

This is the peer reviewed version of the following article:

Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard: biforcazione dall'infinito e non unicità / Malaguti, Luisa. - In: RENDICONTI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITÀ DI TRIESTE. - ISSN 0049-4704. - STAMPA. - XIX:(1987), pp. 12-31.

*Terms of use:*

The terms and conditions for the reuse of this version of the manuscript are specified in the publishing policy. For all terms of use and more information see the publisher's website.

08/05/2026 11:29

(Article begins on next page)

# SOLUZIONI PERIODICHE DELL' EQUAZIONE DI LIÉNARD: BIFORCAZIONE DALL' INFINITO E NON UNICITA' (\*)

di LUISA MALAGUTI (a Modena) (\*\*)

**SOMMARIO.** - *Si dimostrano risultati di non esistenza e di non unicità per le soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard.*

**SUMMARY.** - *Non-existence and non-uniqueness results for periodic solutions of the Liénard equation are given.*

## § 1. Introduzione.

Consideriamo l'equazione di «Liénard»:

$$(1.1) \quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0.$$

Molti autori (si veda per es. [1-7]) hanno studiato la (1.1) dando condizioni sufficienti, e talvolta anche necessarie, per l'esistenza e per l'unicità di soluzioni periodiche non triviali (cfr. il § 6).

L'intento di questo lavoro è, invece, di presentare teoremi di non esistenza e/o di non unicità per le soluzioni periodiche di (1.1).

Il lavoro si articola in due parti.

Nella Parte I (§ 2, 3, 4 e 5) si dimostra un teorema di non esi-

---

(\*) Pervenuto in Redazione il 31 ottobre 1986.

(\*\*) Indirizzo dell'Autore: Dipartimento di Economia Politica - Università - Via Giardini, 454 - 41100 Modena.

stenza, mentre nella Parte II (§ 6, 7, 8) un teorema di non unicità, per le soluzioni periodiche di (1.1).

Segue (§ 9) una breve conclusione.

Per quanto riguarda i metodi usati nelle dimostrazioni abbiamo impiegato, nella Parte I, soprattutto tecniche classiche (lavorando nel piano «di Liénard»).

Nella Parte II, invece, abbiamo utilizzato, cosa che ci sembra essere non usuale in questo tipo di problemi, metodi più generali di analisi funzionale (biforcazione dall'infinito, indice di Fuller per soluzioni periodiche). Tali metodi forse non sono indispensabili nello studio della (1.1) ma, oltre a rendere le dimostrazioni più semplici, hanno il vantaggio di non essere legati alla uni-dimensionalità del problema e potrebbero essere usati con profitto anche nello studio di equazioni di ordine superiore (o di sistemi in  $\mathbf{R}^n$ ,  $n > 2$ ).

## PARTE I: NON ESISTENZA

### § 2. Enunciato del Teorema.

Esponiamo un teorema di non esistenza per le soluzioni periodiche di (1.1).

Per comodità introduciamo un parametro reale  $s > 0$  e consideriamo una famiglia di equazioni di Liénard:

$$(2.1) \quad \ddot{x} + f_s(x) \dot{x} + x = 0$$

con  $f_s(x)$  continua in  $x \in \mathbf{R}$ , per ogni  $s > 0$ .

$$\text{Posto } F(s, x) \equiv F_s(x) = \int_0^x f_s(t) dt$$

l'equazione (2.1) risulta equivalente al seguente sistema:

$$(2.2)_s \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F_s(x) \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Nel seguito scriveremo semplicemente (2.2) quando non è indispensabile sottolineare la dipendenza dal parametro.

Supponiamo che esistano  $\alpha > 0$  e  $a = a(s)$  tali che valgano le seguenti ipotesi (vedi Fig. 1):

$$(F1) \quad F(s, x) \text{ di classe } C^1 \text{ in } (s, x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$$

$$(F2.1) \quad F_s(x) \text{ funzione dispari, } \forall s > 0$$

(F 2.2)  $a(s) \rightarrow +\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$ , ord.  $(a(s)) = 1$  e  
 $F_s(x) < 0$  per  $0 < x < a(s) \quad \forall s > 0$

(F 2.3) detto  $-A(s) \equiv \min_{0 < x < a(s)} F_s(x)$ , si abbia:

$A(s) \rightarrow +\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$  e ord.  $(A(s)) \leq 1$

(F 2.4)  $\int_0^{a(s)} -xF_s(x) dx \rightarrow +\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$  e

ord.  $(\int_0^{a(s)} -xF_s(x) dx) > 2$

(F 2.5)  $F_s(x) > 0$  per  $a(s) < x < a(s) + \alpha$ ,  $\forall s > 0$

(F 2.6) posto  $b(s) \equiv \max_{a(s) < x < a(s) + \alpha} F_s(x)$ , si abbia:

$b(s) \rightarrow +\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$  e ord.  $(b(s)) < 1/2$

(F 2.7)  $F_s(x) < 0$  per  $x > a(s) + \alpha$ ,  $\forall s > 0$

(F 2.8)  $F_s(x)$  non crescente per  $x > a(s) + \alpha$ ,  $\forall s > 0$

(F 2.9)  $\forall x > a(s) + \alpha$

$\lim_{s \rightarrow +\infty} -F(s, x) = +\infty$  e ord.  $(-F(\cdot, x)) > 1/2$

ove, qui e nel seguito, se  $l(s) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  è tale che  $l(s) \rightarrow +\infty$  per  $s \rightarrow +\infty$ , indichiamo con ord.  $(l(s))$  l'ordine di infinito di  $l(s)$ .

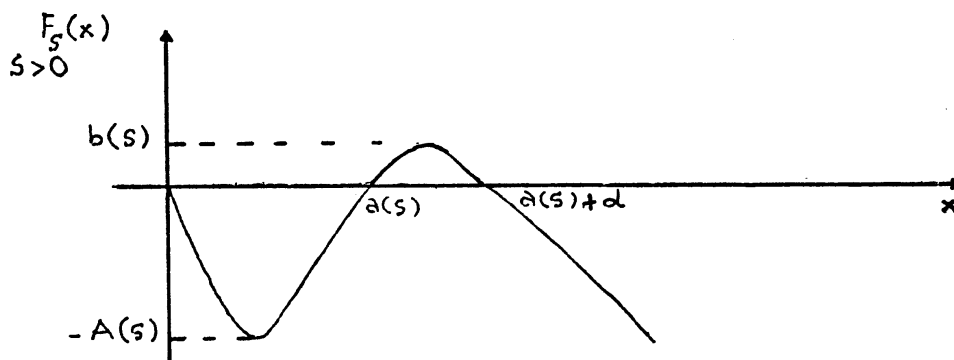


Fig. 1

Le ipotesi (F 2.2-4) riguardano il comportamento di  $F_s(x)$  quan-

do  $x \in (0, a(s))$ ; le ipotesi (F 2.5-6) quello per  $x \in (a(s), a(s) + \alpha)$  mentre (F 2.7-9) il comportamento di  $F_s(x)$  per  $x > a(s) + \alpha$ .

