimensionali, si è valutato quanto la presenza dei possibili errori nel caso della passerella pedonale incida sulla determinazione della configurazione ottimale dei sensori. Si è considerato di avere inizialmente un'incertezza a priori sul grado di vincolo che connette le diverse campate, e successivamente una incertezza sulla distribuzione di massa dell'impalcato. Data la maggior variabilità delle forme modali laterali a causa della variazione della rigidità del collegamento, ovviamente quando si considerano solo modi orizzontali il metodo manifesta una maggiore variabilità nella determinazione della posizione dei sensori. Si è inoltre confermato che quando il numero di sensori è prossimo al numero dei modi di vibrare i risultati ottenuti sono piuttosto stabili al variare delle incertezze.

Anche quando si è introdotta la variabilità di massa lungo l'impalcato si sono

considerati diversi gruppi di modi di vibrare e quindi diverse configurazioni per i sensori, facendo variare anche la distanza media tra i sensori nella funzione di correlazione del metodo IE-dms. Non ci sono sostanziali differenze al variare della distanza media tra i sensori, e non c'è una diretta correlazione della variazione della dispersione del risultato con la variazione della distanza media. È importante sottolineare però che quando si considerano tutti i modi di vibrare di interesse le configurazioni ottenute sono del tutto paragonabili: quando il numero di sensori è prossimo al numero di modi di vibrare, la configurazione ottimale è meno sensibile alla variabilità dei modi di vibrare dovuti alle incertezze introdotte, ed anche alla distanza media prevista nella definizione della correlazione.

Riassumendo, quindi, il metodo proposto IE-dms permette da un lato di cogliere anche modi superiori rispetto al numero per il quale il sistema è ottimizzato, e permette inoltre di ridurre la variabilità nella determinazione della posizione ottimale quando incertezze insite nel problema fanno variare i parametri di input per la procedura.



# Bibliografia

- [1] P. H. Kirkegaard and R. Brincker, “On the optimal location of sensors for parametric identification of linear structural systems,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 8, pp. 639–647, Nov. 1994.
- [2] V. Gupta, M. Sharma, and N. Thakur, “Optimization Criteria for Optimal Placement of Piezoelectric Sensors and Actuators on a Smart Structure: A Technical Review,” *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 21, pp. 1227–1243, Jan. 2010.
- [3] R. J. Allemang and D. L. Brown, “A correlation coefficient for modal vector analysis,” in *Proceedings of the 1st international modal analysis conference*, vol. 1, pp. 110–116, SEM, Orlando, 1982.
- [4] T. G. Carne and C. R. Dohrmann, “A modal test design strategy for model correlation,” in *proceedings-spie the International Society for optical engineering*, pp. 927–927, 1995.
- [5] J. E. T. Penny, M. I. Friswell, and S. D. Garvey, “Automatic choice of measurement locations for dynamic testing,” *AIAA Journal*, vol. 32, no. 2, pp. 407–414, 1994.
- [6] W. Liu, W.-c. Gao, Y. Sun, and M.-j. Xu, “Optimal sensor placement for spatial lattice structure based on genetic algorithms,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 317, pp. 175–189, Oct. 2008.
- [7] D. Borissova, I. Mustakerov, and L. Doukovska, “Predictive Maintenance Sensors Placement by Combinatorial Optimization,” *International Journal of Electronics and Telecommunications*, vol. 58, no. 2, pp. 153–158, 2012.
- [8] M. Meo and G. Zumpano, “On the optimal sensor placement techniques for a bridge structure,” *Engineering Structures*, vol. 27, pp. 1488–1497, Aug. 2005.

- 
- [9] D. C. Kammer and L. Yao, "Enhancement of On-Orbit Modal Identification of Large Space Structures Through Sensor Placement," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 171, pp. 119–139, Mar. 1994.
- [10] D. C. Kammer, "Optimal sensor placement for modal identification using system-realization methods," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, no. 3, pp. 729–731, 1996.
- [11] D. C. Kammer, "Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, no. 2, pp. 251–259, 1991.
- [12] D. C. Kammer and M. L. Tinker, "Optimal placement of triaxial accelerometers for modal vibration tests," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 18, pp. 29–41, Jan. 2004.
- [13] D. S. Li, H. N. Li, and C. P. Fritzen, "On Optimal Sensor Placement Criterion for Structural Health Monitoring with Representative Least Squares Method," *Key Engineering Materials*, vol. 413-414, pp. 383–391, June 2009.
- [14] A. R. M. Rao and G. Anandakumar, "Optimal sensor placement techniques for system identification and health monitoring of civil structures," *Smart Structures and Systems*, vol. 4, pp. 465–492, July 2008.
- [15] C. Stephan, "Sensor placement for modal identification," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 27, pp. 461–470, Feb. 2012.
- [16] P. C. Shah and F. E. Udawadia, "A methodology for optimal sensor locations for identification of dynamic systems," *ASME, Transactions, Journal of Applied Mechanics*, vol. 45, pp. 188–196, 1978.
- [17] T. Hanis and M. Hromcik, "Optimal sensors placement and spillover suppression," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 28, pp. 367–378, Apr. 2012.
- [18] K. Worden and A. P. Burrows, "Optimal sensor placement for fault detection," *Engineering Structures*, vol. 23, pp. 885–901, Aug. 2001.
- [19] G. Heo, M. L. Wang, and D. Satpathi, "Optimal transducer placement for health monitoring of long span bridge," *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 16, no. 7–8, pp. 495–502, 1997.

