

Atti del VI Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della MAtematica
DI.FI.MA. 2013

I DOCENTI DI MATEMATICA E DI FISICA DI FRONTE AI MUTAMENTI DELLA SCUOLA: CONCETTI, PROCESSI, VALUTAZIONE

Torino 2-4 ottobre 2013 - Liceo "M. D'Azeglio"

a cura di
Ornella Robutti e Miranda Mosca

f
 Π
 Σ
 h

Ledizioni
The Innovative LEDpublishing Company



Atti del VI Convegno Nazionale
di Didattica della Fisica e della Matematica
DI.FI.MA. 2013

I DOCENTI DI MATEMATICA E DI FISICA DI FRONTE AI MUTAMENTI DELLA SCUOLA: CONCETTI, PROCESSI, VALUTAZIONE

2-3-4 ottobre 2013, Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

A cura di:
Ornella Robutti e Miranda Mosca

Ledizioni

©2015 Ledizioni LediPublishing

Via Alamanni, 11 - 20141 Milano - Italy

www.ledizioni.it

info@ledizioni.it

I DOCENTI DI MATEMATICA E FISICA DI FRONTE AI MUTAMENTI DELLA SCUOLA: CONCETTI, PROCESSI E VALUTAZIONE

Atti del VI Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e della Matematica DI.FI.MA. 2013

A cura di: Ornella Robutti e Miranda Mosca, Ledizioni 2015

Revisione testo: Elisa Gentile

Comitato scientifico:

Ferdinando Arzarello, Alessio Drivet, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Simona Martinotti, Francesca Morselli, Miranda Mosca, Giuseppina Rinaudo, Ornella Robutti, Ada Sargenti, Claudia Testa

Responsabile del Convegno: Ornella Robutti

Responsabile del progetto grafico: Maria Grazia Imarisio

Responsabile amministrativo: Marilena Cavaglià

Esperto tecnico: Tiziana Armano

Segreteria: Daniela Truffo

ISBN 978-88-6705-353-7

Immagine in copertina: progetto grafico di Maria Grazia Imarisio

Informazioni sul catalogo e sulle ristampe dell'editore: www.ledizioni.it

Indice

Relazioni in plenaria

Alison Clark-Wilson	Cornerstone Maths: An approach to technology-enhanced innovation at scale	23
Ernesta De Masi	Insegnare Matematica e Fisica oggi	31

Tavola rotonda: La formazione dei docenti di matematica e fisica

Pietro Di Martino	TFA – la formazione iniziale “dimezzata”	45
Ornella Robutti	La formazione degli insegnanti nel Tirocinio Formativo Attivo	47
Maurizio Berni	La formazione dei docenti di matematica e di fisica	51

Tavola rotonda. L'insegnamento della matematica e della fisica in Europa

Alessio Drivet	L'Insegnamento della matematica in Europa nel Rapporto Eurydice 2011	59
Ernesta De Masi	L'insegnamento della Fisica nei Licei Europei	63
Francesca Ruzzi	L'insegnamento della Matematica in Finlandia	67

Workshop

Giulio Alluto, Andrea Poggi, Alfonsina Sibilla	Dal “metodo del falegname” all'approccio a una teoria delle frazioni	73
Pietro Di Martino	Il problema dei problemi	85
Elisabetta Panucci, Francesca Morselli	Spiega come, spiega perché ... un percorso tra aritmetica e geometria nella scuola secondaria di primo grado	91
Lambrecht Spijkerboer	Building the concept of relations	99
Monica Testera, Francesca Morselli	Vero o falso? Un'attività interdisciplinare tra esempi e controesempi	107
Antonella Cuppari, Manuela Boltri, Giulia Cantamessa, Simona Falabino, Tommaso Marino, Daniela Marocchi, Giuseppina Rinaudo, Paolo Tamagno, Laura Vandoni	Strade diverse per l'approccio all'energia nella scuola secondaria superiore della nuova riforma	117
Giovanni Pezzi	Fisica con gli smartphone	133
Corrado Agnes, Angelo Merletti	Il corso di fisica di Karlsruhe tra innovazione e tradizione	139

Comunicazioni

Giada Astorri, Michela Maschietto	Scacchiera e pop-corn: una situazione problematica per la scuola primaria	153
Enrico Baccaglini	La competenza nell'approccio ai problemi di massimo e di minimo in preparazione all'esame di stato riformato	165
Cristina Bardelle	Dalle dimostrazioni visuali alle dimostrazioni deduttive	177
Maria Isabella Calastri	Sketch-up e la geometria solida: un software di modellizzazione	189
Alessio Drivet	We don't need no education	199
Elisabetta Ferrando, Elisabetta Robotti	Il Modello di Toulmin come strumento valutativo per gli insegnanti	203
Mariacristina Morando	Le coniche: un approccio laboratoriale	215
Elena Pasqualini, Marco Bertoli, Francesca Martignone	Per la parabola ... ci vuol la parabolica?	227
Ornella Robutti, Alice Battaglio, Isabella Boasso, Federica Magonara, Paolo Saracco	La didattica della matematica e i video su Youtube	235
Annarosa Rongoni, Gianni Zannoni	Matematica sulla scacchiera: un esempio di approccio ludico-costruttivistico ai contenuti curricolari	247
Francesca Scorcioni, Michela Maschietto	Il teorema di Pitagora con le macchine matematiche	257
Elisa Gentile	Percorso di tirocinio TFA su onde e ottica fisica: aspetti fisici e matematici si intrecciano	269
Daniela Marocchi, Marta Rinaudo, Enrica Ruffino	L'interesse come 'molla' verso la scoperta della Fisica	279
Antonio Prevignano	Il concetto di energia al liceo classico Botta di Ivrea	285
Roberta Carminati, Graziano Gheno	Sulle tracce del calcolo sublime	295
Paola Damiani, Anna Paola Longo	Matematica: insegnamento quotidiano in classe ad allievi in difficoltà o con bisogni educativi speciali	307
Carmela Fiore, Antonella Montone, Maria Pagone, Michele Pertichino	Rappresentare e rappresentarsi: la matematica in scena fra scuola dell'infanzia e prima classe della scuola primaria	317
Graziano Gheno, Roberta Carminati	Sorgenti funzionali	325
Laura Maffei, Jean-François Nicaud	Il software di algebra dinamica epsilonwriter: potenzialità e implicazioni didattiche	339