Da (F1) segue che, fissato  $s > 0$ , esiste, unica la soluzione di (2.2)<sub>s</sub> con condizione iniziale  $P_0 \in \mathbf{R}^2$  data; indichiamo tale soluzione con  $\Gamma_s(t; P_0)$  oppure, semplicemente, con  $\Gamma(P_0)$ , identificandola con la corrispondente orbita nel piano.

**TEOREMA 2.1** - Dato il sistema (2.2)<sub>s</sub> valgano per esso le ipotesi (F1) e (F 2.1-9); allora esiste  $s^* > 0$  tale che, per ogni  $s \geq s^*$  (2.2)<sub>s</sub> non ha soluzioni periodiche.

Alla dimostrazione del teorema, che esibiamo nel §5, premettiamo: nel §3 delle considerazioni preliminari e, nel §4, alcuni lemmi preparatori.

### § 3. Considerazioni preliminari. Notazioni.

Vogliamo giungere ad una formulazione equivalente del Teorema 2.1, che risulta utile nel seguito. Premettiamo, a tale scopo, alcune notazioni.

Detti:

$$v^+ = \{ (0, y) / y > 0 \} \text{ e } v^- = \{ (0, y) / y < 0 \}$$

identifichiamo i punti  $P \in v^\pm$  con le loro ordinate  $y_P$ .

Fissato  $s > 0$ , sia:

$$D(s) = \{ P_s \in v^+ / \Gamma(P_s) \cap v^- \neq \emptyset \}.$$

Preso  $P_s \in D(s)$  indichiamo con  $t_1 = t_1(P_s)$  il minimo istante tale che  $\Gamma(t_1; P_s) \in v^-$  e sia  $j(P_s) = \Gamma(t_1; P_s)$ , con  $j(P_s) \in v^-$ .

Possiamo ora definire la funzione:

$$\delta : D(s) \rightarrow \mathbf{R}^+ \quad \delta(P_s) = \frac{1}{2} (|j(P_s)|^2 - |P_s|^2).$$

Per (F 2.1), fissati  $s > 0$  e  $P \in \mathbf{R}^2$ , se  $\Gamma_s(P) = (x_s(t), y_s(t))$  è una soluzione di (2.2), allora lo è anche

$$-\Gamma_s(P) = \Gamma_s(-P) \equiv (-x_s(t), -y_s(t))$$

e vale la seguente:

**PROPOSIZIONE 3.1** - Il Teorema 2.1 è vero se e solo se esiste  $s^* > 0$ :

$$\delta(P_s) > 0 \quad \forall P_s \in D(s), \quad \forall s \geq s^*.$$

Posto:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

lungo una qualunque soluzione  $\Gamma_s \equiv (x_s(t), y_s(t))$  di (2.2)<sub>s</sub> si ha:

$$\frac{d}{dt} u(x_s(t), y_s(t)) = -x_s(t) F_s(x_s(t))$$

e, poiché, preso  $P_s \in D(s)$  risulta:

$$\delta(P_s) = u(x_s(t_1), y_s(t_1)) - u(x_s(0), y_s(0))$$

si ottiene:

$$(3.1) \quad \delta(P_s) = \int_0^{t_1} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt.$$

Definiamo ora, per ogni  $s > 0$ , i seguenti insiemi (vedi Fig. 2 alla fine del §5):

$$L_i^+(s) = \{ (a(s) + (i-1)\alpha, y) / y > 0 \}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$L_i^-(s) = \{ (a(s) + (i-1)\alpha, y) / y < 0 \}$$

$$D_1(s) = \{ P_s \in D(s) / \Gamma(P_s) \cap L_1^+(s) \neq \emptyset \}.$$

E' possibile provare che  $D_1(s) \neq \emptyset, \forall s > 0$ ; inoltre, preso  $P_s \in D(s) \setminus D_1(s)$ , per (F.2.2) e (3.1) risulta  $\delta(P_s) > 0, \forall s > 0$ . Vale quindi la seguente:

**OSSERVAZIONE 3.2** - Nella Proposizione 3.1 l'insieme  $D(s)$  può essere sostituito dall'insieme  $D_1(s)$ .

Enunciamo, infine, la:

**PROPOSIZIONE 3.3** - Sia  $P_s \in D(s)$ ; se  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_i^+(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , allora incontra, prima e nell'ordine,  $L_j^+(s)$  con  $j = 1 \dots i$  e dopo, in ordine inverso,  $L_k^-(s)$  con  $k = 1 \dots i$ ; infine, se  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_i^-(s)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , incontra anche, prima di questo,  $L_i^+(s)$ .

#### § 4. Lemmi preparatori.

Preso  $P_s \in v^+$ , se  $\Gamma(P_s) \cap L_1^+(s) \neq \emptyset$  indichiamo con  $\tau_1 > 0$  il minimo istante tale che  $\Gamma(\tau_1; P_s) \in L_1^+(s)$ ; sia inoltre:

$$\delta_1(P_s) = \int_0^{\tau_1} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt$$

$\delta_1$  è, banalmente, definita in  $D_1(s)$  e vale il seguente:

**LEMMA 4.1** -  $\delta_1(P_s)$  risulta una funzione decrescente di  $P_s$  in  $D_1(s)$  per ogni  $s > 0$ , fissato.

*Dimostrazione.* Siano  $P_s, \bar{P}_s \in D_1(s)$  con  $P_s < \bar{P}_s$

$$\Gamma(P_s) \equiv (x_s(t), y_s(t)) \quad \text{e} \quad \Gamma(\bar{P}_s) \equiv (\bar{x}_s(t), \bar{y}_s(t));$$

effettuando un cambiamento di variabile si ottiene:

$$\delta_1(P_s) = \int_0^{a(s)} \frac{-x F_s(x)}{y_s(x) - F_s(x)} dx$$

$$\delta_1(\bar{P}_s) = \int_0^{a(s)} \frac{-x F_s(x)}{\bar{y}_s(x) - F_s(x)} dx$$

poiché  $P_s < \bar{P}_s$ , per il teorema di unicità della soluzione, si ha:  $y(x) < \bar{y}(x) \quad \forall x \in [0, a(s)]$ , e ciò implica la tesi.