- [20] V. V. Fedorov and P. Hackl, "Optimal experimental design: spatial sampling," *Bulletin of the Calcutta Statistical Association*, vol. 44, no. 173, pp. 57–82, 1994.
- [21] A.-P. Cherng, "Optimal sensor placement for modal parameter identification using signal subspace correlation techniques," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 17, pp. 361–378, Mar. 2003.
- [22] T. Nestorović and M. Trajkov, "Optimal actuator and sensor placement based on balanced reduced models," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 36, pp. 271–289, Apr. 2013.
- [23] J. Wang, S. S. Law, and Q. S. Yang, "Sensor placement methods for an improved force identification in state space," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 41, pp. 254–267, Dec. 2013.
- [24] C. Papadimitriou, "Optimal sensor placement methodology for parametric identification of structural systems," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 278, pp. 923–947, Dec. 2004.
- [25] C. Papadimitriou and G. Lombaert, "The effect of prediction error correlation on optimal sensor placement in structural dynamics," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 28, pp. 105–127, Apr. 2012.
- [26] D. E. Goldberg and J. H. Holland, "Genetic algorithms and machine learning," *Machine learning*, vol. 3, no. 2, pp. 95–99, 1988.
- [27] T. H. Yi and H. N. Li, "Methodology Developments in Sensor Placement for Health Monitoring of Civil Infrastructures," *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 2012, p. e612726, Aug. 2012.
- [28] R. C. Eberhart and J. Kennedy, "A new optimizer using particle swarm theory," in *Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science*, vol. 1, pp. 39–43, New York, NY, 1995.
- [29] F. Liu and L. Zhang, "Successive method for optimal placement of actuators and sensors," *Journal of Astronautics*, vol. 21, no. 3, pp. 64–69, 2000.
- [30] H. Bedrossian and S. F. Masri, "Optimal placement of sensors and shakers for modal identification," *Computational Stochastic Mechanics*, Millpress, Rotterdam, pp. 53–57, 2003.

- 
- [31] R. Castro-Triguero, S. Murugan, R. Gallego, and M. I. Friswell, “Robustness of optimal sensor placement under parametric uncertainty,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 41, pp. 268–287, Dec. 2013.
- [32] F. M. Hemez and C. Farhat, “An energy based optimum sensor placement criterion and its application to structural damage detection,” in *proceedings-spie the International Society for optical engineering*, pp. 1568–1568, 1994.
- [33] N. Imamovic, *Validation of large structural dynamics models using modal test data*. PhD thesis, University of London Imperial College of Science, Technology & Medicine, 1998.
- [34] P. G. Bakir and a. Kampüsü, “Evaluation of optimal sensor placement techniques for parameter identification in buildings,” *Mathematical and Computational Applications*, vol. 16, no. 2, pp. 456–466, 2011.
- [35] A. E. Sepulveda and L. A. Schmit, “Optimal placement of actuators and sensors in control-augmented structural optimization,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, pp. 1165–1187, Oct. 1991.
- [36] A. E. Sepulveda, I. In, and L. Chmit, “Optimal placement of active elements in control augmented structural synthesis,” *AIAA journal*, vol. 31, no. 10, pp. 1906–1915, 1993.
- [37] L. B. Booker, D. E. Goldberg, and J. H. Holland, “Classifier systems and genetic algorithms,” *Artificial Intelligence*, vol. 40, pp. 235–282, Sept. 1989.
- [38] X. K. Gou and M. Y. Cui, “Application of Genetic and Simulated Annealing Algorithms in Placement Optimization of Sensor/ Actuator,” *Machinery & Electronics*, vol. 11, p. 39, 2008.
- [39] A. Chattopadhyay and C. E. Seeley, “A simulated annealing technique for multiobjective optimization of intelligent structures,” *Smart Materials and Structures*, vol. 3, pp. 98–106, June 1994.
- [40] N. Kukunuru, B. R. Thella, and R. L. Davuluri, “Sensor deployment using particle swarm optimization,” *International Journal of Engineering Science and Technology*, vol. 2, no. 10, pp. 5395–5401, 2010.
- [41] T. H. Yi, H. N. Li, and X. D. Zhang, “A modified monkey algorithm for optimal sensor placement in structural health monitoring,” *Smart Materials and Structures*, vol. 21, no. 10, p. 105033, 2012.

- 
- [42] M. Dorigo and C. Blum, “Ant colony optimization theory: A survey,” *Theoretical Computer Science*, vol. 344, pp. 243–278, Nov. 2005.
- [43] R. F. Guratzsch and S. Mahadevan, “Structural Health Monitoring Sensor Placement Optimization Under Uncertainty,” *AIAA Journal*, vol. 48, no. 7, pp. 1281–1289, 2010.
- [44] M. Azarbayejani, A. I. El-Osery, K. K. Choi, and M. M. R. Taha, “A probabilistic approach for optimal sensor allocation in structural health monitoring,” *Smart Materials and Structures*, vol. 17, no. 5, p. 055019, 2008.
- [45] P. Vinot, S. Cogan, and V. Cipolla, “A robust model-based test planning procedure,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 288, pp. 571–585, Dec. 2005.