Simone Ballari, Pietro Agostino Cornacchia, Paolo Gallina, Viviana Mainelli, Lorenzo Orio	Un decennio di Olimpiadi di Matematica (gara pubblico – Torino lingotto): euristiche, strategie, statistiche nella risoluzione dei quesiti	343
Antonella Rossi	Il concetto di derivata in un contesto di volo	357
Annarosa Serpe, Maria Giovanna Frassia	Un laboratorio interdisciplinare tra matematica, informatica e disegno: la voluta ionica del vignola	365
Paolo Grosso, Daniela Marocchi	Energia, potenza, rendimento: parole chiave per la comprensione di fenomeni fisici	377
Andrea Piccione	Le grandezze fisiche con sms e telefoni cellulari	383
Anita Calcatelli, Riccardo Urigu	La scienza della misura nell'insegnamento scientifico	393

GeoGebra Day

Tavola rotonda degli Istituti italiani: ricerca, formazione, sperimentazione con GeoGebra

Eleonora Faggiano	Il GeoGebra institute di Bari tra ricerca, formazione e sperimentazione	407
Ottavio G. Rizzo	GeoGebra a Milano	411

Comunicazioni

Pierangela Accomazzo, Silvia Beltramino	Esplorare i quesiti INVALSI con GeoGebra nella didattica quotidiana	417
Valeria Andriano	Macchine matematiche, GeoGebra e origami: un lavoro sulle coniche	429
Viviana Belletti, Elisa Gentile, Monica Mattei, Renzo Sciascia	L'esperienza della Quality Class come percorso di sviluppo professionale nella formazione degli insegnanti	431
Maria Cantoni, Donatella Merlo	Costruiamo la geometria insieme ai bambini	443
Arianna Coviello, Alessandro Galasco	Quadrature	453
Paola Damiani, Rosalba De Luca Gaglio, Nazzarena Pescarmona, Ada Sargenti, Claudia Testa	L'utilizzo di GeoGebra e l'osservazione delle situazioni di difficoltà	463
Gaetano Di Caprio	GeoGebra e le funzioni: il senso della "velocità di variazione"	471
Paola Eandi	Ellisse e Iperbole: dal problema alla curva	481
Lucia Galleano, Francesca Martignone, Marco Bertoli	Una macchina ogni tanto... un percorso di integrazione del laboratorio di matematica nel biennio del liceo scientifico	493

Tiziana Garattoni, Paola Roccia	Introduzione “dinamica” alla geometria euclidea	505
Carla Lovino, Mariella Stragapede, Eleonora Faggiano, Michele Pertichino	Percorsi di geometria con GeoGebra: figure e trasformazioni nella scuola secondaria di primo e secondo grado	515
Giovanna Valori	L'area dell'Arbelos e la parabola per tre punti. GeoGebra come strumento attivo	525
Michela Viale	TFA, armonia e bellezza	533

VI CONVEGNO NAZIONALE DI DIDATTICA DELLA FISICA E DELLA MATEMATICA DI.FI.MA. 2013

I docenti di matematica e di fisica di fronte ai mutamenti della scuola:

Concetti, processi, valutazione

2-3-4 ottobre 2013

Aula Magna Liceo Classico M. D'Azeglio, Torino

Mercoledì 2 ottobre

h. 14.00	Ornella Robutti	Apertura lavori
h. 14.15	Autorità	Ufficio Scolastico Regionale, Provincia di Torino, Scuola di Scienze della Natura, Dipartimento di Matematica, Dipartimento di Fisica, CIFIS, Liceo D'Azeglio
h. 14.30	Alison Clark-Wilson	The Cornerstone Mathematics project
h. 15.15	Francesca Morselli (coordina)	Tavola rotonda: La formazione dei docenti di matematica e di fisica Interventi di: Maurizio Berni, Pietro Di Martino, Ornella Robutti. Dibattito
h. 16.15	Intervallo	
h. 16.30-18.30	Workshop e comunicazioni	

Giovedì 3 ottobre

14.30	Ernesta De Masi	Insegnare Matematica e Fisica oggi
15.15	Giuseppina Rinaudo (coordina)	Tavola rotonda: L'insegnamento della matematica e della fisica in Europa Interventi di: Ernesta De Masi, Alessio Drivet, Francesca Ruzzi. Dibattito
16.15	Intervallo	
16.30-18.30	Workshop e comunicazioni	

Venerdì 4 ottobre **GeoGebra Italian Day**

14.30	Ornella Robutti (coordina)	Tavola rotonda degli Istituti italiani: Ricerca, formazione, sperimentazione con GeoGebra
16.00-17.30	Workshop e comunicazioni	
17.30	Cerimonia finale di chiusura	

IL TEOREMA DI PITAGORA CON LE MACCHINE MATEMATICHE

Francesca Scorcioni¹, Michela Maschietto²

¹MMLab & IC “Marconi” – Castelfranco Emilia (MO), ²MMLab & Dipartimento di Educazione e Scienze Umane – Università di Modena e Reggio Emilia

Premessa

Questo contributo presenta una sperimentazione didattica sul Teorema di Pitagora nell'ambito del laboratorio di matematica con artefatti fisici, quali le macchine matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), nella scuola secondaria di I grado. Il Teorema di Pitagora è un argomento classico che di solito viene introdotto durante il secondo quadrimestre della classe seconda, dopo aver presentato agli alunni le radici quadrate in aritmetica e l'area delle figure piane in geometria. La scelta di proporre il percorso che sarà qui descritto è nata da un lato dalla constatazione che, anche nei risultati delle prove di valutazione nazionali, la geometria rappresenta lo scoglio maggiore per gli alunni, dall'altro dall'interesse dell'insegnante di proporre un diverso modo di affrontarla.