Sia  $P_s \in v^+$ , se  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_1^-(s)$  indichiamo con  $\tau_6 > 0$  il minimo istante tale che  $\Gamma(\tau_6; P_s) \in L_1^-(s)$ ; inoltre se  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_2^\pm(s)$  siano  $\tau_2, \tau_5 > 0$  gli istanti minimi tali che  $\Gamma(\tau_2; P_s) \in L_2^+(s)$  e  $\Gamma(\tau_5; P_s) \in L_2^-(s)$ ; indichiamo infine con  $y_i(P_s), y_i^-(P_s)$  le ordinate dei suddetti punti di incontro di  $\Gamma(P_s)$  rispettivamente con  $L_i^+(s)$  e  $L_i^-(s)$ , per  $i = 1, 2$ .

Sia ora  $P_s \in D_1(s)$ ; per la Proposizione 3.3  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_1^-(s)$ , inoltre, se incontra  $L_2^+(s)$  incontra anche  $L_2^-(s)$ ; possiamo quindi definire la seguente:

$$\delta_2(P_s) = \begin{cases} \int_{\tau_1}^{\tau_5} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt & \text{se } \Gamma(P_s) \cap L_2^+(s) = \phi \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt + \\ + \int_{\tau_5}^{\tau_6} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt & \text{se } \Gamma(P_s) \cap L_2^+(s) \neq \phi \end{cases}$$

Sia, infine,  $\tilde{P}_s \in v^+$  tale che  $\Gamma(t; \tilde{P}_s) = (a(s), 0)$  per un certo  $t > 0$ ; immediatamente si ha:  $\tilde{P}_s \in D_1(s), \quad \forall s > 0$  e vale il seguente:

LEMMA 4.2 -  $\delta_2(P_s) \geq -b(s) (y_1(\tilde{P}_s) - y_1^-(\tilde{P}_s)) \quad \forall P_s \in D_1(s).$

*Dimostrazione.* Preso  $P_s \in D_1(s)$  supponiamo:

a) che  $\Gamma(s)$  non incontri  $L_2^+(s)$ ; allora  $P_s < \tilde{P}_s$  e, con un cambiamento di variabile, si ottiene:

$$\delta_2(P_s) = \int_{y_1(P_s)}^{y_1^-(P_s)} F_s(x_s(y)) dy >$$

per (F 2.5-6)

$$> -b(s)(y_1(P_s) - y_1^-(P_s)) > -b(s)(y_1(\tilde{P}_s) - y_1^-(\tilde{P}_s))$$

b) che  $\Gamma(P_s)$  incontri  $L_2^+(s)$ ; effettuando un cambiamento di variabile come nel Lemma 4.1 si ha:

$$(4.1) \quad \delta_2(P_s) > \delta_2(\tilde{P}_s)$$

procedendo, quindi, come nel punto a) si ottiene:

$$\delta_2(\tilde{P}_s) > -b(s)(y_1(\tilde{P}_s) - y_1^-(\tilde{P}_s))$$

disuguaglianza che, unita alla (4.1), completa la dimostrazione.

LEMMA 4.3 -

$$a) \quad -y_1^-(\tilde{P}_s) \rightarrow +\infty \text{ per } s \rightarrow +\infty \text{ e ord. } (-y_1^-(\tilde{P}_s)) = 1/2$$

$$b) \quad \text{se } P_s \in v^+ \text{ ed } P_s \cong \tilde{P}_s \text{ allora si ha:} \\ y_1(P_s) \rightarrow +\infty \text{ per } s \rightarrow +\infty \text{ e ord. } (y_1(P_s)) = 1/2.$$

*Dimostrazione.* Sia  $P_s \in D(s)$  con  $P_s \cong \tilde{P}_s$ , allora  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_2^\pm(s)$  e, per la Proposizione 3.3, anche  $L_1^\pm(s)$ ; inoltre, se  $t \in [\tau_1, \tau_2]$  ed anche se  $t \in [\tau_5, \tau_6]$  l'ascissa  $x_s(t)$  di  $\Gamma(P_s)$  è una funzione invertibile, con inversa che indicheremo, rispettivamente, con  $t = t(x)$  e  $\bar{t} = \bar{t}(x)$ ; definiamo ora le seguenti funzioni:

$$\Phi_s(x) \equiv y_s(t(x)) \text{ con } a(s) \leq x \leq a(s) + \alpha \\ \text{e } \Phi_s(x) \geq 0$$

e

$$\Psi_s(x) \equiv y_s(\bar{t}(x)) \text{ con } a(s) \leq x \leq a(s) + \alpha \\ \text{e } \Psi_s(x) \leq 0.$$

Se  $a(s) \leq x \leq a(s) + \alpha$ , per le ipotesi (F 2.5-6) si ha:

$$0 \leq F_s(x) \leq b(s);$$

confrontando il sistema (2.2) con i seguenti sistemi lineari:

$$(4.2) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = y - b(s) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

si ottengono le disuguaglianze:

$$(4.3) \quad \sqrt{(y_2(P_s))^2 + (a(s) + \alpha)^2 - x^2} \leq \\ \leq \Phi_s(x) \leq b(s) + \sqrt{(a(s) + \alpha)^2 + (b(s) - y_2(P_s))^2 - x^2}$$

$$(4.4) \quad b(s) - \sqrt{(a(s) + \alpha)^2 + (b(s) - y_2^-(P_s))^2 - x^2} \leq \psi_s(x) \leq \\ \leq - \sqrt{(y_2^-(P_s))^2 + (a(s) + \alpha)^2 - x^2}$$

a) sia  $P_s = \tilde{P}_s$ ; poiché  $y_1^-(\tilde{P}_s) = \psi_s(a(s))$  ed  $y_2^-(\tilde{P}_s) = 0$ , da (4.4) si ha, immediatamente, a);

b) se  $P_s = \tilde{P}_s$ , poiché  $y_1(\tilde{P}_s) = \Phi_s(a(s))$  ed  $y_2(\tilde{P}_s) = 0$ , da (4.3) si ha

b); sia  $P_s \in v^+$  e  $P_s > \tilde{P}_s$ , allora continuano a valere le considerazioni che hanno portato alla (4.3); inoltre, esistono  $\bar{t} > 0$  e  $\beta > 0$  tali che  $\Gamma(\bar{t}; P_s) = (\bar{x}, 0)$  con  $\bar{x} = a(s) + \alpha + \beta$ ; confrontando, come in precedenza, il sistema (2.2) coi sistemi (4.2) si ottiene:

$$(4.5) \quad y_2(P_s) < \sqrt{\beta^2 + 2\beta(a(s) + \alpha)}$$

sia  $R_s \in v^+$  tale che:

$y_2(R_s) = \sqrt{\beta^2 + 2\beta(a(s) + \alpha)}$ ; applicando la (4.3) a  $\Gamma(R_s)$  con  $x = a(s)$ , si ha:

$$(4.6) \quad y_1(R_s) < b(s) +$$

$$+ \sqrt{2\alpha a(s) + \alpha^2 + b^2(s) + \beta^2 + 2\beta(a(s) + \alpha) - 2b(s) \sqrt{\beta^2 + 2\beta(a(s) + \alpha)}}$$

Se  $P_s > \tilde{P}_s$ , risulta, banalmente,  $y_1(P_s) > y_1(\tilde{P}_s)$  e, da (4.5),  $y_1(P_s) < y_1(R_s)$ ; vale quindi:

$$(4.7) \quad y_1(\tilde{P}_s) < y_1(P_s) < y_1(R_s) \quad \forall s > 0.$$

Poiché si è già visto che ord.  $(y_1(\tilde{P}_s)) = \frac{1}{2}$ , (4.6) e (4.7) completano la dimostrazione.

Preso  $P_s \in v^+$  supponiamo che  $\Gamma(P_s)$  incontri  $L_3^\pm(s)$ ; indichiamo con  $\tau_3, \tau_4 > 0$  i minimi istanti tali che  $\Gamma(\tau_3; P_s) \in L_3^+(s)$  e  $\Gamma(\tau_4; P_s) \in L_3^-(s)$ ; siano infine  $y_3(P_s)$  e  $y_3^-(P_s)$  le ordinate dei suddetti punti di incontro; vale allora il seguente:

LEMMA 4.4 - Sia  $P_s \in D_1(s)$ ; se  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_3^-(s)$  allora:  $y_3^-(P_s) < F_s(a(s) + 2\alpha) \quad \forall s > 0.$

*Dimostrazione.* Sia  $P_s \in D_1(s)$ , se  $\Gamma(P_s) \equiv (x_s(t), y_s(t))$  incontra  $L_3^-(s)$ , allora, per la Proposizione 3.3, incontra anche  $L_3^+(s)$ .

Da (2.2) ed (F 2.7) si ottiene:

$$x_s(\tau_3) > 0 \quad \forall s$$

e quindi

$$\max_{\tau_3 \leq t \leq \tau_4} x_s(t) \equiv x_s(t_m) > a(s) + 2\alpha$$

per (F 2.8) si ha:

$y_s(t_m) = F_s(x_s(t_m)) \leq F_s(x_s(\tau_3)) = F_s(a(s) + 2\alpha)$ ; poiché, infine,  $y_s(t)$  è decrescente  $\forall t \in [\tau_3, \tau_4]$  e  $\tau_3 < t_m < \tau_4$ , risulta:

$$y_3^-(P_s) = y_s(\tau_4) < y_s(t_m) \leq F_s(a(s) + 2\alpha).$$

### § 5. Dimostrazione del Teorema.

Utilizzando le notazioni ed i risultati presentati nei § 3 e 4 diamo ora la:

*Dimostrazione del Teorema 2.1.* Per la Proposizione 3.1 e l'Osservazione 3.2 è sufficiente provare che  $\exists s^* > 0$ :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \delta(P_s) &> 0 \quad \forall P_s \in D_1(s) \\ \forall s &\geq s^*. \end{aligned}$$

Sia  $\tilde{P}_s \in \nu^+$  tale che  $\Gamma(t; \tilde{P}_s) = (a(s) + 2\alpha, 0)$  per un certo  $t > 0$ .

Consideriamo  $\Gamma(\tilde{P}_s) \equiv (x_s(t), y_s(t))$ ; se  $t \in [0, \tau_1]$  allora  $x_s(t)$  risulta una funzione invertibile, con inversa  $t = t(x)$ ; possiamo quindi definire:

$$\Omega_s(x) \equiv y_s(t(x)) \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq a(s).$$

Preso  $x \in [0, a(s)]$  da (F 2.2) si ha  $F_s(x) \leq 0$ ; confrontando il sistema (2.2) con il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

risulta:

$$\Omega_s(x) \leq \sqrt{(y_1(\tilde{P}_s))^2 + a^2(s) - x^2}$$

da cui si ottiene, poiché  $\tilde{P}_s = \Omega_s(0)$ ,

$$(5.2) \quad \tilde{\tilde{P}}_s < \sqrt{(y_1(\tilde{P}_s))^2 + a^2(s)}.$$

Da (2.2) si ha, banalmente,  $\tilde{\tilde{P}}_s > y_1(\tilde{P}_s)$  e  $\tilde{\tilde{P}}_s > \tilde{P}_s \quad \forall s > 0$ ; da (5.2), (F 2.2) e dal Lemma 4.3 risulta quindi:

$$\tilde{\tilde{P}}_s \rightarrow +\infty \text{ per } s \rightarrow +\infty \text{ e ord. } (\tilde{\tilde{P}}_s) \leq 1$$

da cui si ottiene, applicando (F 2.3-4):

$$(5.3) \quad \text{ord.} \left( \frac{1}{\tilde{\tilde{P}}_s - A(s)} \int_0^{a(s)} -x F_s(x) dx \right) > 1.$$

Consideriamo  $P_s \in D_1(s)$  con  $P_s \leq \tilde{\tilde{P}}_s$ ; da (3.1) si ha: <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \delta(P_s) &= \delta_1(P_s) + \delta_2(P_s) + \int_{\tau_2}^{\tau_5} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt + \\ &+ \int_{\tau_6}^{\tau_1} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt > \end{aligned}$$

per (F 2.2) e (F 2.7)

$$> \delta_1(P_s) + \delta_2(P_s)$$

da cui si ha, per i Lemmi 4.1 e 4.2:

$$(5.4) \quad \delta(P_s) > \delta_1(\tilde{\tilde{P}}_s) - b(s) (y_1(\tilde{\tilde{P}}_s) - y_1^-(\tilde{\tilde{P}}_s)).$$

Nel semipiano positivo delle ascisse l'ordinata di una qualunque soluzione di (2.2) è sempre decrescente; da ciò, usando (F 2.3) ed effettuando un cambiamento di variabile come nella dimostrazione del Lemma 4.1, si ottiene:

$$\delta_1(\tilde{\tilde{P}}_s) > \frac{1}{\tilde{\tilde{P}}_s - A(s)} \int_0^{a(s)} -x F_s(x) dx$$

e quindi, sostituendo in (5.4):

$$\delta(P_s) > \frac{1}{\tilde{\tilde{P}}_s - A(s)} \int_0^{a(s)} -x F_s(x) dx - b(s) (y_1(\tilde{\tilde{P}}_s) - y_1^-(\tilde{\tilde{P}}_s))$$

---

(1) Ove poniamo  $\int_{\tau_2}^{\tau_5} -x_s(t) F_s(t) dt = 0$  se  $\Gamma(P_s) \cap L_2^+ = \phi$ .