Nelle *Indicazioni Nazionali per il Curricolo del I ciclo d'istruzione* del 2012, tra gli obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di I grado, è presente quello di “conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica in situazioni concrete” (p. 64). Presentare agli alunni il Teorema di Pitagora come un insieme di formule utili solo per trovare un lato di un triangolo rettangolo conoscendo gli altri due, riducendolo quindi solo a un'insieme di regole da memorizzare e applicare, senza far cogliere il collegamento con l'interpretazione geometrica del Teorema stesso, non contribuisce a sviluppare un'adeguata visione della matematica come contesto per porsi e risolvere problemi significativi. A livello metodologico, nelle stesse *Indicazioni* viene specificato che in matematica è “elemento fondamentale il laboratorio di matematica, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte” (p. 60).

Si è deciso quindi di costruire un percorso che prevedesse l'utilizzo delle macchine matematiche per far costruire agli alunni di due classi seconde il significato del Teorema di Pitagora e arrivare alla sua formulazione simbolica. Le macchine matematiche che sono state utilizzate per il progetto sono due: la prima si basa sulla classica dimostrazione del Teorema di Pitagora che si avvale di un quadrato e quattro triangoli rettangoli, la seconda propone una dimostrazione del Teorema attribuita a Leonardo da Vinci.

Questo articolo si compone di quattro sezioni: nella prima viene delineato il quadro di riferimento entro il quale si colloca la sperimentazione, la seconda presenta gli elementi della progettazione del percorso nella parte relativa alle macchine matematiche, nella terza vengono ripercorse le fasi del lavoro svolto in classe con gli alunni, mentre nell'ultima viene analizzata l'attività degli allievi con le due macchine matematiche.

Il laboratorio di matematica con le macchine matematiche

La metodologia dell'esperienza presentata in questo articolo fa riferimento al laboratorio di matematica, così come descritto in *Matematica2003 - Matematica per il cittadino* della Commissione UMI-CIIM (AA.VV., 2004). Il laboratorio di matematica si può pensare come uno spazio fenomenologico in cui sono presenti strumenti quali le macchine matematiche (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), ma anche materiale povero (ad esempio, fogli di cartoncino) e

strumenti classici per il disegno (riga e squadre). L'idea fondamentale di laboratorio con le macchine matematiche è che una macchina matematica evoca (se ci si mette nella prospettiva del soggetto riguardo alle relazioni tra artefatto e conoscenze) o incorpora (se ci si mette in una prospettiva storico-epistemologica di analisi dell'artefatto) un certo sapere matematico, proprio perché è stata costruita in un certo modo. Un esempio di macchina matematica è dato dal compasso (Barbieri & Maschietto, 2012), ma vi sono anche pantografi per le trasformazioni geometriche (Bettini *et al.*, 2012).

Da un punto di vista teorico, la metodologia del laboratorio ha un suo fondamento nella Teoria della Mediazione Semiotica di impronta vygotskiana, sviluppata da Bartolini Bussi e Mariotti (2009). Quando agli allievi è dato un compito che prevede l'uso di una tecnologia (sia classica come una macchina matematica, che digitale come un software di geometria dinamica) si può osservare un'intensa attività di produzione di segni (che viene definita attività semiotica), quali sguardi, gesti, parole, schizzi su carta, disegni o testi (anche contenenti simboli). I segni che vengono prodotti dagli allievi svolgono la duplice funzione di rappresentare il problema posto all'allievo stesso e di comunicare con gli altri studenti e/o con l'insegnante. I termini utilizzati nella comunicazione sono contestualizzati e strettamente legati alla situazione in cui gli studenti si trovano. Gli studenti che usano una certa tecnologia per svolgere un compito preciso non sempre sono consapevoli dei significati matematici che stanno trattando. È quindi compito dell'insegnante sostenerli nel processo di esplicitazione di tali significati. In tal senso, l'insegnante deve accompagnare l'evoluzione di segni, da quelli relativi all'oggetto e al suo uso a quelli matematici. Quando un insegnante usa un artefatto per mediare significati matematici, egli usa l'artefatto come strumento di mediazione semiotica. La struttura didattica di tale Teoria è costituita dal ciclo didattico in cui si trovano tre tipi di attività (Bartolini Bussi, 2010): attività con l'artefatto a piccolo gruppo, attività individuale e discussioni collettive (nello specifico, discussioni matematiche).

Nell'utilizzo di artefatti, un riferimento importante risulta essere anche l'approccio strumentale (Rabardel, 1995), basato sulla distinzione tra artefatto (oggetto materiale) e strumento (costruzione psicologica data dall'artefatto e dagli schemi di utilizzo corrispondenti a come il soggetto utilizza l'artefatto per compiere un compito specifico). Rabardel definisce "genesi strumentale" il processo di costruzione individuale di uno strumento (o strumenti) a partire da un artefatto. Da un punto di vista didattico, risulta importante, da parte dell'insegnante, sostenere il processo di genesi strumentale con opportune consegne volte a individuare le caratteristiche dell'oggetto fisico, il suo funzionamento e i modi d'utilizzarlo (in altri termini, gli schemi d'utilizzo) in compiti precisi, legati ai significati matematici che sono tra gli obiettivi del lavoro. Per questo, le prime consegne nel laboratorio con le macchine matematiche sono "come è fatta la macchina" e "che cosa fa" (Bartolini Bussi, 2010).

Elementi di progettazione del percorso

Come è stato anticipato, in questa sperimentazione didattica sono state utilizzate due macchine matematiche, con due diverse funzionalità didattiche (Cerulli *et al.* 2007): la prima macchina matematica è stata scelta per introdurre il Teorema di Pitagora, la seconda per verificare il lavoro svolto e gli apprendimenti a fine percorso.

Questa sezione contiene le analisi *a priori* delle due macchine matematiche in relazione all'uso didattico che ne è stato fatto nella sperimentazione, in accordo con i riferimenti teorici per il laboratorio di matematica (questo tipo di analisi contribuisce all'analisi del potenziale semiotico dell'artefatto in oggetto).

Analisi a priori della prima macchina matematica

Questa macchina matematica¹ è costituita da una cornice quadrata di legno fissata a un piano di legno (Figura 1) e da quattro prismi uguali a base triangolare retta (che saranno chiamati nel

1 http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=162&Itemid=243&limitstart=1

seguito semplicemente ‘triangoli’). Sono disponibili sia triangoli rettangoli non isosceli (scelti per il lavoro degli allievi) che triangoli rettangoli isosceli. Una caratteristica importante, che lega cornice e triangoli, è che la somma dei cateti di un triangolo rettangolo è pari al lato del quadrato interno (come si vede nella Figura 1, al centro e a destra).



Figura 1. La macchina matematica e le due configurazioni (caso di triangoli rettangoli non isosceli)

I triangoli rettangoli possono essere sistemati all'interno della cornice nelle due configurazioni presenti nella Figura 1 (al centro e a destra). Dato che tali rettangoli non ricoprono la superficie interna alla cornice, si può passare da una configurazione all'altra facendoli scorrere all'interno della cornice. A seconda della configurazione, la superficie non coperta dai triangoli all'interno della cornice ha forma diversa: in un caso vi sono due “buchi” che corrispondono ai quadrati costruiti sui cateti, nell'altro caso vi è un solo “buco” di forma quadrata corrispondente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

In accordo con i riferimenti teorici, l'analisi *a priori* della macchina ha portato l'attenzione su:

- le possibili manipolazioni della macchina, in relazione ai significati matematici che tali manipolazioni possono evocare; questo ha messo in evidenza il ruolo fondamentale dell'azione di scivolamento dei triangoli all'interno della cornice al fine della conservazione della superficie totale, e quindi dell'area del “buco” nelle due configurazioni;
- la relazione tra componenti visibili e tangibili e quelle visibili ma non tangibili della macchina; questo ha suggerito un elemento di criticità nell'esplorazione della macchina. In effetti, essendo la macchina fatta tutta di legno, vi è poco contrasto tra oggetti e sfondo. Si è allora deciso di ricoprire il piano interno con un cartoncino rosso in modo da far risaltare i “buchi” quadrati rispetto al resto della macchina. In tal modo, anche il quadrato interno diventa un elemento visibile e tangibile;
- l'eventuale criticità nel legare la manipolazione dei triangoli con l'invarianza delle aree (o la loro somma) dei “buchi”.

Le consegne e i relativi compiti assegnati su questa macchina matematica sono:

- esplorazione collettiva della macchina (“come è fatta”);
- riproduzione, fedele rispetto alle misure, della macchina con il cartoncino a piccolo gruppo, in modo che ogni gruppo possa lavorare su un proprio modello ma con le caratteristiche metriche dell'originale.

Il secondo tipo di consegna forza il passaggio a un altro artefatto, o meglio alla realizzazione di un nuovo artefatto con materiale povero. Questo nuovo artefatto presenta alcuni vincoli diversi rispetto alla macchina matematica, che possono portare a una diversa manipolazione. Per esempio, non essendoci la cornice al quadrato di base, lo scivolamento della macchina matematica deve essere maggiormente controllato dagli allievi, così come le sovrapposizioni delle figure.

Rispetto alla struttura del ciclo didattico della Teoria della Mediazione Semiotica, il lavoro di gruppo con la macchina matematica (in legno o in cartoncino) si è articolato con un lavoro

individuale di riproduzione della macchina sul quaderno. La riproduzione della macchina è chiesta in due momenti diversi del percorso. Il primo compito, dato subito dopo la presentazione collettiva della macchina, ne richiede la riproduzione esatta su cartoncino: questo richiede agli allievi di riconoscere le figure da riprodurre e di misurarne le dimensioni. L'obiettivo è quello di avere la stessa riproduzione in ogni gruppo. Il secondo compito è dato individualmente e richiede la rappresentazione sul quaderno della macchina e delle relazioni tra i quadrati presenti. Una differenza rilevante tra questi compiti dipende dalla necessità di scegliere le dimensioni delle figure nel secondo compito, in quanto il supporto per la rappresentazione (cioè il quaderno) non permette una riproduzione in scala 1:1. In tal senso, non si tratta solo della riproduzione della macchina, ma degli elementi caratteristici che devono essere presi in considerazione. Nello specifico, si tratta di rappresentare la relazione, fortemente implicita nella macchina, tra la lunghezza del lato del quadrato interno e somma delle lunghezze dei due cateti.

Analisi a priori della seconda macchina

La seconda macchina matematica² (Figura 2) propone una dimostrazione del Teorema di Pitagora dovuta, sembra, a Leonardo da Vinci (Il Giardino di Archimede, 2001). È costituita da un pannello di legno in parte mobile nel quale è stato ricavato un foro esagonale; il foro è diviso in tre parti da due elastici, due triangoli rettangoli congruenti e un quadrato; è presente una manovella girevole ancorata al pannello mobile: ruotando la manovella (a sinistra della macchina) si gira il pannello mobile, gli elastici si incrociano e il foro cambia forma e viene suddiviso in due triangoli rettangoli e due quadrati. Essa presenta due configurazioni: nella prima (Figura 2, a sinistra) sono presenti due triangoli rettangoli congruenti e un quadrato costruito sulla loro ipotenusa; nella seconda (Figura 2, a destra) sono presenti due triangoli rettangoli congruenti a quelli della prima configurazione e due quadrati di dimensioni diverse costruiti sui cateti. Girando la manovella, si passa da una configurazione all'altra.