In virtù di (5.3), (F 2.6) e del Lemma 4.3, esiste quindi  $\bar{s} > 0$ :

$$(5.5) \quad \begin{aligned} & \delta(P_s) > 0 \\ & \forall P_s \in D_1(s) \quad \text{con } P_s \leq \tilde{P}_s \\ & \forall s \geq \bar{s} \end{aligned}$$

Supponiamo esista  $\bar{s} > 0$  tale che  $\tilde{P}_s \notin D(s) \quad \forall s \geq \bar{s}$ ; posto  $s^* = \max\{\bar{s}, \bar{s}\}$ , il teorema segue da (5.1) e (5.5) poiché

$$D(s) \subseteq (0, \tilde{P}_s) \quad \forall s \geq s^*.$$

Sia, invece,  $P_s \in D(s)$  con  $P_s > \tilde{P}_s$ , allora  $P_s \in D_1(s)$  e  $\Gamma(P_s)$  incontra  $L_3^\pm(s)$ ; da (3.1) risulta:

$$\begin{aligned} \delta(P_s) &= \delta_1(P_s) + \delta_2(P_s) + \int_{\tau_2}^{\tau_3} -x_s(t) F_s(t) dt + \\ &+ \int_{\tau_3}^{\tau_4} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt + \int_{\tau_4}^{\tau_5} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt + \\ &+ \int_{\tau_6}^{t_1} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt \end{aligned}$$

da (F 2.2) e (F 2.7) si ha:

$$\delta(P_s) > \delta_2(P_s) + \int_{\tau_3}^{\tau_4} -x_s(t) F_s(x_s(t)) dt =$$

effettuando un cambiamento di variabile,

$$= \delta_2(P_s) + \int_{y_3(P_s)}^{y_3^-(P_s)} F_s(y) dy \geq$$

per (F 2.8) e per il Lemma 4.2

$$\begin{aligned} & \geq -b(s) (y_1(\tilde{P}_s) - y_1^-(\tilde{P}_s)) - F_s(a(s) + 2\alpha) (y_3(P_s) - y_3^-(P_s)) > \\ & > -b(s) (y_1(\tilde{P}_s) - y_1^-(\tilde{P}_s)) + F_s(a(s) + 2\alpha) y_3^-(P_s) > \end{aligned}$$

per il Lemma 4.4

$$> -b(s) (y_1(\tilde{P}_s) - y_1^-(\tilde{P}_s)) + F_s^2(a(s) + 2\alpha)$$

da cui, per (F 2.6), (F 2.9) e per il Lemma 4.3,  $\exists \bar{s} > 0$ :

$$\delta(P_s) > 0$$

$$(5.6) \quad \forall P_s \in D_1(s) \text{ con } P_s > \tilde{P}_s$$

$$\forall s \geq \bar{s}$$

Da (5.1) e (5.6) il teorema risulta definitivamente provato, con

$$s^* = \max\{\bar{s}, \underline{s}\}.$$

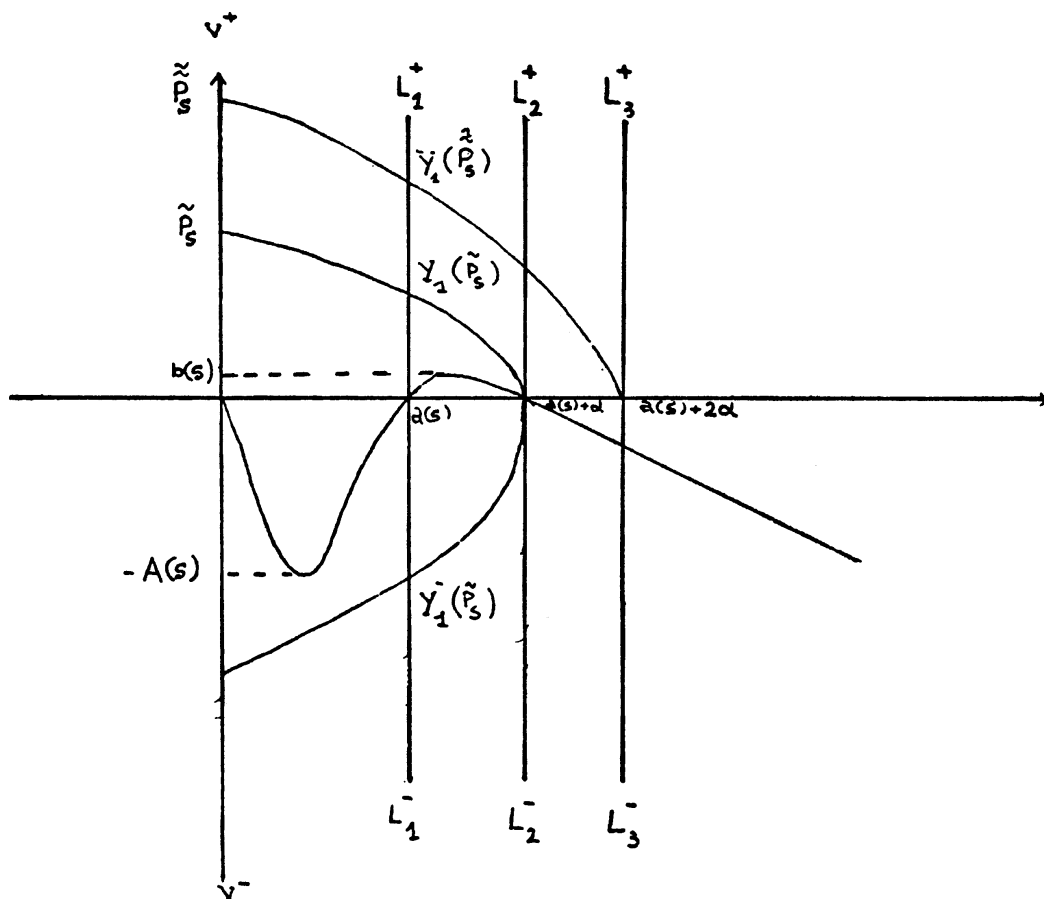


Fig. 2

## PARTE II: NON UNICITA'

## § 6. Esistenza e unicità: richiami.

Ricordiamo ora alcuni noti risultati sull'esistenza e l'unicità di soluzioni periodiche per l'equazione di Liénard. Fissato  $\bar{s} > 0$  consideriamo il sistema  $(2.2)_{\bar{s}}$  e tralasciamo, per comodità, di indicare la dipendenza del parametro;  $(2.2)_{\bar{s}}$  diventa, allora:

$$(6.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

e le ipotesi (F 1) e (F 2.1) si trasformano nelle:

$$(F 1') \quad F(x) \quad \text{di classe } C^1 \text{ in } x \in \mathbf{R}$$

$$(F 2.1') \quad F(x) \quad \text{funzione dispari.}$$

Sono veri i seguenti teoremi:

**TEOREMA 6.1** (esistenza, [4]) - Supponiamo valgano (F 1') e (F 2.1'); esistano inoltre  $k, c > 0$ :

$$(H 1.1) \quad F(x) \geq c > 0 \quad \forall x \geq k$$

$$(H 1.2) \quad f(0) < 0.$$

Allora il sistema (6.1) ammette almeno una soluzione periodica.