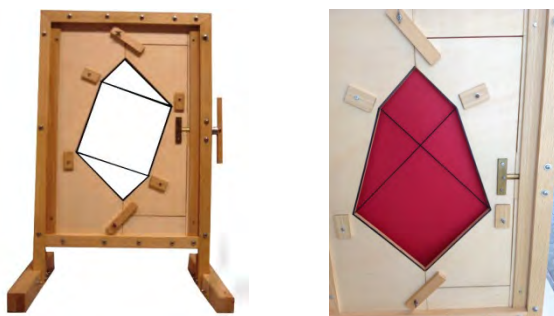


Figura 2. La macchina matematica nelle due configurazioni

Questa macchina è portata in classe nell'ultima fase del percorso. L'obiettivo è quello di verificare se gli allievi vi riconoscono gli elementi del Teorema di Pitagora. Non si chiede la dimostrazione su cui si basa il funzionamento della macchina, ma sono maggiormente sollecitati processi di produzione di congetture e argomentazioni sulla matematica mostrata dalla macchina. In tal senso, i triangoli rettangoli e i quadrati possono essere individuati con le squadre, così come le uguaglianze tra i segmenti presenti nelle configurazioni. Come per la prima macchina, per sostenere l'analisi della forma del foro, lo si è "riempito" con cartoncino rosso (Figura 2, a destra).

Oltre al lavoro collettivo, viene chiesta una descrizione individuale della macchina a ogni allievo con l'obiettivo di costruire un cartellone da appendere in aula.

2 http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&id=162&Itemid=243

Le diverse fasi del percorso didattico

Il percorso si è svolto nell'arco di circa tre mesi, da inizio marzo a fine maggio dell'anno scolastico 2012-2013, in due classi seconde dell'Istituto Comprensivo "Marconi" di Castelfranco Emilia (MO). Esso è costituito da nove fasi, riassunte qui di seguito, che costituiscono più cicli didattici.

Fase 1. Dopo aver trattato le radici quadrate in aritmetica, l'area delle figure piane e l'equiscomponibilità in geometria, è stata portata in classe la prima macchina matematica; gli alunni l'hanno prima esplorata collettivamente e poi riprodotta su cartoncino lavorando a gruppi di quattro; durante questa fase hanno anche dovuto completare una scheda fornita dall'insegnante.

Fase 2. Gli alunni, guidati dall'insegnante, hanno manipolato la macchina per arrivare alla formalizzazione del Teorema di Pitagora, passando dal linguaggio naturale a quello formale dell'enunciato per poi giungere a quello simbolico.

Fase 3. Questa fase ha portato alla generalizzazione del Teorema di Pitagora a tutti i triangoli rettangoli tramite l'analisi del caso particolare dei triangoli rettangoli isosceli e tramite rappresentazione della macchina su carta quadrettata.

Fase 4. Individualmente come compito a casa, gli alunni hanno prodotto una descrizione della macchina e inviata all'insegnante sulla classe virtuale Edmodo. Per concludere l'analisi della prima macchina è stato realizzato dagli alunni un poster, per il quale hanno utilizzato le riproduzioni di cartoncino precedentemente costruite.

Fase 5. Si sono presentate la controversa e leggendaria figura di Pitagora, la scuola dei pitagorici, si è parlato di Euclide e degli *Elementi* e sono state introdotte le terne pitagoriche, sottolineando come fossero già conosciute dai popoli antichi.

Fase 6. Ci si è dedicati alla risoluzione di problemi legati alla vita quotidiana, per far crescere negli alunni la percezione della matematica come una disciplina per risolvere situazioni autentiche e significative (Indicazioni Nazionali per il curriculum, 2012).

Fase 7. Per arrivare all'estensione del Teorema ad altre figure geometriche, oltre che ai quadrati, nella settima fase è stata proposta agli alunni una sfida che prevedeva la composizione di puzzles, ispirata da un'attività presentata sul sito del Giardino di Archimede³ (2001).

Fase 8. Con lo scopo di verificare gli apprendimenti si è presentata agli alunni la seconda macchina matematica, che è stata prima esplorata collettivamente, poi riprodotta su cartoncino.

Fase 9. Si è chiesto di descrivere individualmente la macchina agli alunni in classe. Le descrizioni dei singoli alunni sono poi state condivise e quella più puntuale e accurata è stata utilizzata per produrre un poster.

Analisi della sperimentazione

In questa sezione, saranno analizzate solo le fasi del percorso che caratterizzano il lavoro con le macchine matematiche.

Fase 1. Esplorazione della prima macchina

La classe è stata divisa in sei gruppi da quattro alunni ciascuno ed è stato assegnato a ogni componente di ciascun gruppo un numero da 1 a 4. Si è deciso di formare gruppi che non fossero troppo eterogenei tra di loro, per evitare che ci fosse eccessiva distanza cognitiva tra i componenti; i rischi sarebbero stati sia che il "più bravo" prevalesse sugli altri sia che il "meno bravo" si sentisse inadeguato. Sono stati poi assegnati diversi ruoli all'interno di ogni gruppo per far sì che tutti si sentissero coinvolti e collaborassero. A questo punto è iniziata l'esplorazione collettiva della macchina.

3 <http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/pitagora/primapagina.php>

Prima di tutto l'insegnante ha mostrato i vari pezzi, la base e i quattro triangoli rettangoli (Figura 1, a sinistra), poi ha chiesto agli allievi di riprodurre la macchina con cartoncino: la base quadrata con cartoncino rosso e i quattro triangoli rettangoli con cartoncino bianco.

Mentre i numeri 1 di ogni gruppo, a turno, misuravano con la riga o la squadra le componenti della macchina, i numeri 2 dovevano assisterli e trascrivere le misure; i numeri 3 e 4 dovevano nel frattempo compilare una scheda riassuntiva sulle proprietà dei quadrati e dei triangoli rettangoli. La compilazione della scheda aveva la duplice funzione di tenere occupati tutti i componenti del gruppo e di "rinfrescare" proprietà geometriche utili per le fasi successive. Terminata questa prima parte, i gruppi hanno iniziato a riprodurre la macchina con il cartoncino. Anche in questo caso l'insegnante ha suddiviso i compiti in modo preciso: i numeri 1 e 2 dovevano disegnare e ritagliare la base quadrata rossa, mentre i numeri 3 e 4 i quattro triangoli rettangoli congruenti. In questa parte apparentemente banale, gli alunni hanno dovuto mettere in atto abilità e strategie di diverso tipo, come costruire un quadrato senza il foglio quadrettato e riuscire a ricavare i quattro triangoli rettangoli con un pezzo di cartoncino di dimensioni limitate.



Figura 3. La riproduzione della macchina e il nuovo artefatto

Una volta terminata la riproduzione della macchina (costruzione di un nuovo artefatto, Figura 3), l'insegnante ha chiesto agli alunni di trovare tutte le possibili configurazioni nelle quali, disponendo i quattro triangoli rettangoli sulla base senza sovrapporli, si formassero dei quadrati rossi. La scelta del cartoncino colorato come sfondo ha permesso di formulare la consegna in tali termini.

Dopo qualche tentativo, tutti i gruppi sono giunti alle due configurazioni. Nella condivisione del risultato dell'esplorazione, sono state introdotte le espressioni linguistiche che hanno poi caratterizzato la formulazione del Teorema. Infatti, nella prima configurazione si forma un unico quadrato, che è stato chiamato quadrato grande (Q_G), mentre nella seconda si formano due quadrati, uno medio e uno piccolo, che sono stati chiamati rispettivamente quadrato medio (Q_M) e quadrato piccolo (Q_P). Una parte importante della discussione è dedicata all'argomentare che i "quadrati rossi" fossero veramente dei quadrati. Gli allievi sono stati così stimolati a mettere in gioco le conoscenze sulle proprietà dei quadrati e dei triangoli rettangoli che avevano ripassato compilando le schede fornite all'inizio. Inizialmente, hanno utilizzato la riga per misurare i lati con il fine di verificarne la congruenza, poi, sempre stimolati dall'insegnante, hanno argomentato che tutti i lati sono congruenti all'ipotenusa dei triangoli rettangoli. L'insegnante ha poi portato l'attenzione sugli angoli interni. Anche in questo caso gli alunni hanno iniziato con una dimostrazione empirica per confronto con l'angolo retto della squadra; solo alcuni alunni sono riusciti a dimostrare che gli angoli dei quadrati sono retti per differenza tra un angolo di 180° e angoli complementari (*"l'angolo di Q_G è retto perché si ottiene togliendo dall'angolo piatto i due angoli acuti del triangolo rettangolo, che sono complementari"*).

Fase 2. Formalizzazione del Teorema di Pitagora

Una volta appurato che i quadrati che si formano fossero veramente dei quadrati, l'insegnante ha chiesto ai ragazzi di provare a passare dalla prima configurazione alla seconda e viceversa. L'obiettivo era che si evidenziasse l'equivalenza tra il quadrato grande e la somma dei quadrati medio e piccolo. Gli alunni hanno giocato un po' con la macchina, e esposto liberamente le loro riflessioni, ma non è emersa alcuna relazione tra la manipolazione fisica della macchina e l'invarianza delle aree rosse. Durante l'analisi *a priori* della macchina era stato previsto che questa potesse rappresentare un momento di stallo, quindi si era deciso di provare a guidare i ragazzi in questo delicato passaggio tramite la scrittura alla lavagna (Figura 4) di tutti gli elementi che comparivano nelle due configurazioni, per fissare ciò che inevitabilmente scompariva passando da una configurazione all'altra e ciò che invece si conservava. Questa strategia didattica si è rivelata molto efficace in quanto gli alunni, vedendo fissati alla lavagna tutti gli elementi di entrambe le configurazioni, hanno capito che il quadrato grande è uguale alla somma dei quadrati medio e piccolo.

CONFIGURAZIONE 1:	4 triangoli e Q_G
CONFIGURAZIONE 2:	4 triangoli, Q_M e Q_P
Allora:	
BASE =	4 triangoli + Q_G
BASE =	4 triangoli + Q_M + Q_P

Figura 4. Relazioni scritte alla lavagna

È a questo punto che gli alunni hanno osservato “allora il quadrato grande è uguale alla somma di quelli medio e piccolo”: $Q_G = Q_M + Q_P$. Si è lasciato che passassero da una configurazione all'altra affinché tutti si convincessero della nuova scoperta, poi l'insegnante ha chiesto di definire il valore dell'area del quadrato grande, di quella del quadrato medio e di quella del quadrato piccolo in relazione ai lati dei triangoli rettangoli. Si è quindi arrivati alla formulazione classica del Teorema e alla scrittura simbolica.

C'è stato quindi un graduale evolversi della formalizzazione che inizialmente è stata fatta con un linguaggio naturale (il quadrato grande è uguale alla somma dei quadrati medio e piccolo), poi si è passati a un linguaggio geometrico (il quadrato che ha per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati che hanno per lati i cateti) per poi passare infine a un linguaggio simbolico ($i^2 = C^2 + c^2$)

Fase 3. Riproduzione su carta a quadretti

A questo punto del percorso è stato chiesto agli alunni di rappresentare individualmente la macchina nelle due configurazioni su carta quadrettata, con dimensioni a piacere (figura 5). Questa fase si è rivelata interessante in quanto ha fatto emergere una caratteristica implicita della macchina che sarebbe probabilmente rimasta oscura per molti alunni, in accordo con l'analisi *a priori*. È infatti emerso che per alcuni non era chiara l'invarianza tra somma dei cateti del triangolo rettangolo e lato della base quadrata: hanno dovuto fare diversi tentativi prima di riuscire a rappresentare la macchina in modo corretto. Questo lavoro ha inoltre confermato che, qualunque sia la base, il quadrato grande è equivalente alla somma dei quadrati medio e piccolo.