**TEOREMA 6.2** (unicità, [5]) - Valgano (F 1'), (F 2.1') ed esista  $a > 0$ :

$$(H 1.3) \quad F(a) = 0 \text{ ed } F(x) < 0 \text{ per } 0 < x < a$$

$$(H 1.4) \quad f(x) \geq 0 \text{ per } x > a.$$

Allora il sistema (6.1) ammette, al più, una soluzione periodica, che risulta un ciclo limite stabile.

In effetti i teoremi precedenti sono casi particolari di risultati più generali validi per l'equazione:

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = 0$$

sotto opportune ipotesi per la  $g$  (cfr. [4] e [5]). Si noti inoltre che, essendo  $f$  continua, da (H 1.1) e (H 1.2) segue l'esistenza di un  $a > 0$  che verifica (H 1.3).

**§ 7. Esistenza di soluzioni periodiche «grandi».**

Vogliamo ora dare condizioni sotto le quali il sistema (6.1) ammette soluzioni periodiche di ampiezza «grande».

Allo scopo di usare tecniche di biforcazione (biforcazione di Hopf), conviene introdurre ancora il parametro  $s \in \mathbf{R}$  e studiare  $(2.2)_s$ . E' anche opportuno evidenziare il periodo delle soluzioni cercate, considerando il sistema:

$$(7.1) \quad \omega \dot{u} = G_s(u) \quad \omega \in \mathbf{R}, \quad s \in \mathbf{R}$$

$$\text{con } u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ e } G_s(u) = \begin{pmatrix} y - F_s(x) \\ -x \end{pmatrix}.$$

Se  $u$  è una soluzione  $2\pi$ -periodica di (7.1) allora  $u(\omega t)$  è una soluzione  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodica di (2.2).

La biforcazione delle soluzioni periodiche di (7.1) si studia (cfr., ad es., [8]) considerando, nello spazio

$$X = \{u \in C^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^2) : u(t + 2\pi) = u(t)\},$$

l'equazione funzionale:

$$(7.2) \quad M(\omega, s, u) = \omega \dot{u} - G_s(u) = 0$$

in cui  $(\omega, s) \in \mathbf{R}^2$  è il parametro di biforcazione.

Poiché siamo interessati all'apparire di soluzioni «grandi» è opportuno introdurre:

$$(7.3) \quad z = \frac{u}{\|u\|_1^2} \quad \text{con } \|u\|_1 = \|u\|_\infty + \|\dot{u}\|_\infty.$$

Qui e nel seguito, per  $u \in X$ :

$$\|u\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |u(t)|.$$

Sostituendo (7.3) in  $M$  si trova subito che (7.2) è equivalente all'equazione:

$$(7.4) \quad N(\omega, s, z) \equiv \omega \dot{z} - \tilde{G}_s(z) = 0$$

dove

$$\tilde{G}_s(z) = \begin{pmatrix} z_2 - \|z\|_1^2 F_s\left(\frac{z_1}{\|z\|_1^2}\right) \\ -z_1 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Ciò premesso, vogliamo provare:

TEOREMA 7.1 - Valga (F1); supponiamo inoltre che esistano  $\bar{s} > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $h(s) : [s - \varepsilon, s + \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h(s)$  di classe  $C^1$ , tali che:

$$(K1) \quad \begin{aligned} F(s, x) &= h(s)x + F_0(s) \quad \forall s \in [\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon] \\ &\quad \forall x \in \mathbf{R} \\ \text{con } \frac{F_0(x)}{|x|} &\rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$h(\bar{s}) = 0 \text{ e } h'(\bar{s}) = 0.$$

Allora esistono:  $s_n \rightarrow \bar{s}$ ,  $\omega_n \rightarrow 1$  e  $u_n \in X$  con:

$$(7.5) \quad \|u_n\|_\infty \rightarrow +\infty$$

tali che, posto  $v_n(t) \equiv u_n(\omega_n t)$ ,  $v_n$  è soluzione  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodica di (2.2) <sub>$s_n$</sub> .

*Dimostrazione.* Applichiamo il Teorema di biforcazione di Hopf a (7.4). Risulta:

$$D_z N(\omega, s, 0) [p] = \omega \dot{p} - D_z \tilde{G}_s(0), \quad p \in X.$$

Da (K1) segue:

$$D_z \tilde{G}_s(0) = \begin{pmatrix} -h(s) & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo inoltre  $h(\bar{s}) = 0$  e  $h'(\bar{s}) = 0$  è immediato verificare che valgono le ipotesi di trasversalità del Teorema di Hopf in corrispondenza di  $s = \bar{s}$  e  $\omega = 1$ . Allora  $\exists s_n \rightarrow \bar{s}$ ,  $\omega_n \rightarrow 1$  e  $z_n \in X$  con  $\|z_n\|_1 \rightarrow 0$  tali che  $N(s_n, \omega_n, z_n) = 0$ . Per quanto osservato in precedenza si avrà:

$$M(s_n, \omega_n, u_n) = 0.$$

Infine, poiché  $\|u_n\|_1 \rightarrow +\infty$ , da (7.1) si deduce (7.5). Questo completa la dimostrazione del Teorema.

OSSERVAZIONI :

1) Si dice che  $s = \bar{s}$  è un punto di biforcazione dall'infinito per il sistema (7.1) ([9]).

Il procedimento che consiste nel ricondurre la biforcazione dall'infinito alla biforcazione da 0 è ben noto (si veda, ad es.: [10]) anche se è stato di solito applicato a problemi ellittici e non alla biforcazione di Hopf.

2) La tesi del Teorema 7.1 può essere rafforzata affermando che da  $s = \bar{s}$ ,  $\omega = 1$  si biforca un ramo continuo di soluzioni periodiche a cui corrisponde una famiglia continua  $v_s$  di soluzioni  $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodiche di (2.2)<sub>s</sub> con  $\|v_s\|_\infty \rightarrow +\infty$  per  $s \rightarrow \bar{s}$ .

3) Il metodo che abbiamo esposto può presentare diversi vantaggi: potrebbe estendersi allo studio di sistemi in  $\mathbf{R}^n$  con  $n > 2$ , ma anche consentire l'utilizzazione del Teorema di biforcazione globale ([11]) che, a sua volta, potrebbe fornire informazioni più precise sul ramo di soluzioni periodiche che si biforca.

Dopo avere terminato il lavoro, il prof. Ambrosetti mi ha comunicato di essere venuto a conoscenza che il dott. Sabatini [16] ha ottenuto, indipendentemente, dei risultati di biforcazione dall'infinito che sono forse simili a quelli su esposti.

### § 8. Teorema di non-unicità.

Proviamo ora un teorema di non-unicità per le soluzioni periodiche del sistema (2.2).

TEOREMA 8.1 - Dato il sistema (2.2)<sub>s</sub>, valgano, per esso le ipotesi (F1) e (F2.1); supponiamo inoltre esistano  $\bar{s} > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\nu > 0$  e  $h: [\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $h$  di classe  $C^1$ , tali che (K1) è vera e (2.2)<sub>s</sub> verifica (H1.1-4) per ogni  $s \in [\bar{s} - \nu, \bar{s}]$ . Esiste allora  $\tilde{s} > \bar{s}$  tale che il sistema (2.2)<sub>s</sub> ha almeno due soluzioni periodiche per ogni  $s \in (\bar{s}, \tilde{s})$ .

*Dimostrazione.* Valgono, per le ipotesi fatte, i Teoremi 6.1, 6.2 e 7.1.

Il sistema (2.2)<sub>s</sub> ha quindi,  $\forall s \in [\bar{s} - \nu, \bar{s}]$ , una unica soluzione periodica:  $\gamma(s)$ , che risulta un ciclo limite stabile. Inoltre (2.2)<sub>s</sub> ha, per  $s = \bar{s}$ , una biforcazione dall'infinito di soluzioni periodiche.

Preso  $a > 0$  come nelle ipotesi (H1.3-4), poniamo:

$$M = \{(a, y) / y > 0\};$$

facilmente si ottiene che  $\gamma(\bar{s})$  incontra  $M$  in un punto di ordinata  $\bar{y}$ ; inoltre, se  $S \subseteq M$  è un aperto contenente  $\bar{y}$ , per (H1.3)  $S$  risulta una sezione locale (nel senso di [12]) di  $\gamma(\bar{s})$  nel punto  $(a, \bar{y})$ .

Detta  $u: S \rightarrow S$  la mappa di Poincaré (vedi [12] pag. 281) di  $S$  in sé, poiché  $\gamma(\bar{s})$  è un ciclo limite stabile, si ottiene:

$$u(\bar{y}) = \max_{y \in S} u(y) \text{ e quindi}$$

$$(8.1) \quad Du(\bar{y}) = 0.$$

Sia  $U \subseteq \mathbf{R}^2$  un intorno compatto di  $\gamma(\bar{s})$ ; da (8.1) si ha che esiste  $\eta \in \mathbf{R}$  con  $0 < \eta < \nu$ :

$$(8.2) \quad \text{Il sistema (2.2)}_s \text{ ammette in } U \text{ una soluzione periodica per ogni } s \in (\bar{s} - \eta, \bar{s} + \eta)$$

(vedi [12] Teorema 1 pag. 309 e [13] § 6.4).

Da (8.2) si ottiene, in particolare, che l'unica soluzione periodica  $\gamma(s)$  per  $\bar{s} - \nu < s \leq \bar{s}$  risulta «vicina» a  $\gamma(\bar{s})$  per  $s$  «vicino» a  $\bar{s}$ . Di conseguenza la biforcazione dall'infinito deve, necessariamente, avvenire per valori del parametro maggiori di  $\bar{s}$  e dà origine a soluzioni che non sono contenute in  $U$ .

Da queste considerazioni e da (8.2) segue il teorema.

E' possibile provare il teorema precedente anche facendo uso dell'indice di Fuller per soluzioni periodiche. Rimandiamo a [14] e [15] per la definizione di indice di Fuller; qui vogliamo soltanto ricordare alcune importanti proprietà di cui gode.

Consideriamo un sistema differenziale:

$$\dot{x} = f(x) \quad x \in \mathbf{R}^n$$

ed indichiamo con  $x(t, x_0)$  il flusso, ad esso associato, con condizione iniziale  $x_0$ .

Sia  $\Omega \subseteq (0, +\infty) \times \mathbf{R}^n$ , con  $\{0\} \times \mathbf{R}^n \cap \bar{\Omega} = \phi$ , un insieme aperto e limitato e sia

$$\Pi(f) = \{(T, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbf{R}^n / x(T, x_0) = x_0\}.$$

L'indice di Fuller,  $d(\Omega, f)$ , è un numero razionale definito per quegli insiemi  $\Omega$  e quelle funzioni  $f$  che verificano:

$$(8.3) \quad \Pi(f) \cap \delta\Omega = \phi$$

$d(\Omega, f)$  gode, inoltre, delle seguenti proprietà:

$$(8.4) \quad \text{se } \Omega \cap \Pi(f) = \phi \text{ allora } d(\Omega, f) = 0$$

$$(8.5) \quad \text{se } \gamma \text{ è un ciclo limite stabile di periodo minimo } q \text{ e } \Pi(f) \cap \Omega = \{q\} \times \gamma, \text{ allora } d(\Omega, f) = +1$$

(8.6) se  $f^\alpha, 0 \leq \alpha \leq 1$ , è una omotopia di campi vettoriali tale che:  $\Pi(f^\alpha) \cap \delta\Omega = \phi$  per  $0 \leq \alpha \leq 1$  allora  $d(\Omega, f^\alpha)$  è indipendente da  $\alpha$ .

Supponiamo valgano le ipotesi del Teorema 8.1 e consideriamo il ramo  $\gamma(s)$  di soluzioni periodiche introdotto nella dimostrazione del suddetto teorema. Usando l'indice di Fuller vogliamo allora provare che  $\gamma(s)$  «continua» per valori del parametro in un intorno destro di  $\bar{s}$ . Da ciò, servendosi del Teorema 7.1, si ottiene una dimostrazione alternativa del Teorema 8.1. Riscriviamo (2.2) nella forma  $\dot{u} = G_s(u)$ , riprendendo le notazioni introdotte nel § 7. Osserviamo, innanzitutto, che il periodo  $T(s)$  di  $\gamma(s)$  è una funzione continua di  $s$  in  $[\bar{s} - \nu, \bar{s}]$  (si veda [13], § 6.4, pag. 47). Da ciò e da (8.2) risulta quindi possibile costruire un insieme aperto e limitato  $\Omega \subseteq (0, +\infty) \times \mathbf{R}^2$  con  $\{0\} \times \mathbf{R}^2 \cap \bar{\Omega} = \phi$  tale che  $\Pi(G_s) \cap \delta\Omega = \phi \forall s \in [\bar{s} - \sigma, \bar{s}]$  con  $0 < \sigma < \nu$  e  $\{kT(s)\} \times \gamma(s) \in \Omega$  se e solo se  $k = 1$ . Ricordiamo, inoltre, che  $\gamma(s)$  è, per ogni  $s \in [\bar{s} - \sigma, \bar{s}]$ , un ciclo limite stabile. Da (8.5) si ha, quindi:

$$(8.7) \quad (\Omega, G_s) = +1 \quad \forall s \in [\bar{s} - \sigma, \bar{s}].$$

Poiché  $G_s$  è un'omotopia di campi, col parametro di omotopia dato da  $s$ , da (8.6) e (8.7) risulta  $d(\Omega, G_s) \neq 0$  per  $s$  in un intorno destro di  $\bar{s}$ .