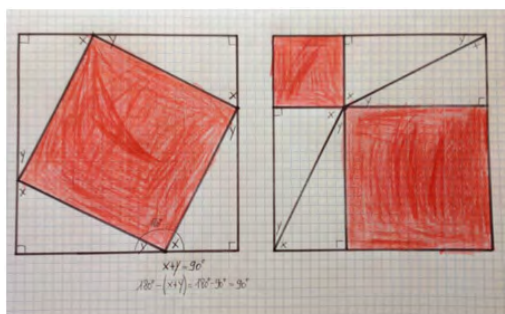


Figura 5. La macchina rappresentata sul quaderno

Fase 8. Esplorazione della seconda macchina

Questa macchina è stata portata in classe senza dare alcuna informazione sul suo significato e il suo funzionamento. È stato chiesto agli alunni di esplorarla collettivamente e poi di riprodurla, a gruppi, mantenendo le dimensioni su cartoncino rosso (i quadrati) e bianco (i triangoli rettangoli). Gli alunni hanno misurato con riga e squadra i lati delle figure e hanno confrontato l'angolo retto della squadra con quello dei triangoli e dei quadrati.



Figura 6. Esplorazione della seconda macchina matematica

In accordo con l'analisi *a priori*, non è stata chiesta alcuna giustificazione/dimostrazione riguardo alla congruenza dei lati e angoli nei quadrati, sia perché sarebbe stato un obiettivo troppo alto con una macchina dove ci sono anche oggetti (gli elastici) che cambiano lunghezza nelle due configurazioni, sia perché il significato di questa attività era volutamente diverso rispetto a quella precedente. Come già anticipato, lo scopo era infatti quello di verificare gli apprendimenti, cioè se gli alunni fossero in grado di riconoscere nella macchina gli elementi del Teorema di Pitagora. Per raggiungere questo obiettivo, gli alunni dovevano essere in grado di riconoscere forme (triangoli rettangoli e quadrati) e relazioni (il quadrato della prima configurazione ha per lato l'ipotenusa dei triangoli rettangoli e i due quadrati della seconda configurazione hanno per lati rispettivamente il cateto maggiore e quello minore del triangolo rettangolo, l'invarianza del foro esagonale, la congruenza tra i triangoli rettangoli della prima configurazione e quelli della seconda). In entrambe le classi gli alunni hanno riconosciuto le forme e le relazioni e, non appena hanno girato la manovella per passare dalla prima alla seconda configurazione, hanno capito che la funzione della macchina era quella di mostrare il Teorema di Pitagora.

Fase 9. La descrizione della seconda macchina

Nell'ultima fase del percorso l'insegnante ha chiesto agli alunni di costruire un poster che presentasse la macchina nelle due configurazioni, utilizzando le riproduzioni fatte in gruppo con il cartoncino. Per consolidare quanto appreso, si è chiesto ai ragazzi di descrivere individualmente, in classe, la seconda macchina, motivandoli con la prospettiva di pubblicare sul poster la descrizione più completa e puntuale. Dopo aver condiviso e commentato collettivamente tutte le descrizioni, si è deciso di utilizzare le parti meglio fatte di alcune di esse. La prospettiva di vedere la propria descrizione sul poster ha rappresentato una forte motivazione che ha spinto gli alunni a impegnarsi maggiormente rispetto a quello che avevano fatto nella descrizione della prima macchina.

Completiamo l'analisi del lavoro con le macchine matematiche riportando alcuni elaborati degli allievi relativi ai compiti di descrizione delle macchine (compito a casa il primo, svolgimento in classe il secondo).

Fase 4. Produzioni individuali sulla macchina

Sono qui riportati alcuni esempi di produzioni individuali degli alunni sulla prima macchina.

S. (2^A): *“La macchina matematica è una base di legno con quattro triangoli rettangoli e quattro isosceli. Noi dovevamo formare dei quadrati con quei triangoli appoggiandoli sulla base quadrata, la prima figura l'abbiamo trovato spostando i cateti maggiori dei triangoli nei angoli del quadrato trovando un quadrato. Per dimostrare che è un quadrato bisogna fare: la somma degli angoli interni quindi $360-180=180$ meno l'angolo retto che fa 90 e visto che sono quattro è equiangolo. Nella seconda figura abbiamo trovato due quadrati uno che l'abbiamo chiamato quadrato medio e l'altro quadrato piccolo, poi abbiamo capito che l'area del quadrato piccolo e di quello medio è uguale a quella del quadrato grande trovando il teorema di Pitagora che era cateto maggiore alla seconda più cateto minore alla seconda che è uguale a ipotenusa alla seconda. Pitagora era un filosofo greco.”*

M.C. (2^E): *“Come prima cosa la prof. ci ha mostrato la macchina matematica con la quale dovevamo lavorare ricostruendola. Il secondo passaggio consisteva nel dividerci in gruppi e prendendo le misure dovevamo riprodurre la macchina matematica mostrataci in precedenza; abbiamo quindi creato un quadrato rosso che sarebbe stata la nostra base e quattro triangoli bianchi.*

Dopo la prof. poi ci ha spiegato l'attività successiva:

1. *dovevamo disporre i triangoli rettangoli in modo da ricavare dei quadrati rossi;*
2. *provare a fare più configurazioni possibili;*
3. *dimostrare che fossero quadrati e spiegare il ragionamento fatto alla classe.*

Alla fine siamo riusciti a trovare due configurazioni, formando un quadrato grande nella prima e due quadrati, uno medio(m) e uno piccolo(p), nella seconda.

Trovati i tre quadrati, la prof. ci ha spiegato il motivo di questo laboratorio: farci ragionare sul teorema di Pitagora. E siamo arrivati a queste formule:

$$A_{base}=A_4 \text{ triangoli}+A_g$$

$$A_{base}=A_4 \text{ triangoli}+A_p+A_m$$

$$A_g=A_p+A_m$$

$$i^2=C^2+c^2 \quad \mathbf{C^2=i^2-c^2} \quad c^2=i^2-C^2$$

Con queste formule si può trovare il terzo lato quando ne conosciamo già due.”

Queste due presentazioni mettono in evidenza elementi del lavoro svolto con la macchina matematica ed espressioni diverse del Teorema di Pitagora. Per esempio, nel primo protocollo

non compaiono le formule associate al Teorema, che risulta enunciato nel registro linguistico. Mentre lo stesso protocollo presenta l'argomentazione sui quadrati rossi, a indicare come tale processo sia stato rilevante nella prima fase.

Fase 9. Produzioni individuali sulla macchina

Sono qui riportati alcuni esempi di produzioni individuali degli alunni sulla seconda macchina.

R.F. (2^AE): *“La macchina matematica, nata per dimostrare il teorema di Pitagora, è stata costruita seguendo fedelmente i progetti del grande genio rinascimentale Leonardo da Vinci. E’ costituita da un pannello di legno composto da una parte fissa e una parte mobile, una manovella e un foro di forma esagonale, diviso in due triangoli rettangoli e un quadrato da due elastici. Il quadrato è costruito sulle ipotenuse dei triangoli e rappresenta quello che noi abbiamo chiamato quadrato grande. Girando una manovella abbiamo ottenuto una seconda configurazione e al posto del quadrato costruito sulle ipotenuse, si sono formati due quadrati più piccoli che rappresentano quelli che noi abbiamo chiamato quadrato medio e quadrato piccolo. Questa macchina matematica dimostra che l’area del quadrato costruito sull’ipotenusa (quadrato grande) è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti (quadrato medio e quadrato piccolo)”.*

S.M. (2^AE): *“Questa macchina matematica in legno e ferro presenta al centro un buco esagonale, diviso in due triangoli rettangoli agli estremi e un quadrato al centro, grazie a due elastici. Il quadrato è costruito sulle ipotenuse dei triangoli e rappresenta quello che noi abbiamo chiamato quadrato grande. A lato c’è una manovella che una volta girata, spostando solo la parte sinistra, fa incrociare i due elastici formando una figura diversa ma con la stessa area. La nuova figura, formata dagli stessi triangoli rettangoli e da due quadrati di diverse misure, mostra i due quadrati costruiti sui cateti, uno sui cateti minori dei due triangoli e uno sui cateti maggiori, che abbiamo chiamato quadrato medio e quadrato piccolo. In definitiva questa macchina mostra che il quadrato costruito sull’ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.”*

Questi due protocolli, provenienti da allievi di due classi diverse, presentano una struttura che riprende il lavoro svolto con la seconda macchina matematica: descrizione dell’artefatto (“come è fatta”), come funziona e cosa produce l’azione su di essa, e poi che cosa mostra. Gli studenti sono precisi in questa loro descrizione, anche se il Teorema di Pitagora non è esplicitamente nominato.

Conclusioni

In questo articolo è stata analizzata una sperimentazione didattica di laboratorio sul Teorema di Pitagora svolta in due classi seconde di scuola secondaria di I grado, nella quale sono state utilizzate due macchine matematiche. La prima macchina è servita per introdurre il Teorema e condurre gli alunni alla sua formalizzazione prima con linguaggio naturale, poi con linguaggio più specificatamente geometrico e infine con linguaggio simbolico. La seconda macchina ha permesso invece di verificare gli apprendimenti e quindi se gli alunni vi riconoscevano gli elementi del Teorema e le analogie con la prima macchina. Prima di presentare le macchine agli alunni si è resa necessaria un’analisi a priori delle macchine, che ha permesso di prevedere eventuali punti critici e programmare strategie didattiche che si sono rivelate fondamentali per superare criticità come il passaggio dalla fase manipolativa, dove ci sono oggetti che compaiono e scompaiono passando da una configurazione all’altra, alla fase di formalizzazione. L’utilizzo di cartoncino rosso ha permesso di far emergere i quadrati rossi e di utilizzare un registro linguistico facilmente comprensibile. La rappresentazione della prima macchina su carta quadrettata ha permesso di evidenziare una caratteristica implicita della macchina che non era stata colta da molti alunni.

Il laboratorio di matematica con le macchine è un’attività che richiede un’accurata fase di

progettazione e un'attenta analisi a priori delle macchine, ma sicuramente il percorso fatto con le manipolazioni, le riproduzioni, le rappresentazioni, le congetture e le argomentazioni, il riconoscimento delle analogie tra le due macchine, ha contribuito a far sì che gli alunni costruissero in modo significativo alcuni concetti matematici importanti.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'Associazione Macchine Matematiche per il materiale fornito.

Bibliografia

- AA.VV. UMI (2004). In G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, & O. Robutti (Eds.). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di Matematica (Ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni stampatore.
- Barbieri, S. & Maschietto, M. (2012). Attività nel laboratorio di matematica: costruzioni con riga e compasso. In O. Robutti e M. Mosca (a cura di) *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DI.FI.MA.2011*, (pp. 181-191). Torino: Kim Williams Books.
- Bartolini Bussi, M.G. (2010). Quadro di riferimento. In USR E-R, ANSAS e IRRE E-R, Regione Emilia-Romagna, F. Martignone (ed.), *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna, vol. 2*, 40-55. Napoli: Tecnodid Editrice.
- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M.A. (2009). Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 32 A-B, N.3, 269-294.
- Bartolini Bussi, M. G. & Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana UMI Convergenze, Milano: Springer.
- Bettini, G., Facchetti, C. & Maschietto, M. (2012). *Costruzione di significati nel laboratorio di matematica: attività con la macchina matematica per la simmetria assiale*. In O. Robutti e M. Mosca (a cura di) *Atti del V Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e delle Matematica DI.FI.MA. 2011*, (pp. 193-204). Torino: Kim Williams Books.
- Cerulli, M., Pedemonte, B. & Robotti, E. (2007). Funzionalità Didattiche: uno strumento operativo per progettare ed analizzare esperienze di laboratorio. In R. Garuti, A. Orlandoni e R. Ricci (eds.), *Il laboratorio scientifico-matematico: suggerimenti ed esperienze, Innovazione Educativa*, Anno 2, Inserto allegato al n. 8 - Ottobre 2007, 32-37.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.
- Il Giardino di Archimede (2001). *Pitagora e il suo teorema*. Firenze: Edizioni Polistampa.