Da (8.4) segue, allora, che il ramo  $\gamma(s)$  di soluzioni periodiche «continua» per  $s > \bar{s}$ .

## § 9. Conclusioni.

Allo scopo di riassumere le considerazioni fatte nei paragrafi precedenti, supponiamo valgano, per il sistema (2.2), tutte le ipotesi formulate sino ad ora.

Più precisamente siano verificate (F1) ed anche:

- (i) (F 2.1) e (H1.1-4) per  $0 < s \leq \bar{s}$
- (ii) (F 2.1-9) per  $s > \bar{s}$
- (iii) (K 1).

Possiamo allora applicare tutti i risultati trovati nei § 2-8; vale

a dire: esistono  $\bar{s}, \tilde{s}, s^*$  con  $0 < \bar{s} < \tilde{s} < s^*$  tali che  $(2.2)_s$  ha:

- (i') una sola soluzione periodica per  $0 < s \leq \bar{s}$
- (ii') almeno due soluzioni periodiche per  $\bar{s} < s \leq \tilde{s}$
- (iii') nessuna soluzione periodica per  $s > s^*$ .

Consideriamo ora la seguente figura (Fig. 3) ove abbiamo posto: sull'asse delle ascisse il parametro  $s$  e sull'asse delle ordinate la norma delle eventuali soluzioni periodiche di  $(2.2)_s$ .

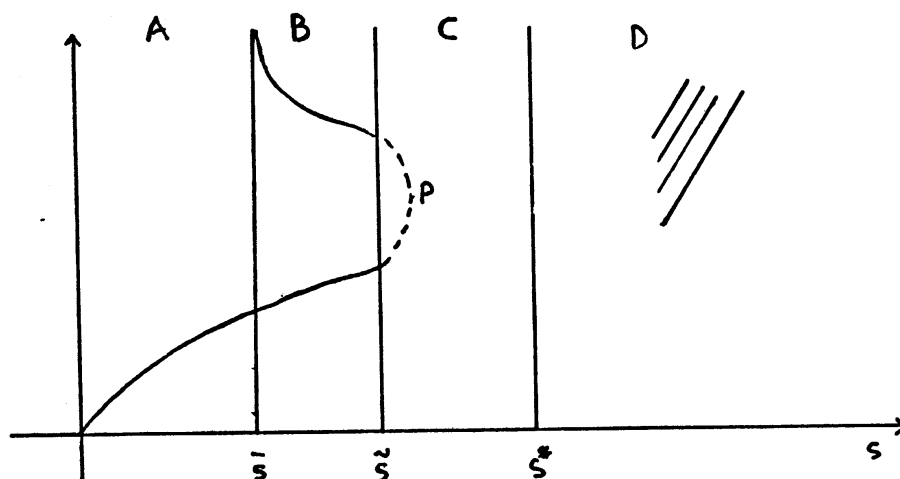


Fig. 3

Pur avendo un valore semplicemente indicativo, la Fig. 3 illustra il comportamento dei rami di soluzioni di  $(2.2)_s$  studiati in precedenza. Più precisamente le regioni  $A$ ,  $B$  e  $D$  presentano quei fenomeni mostrati, rispettivamente, in (i'), (ii') e (iii'). Nulla abbiamo, sino ad ora, scritto su ciò che accade in  $C$ .

Utilizzando l'indice di Fuller è però possibile mostrare che un ramo di soluzioni periodiche «continua», al variare del parametro, sino a quando non incontra un punto, come  $P$ , nel quale (8.3) non vale più (cfr. il § 8).

La possibile presenza di altre soluzioni periodiche del nostro sistema per  $\bar{s} < s < s^*$  diverse da quelle indicate nella Fig. 3 non ci consente, però, di concludere che il ramo che si biforca dalla soluzione di equilibrio per  $s = 0$  si congiunge con quello che si biforca

dall'infinito per  $s = \bar{s}$ . Ci proponiamo di studiare in seguito fenomeni di questo tipo.

Si ringraziano il prof. G. Villari ed il prof. F. Zanolin per le utili discussioni sulle equazioni di Liénard. Un ringraziamento particolare va al prof. Ambrosetti che ha seguito con molta pazienza l'evolversi del lavoro.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. SANSONE, R. CONTI, *Non-Linear Differential Equations*. New York, Macmillan, 1964.
- [2] R. REISSIG, G. SANSONE, R. CONTI, *Qualitative Theorie Nichtlinearer Differentialgleichungen*. Roma, Edizioni Cremonese, 1963.
- [3] U. STAUDE, *Uniqueness of Periodic Solutions of the Liénard Equation*, in «Recent Advances in Differential Equations» (ed. da R. Conti), New York, Academic Press, 1981.
- [4] J. R. GRAEF, *On the Generalized Liénard Equation with Negative Damping*, J. of Differential Equations 12, 34-62 (1972).
- [5] F. ALBRECHT, G. VILLARI, *On the Uniqueness of the Periodic Solutions of Certain Liénard Equations*, preprint.
- [6] ZHANG ZHIFEN, *On the Number of Limit Cycles of Liénard Equations*. Quad. Ist. Mat. U. Dini Univ. di Firenze, 1985.
- [7] P. OMARI, F. ZANOLIN, *Periodic Solutions of Liénard Equations*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 72, 203-230.
- [8] A. AMBROSETTI, Appunti corso INDAM. Anno acc. 1982-83.
- [9] P. H. RABINOWITZ, *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems*, J. of Functional Analysis 7, 487-513 (1971).
- [10] A. AMBROSETTI, *Differential Equations with Multiple Solutions and Nonlinear Functional Analysis*, Equadiff. 82, Springer Verlag Lecture Notes, 1017.
- [11] J. C. ALEXANDER, J. A. YORKE, *Global Bifurcations of Periodic Orbits*, Amer. J. Math., 100, 263-292 (1978).
- [12] M. W. HIRSCH, S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. New York, Academic Press, 1974.
- [13] G. PRODI, A. AMBROSETTI, *Analisi Non Lineare*, Quaderni Mat. della Scuola Normale Sup., Pisa, 1973.
- [14] F. B. FULLER, *An index of fixed point type for periodic orbits*, Amer. J. Math. 89, 133-148 (1967).
- [15] S. N. CHOW, J. MALLET-PARET, *The Fuller Index and Global Hopf Bifurcation*, J. Differential Equations 29, 66-85 (1978).
- [16] M. SABATINI, *Hopf Bifurcation from Infinity*. Apparirà nei Rend. Sem. Mat. di Padova.