

*Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia*

*Scuola di Dottorato di Ricerca*

Dottorato di Ricerca in Matematica

Strutture di incidenza finite con blocchi di forma assegnata

Settore Scientifico-Disciplinare MAT/03

Coordinatore del Dottorato:  
Ch.mo Prof. Cristian Giardiná

Tutor:  
Prof. Arrigo Bonisoli

Dottorando:  
Fericola Franco

Anno Accademico 2018-19 — Ciclo XXXII



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iv</b>
<b>1 Concetti fondamentali sui grafi</b>	<b>1</b>
1.1 Definizioni preliminari . . . . .	1
1.2 Nozione di decomposizione di un grafo semplice . . . . .	8
<b>2 H-Disegni</b>	<b>12</b>
2.1 Il problema della decomposizione del Grafo Completo $\mathbf{K}_v$ . . . . .	12
<b>3 Decomposizioni del Grafo Completo <math>\mathbf{K}_v</math> basate su gruppi ciclici</b>	<b>14</b>
3.1 Nozioni preliminari e distanza in $\mathbb{Z}_m$ . . . . .	14
3.2 Il grafo completo $\mathbf{K}_v$ e il gruppo $(\mathbb{Z}_v, +)$ . . . . .	16
3.3 Classi di rappresentanza delle distanze in $\mathbb{Z}_m$ . . . . .	19
3.4 Generatori di uno spigolo del <i>Grafo Completo</i> $\mathbf{K}_v$ . . . . .	20
<b>4 <math>L_7</math>-decomposizioni di <math>\mathbf{K}_v</math></b>	<b>22</b>
4.1 Primo passo sulla decomposizione del Grafo Completo $\mathbf{K}_v$ mediante il Longhorn $L_7$ . . . . .	22
4.2 Condizioni necessarie per l'esistenza di una decomposizione . . . . .	24
4.2.1 Problemi sulla decomposizione di $\mathbf{K}_v$ con $v = 7h + 1$ e $h \geq 1$ dispari	29
4.3 Esistenza di $L_7$ -disegni di ordine $v = 2^{3s}$ con $s \geq 1$ . . . . .	31
4.3.1 Grafo multipartito $K_{m \times n}$ e sua decomposizione . . . . .	31
4.3.2 Un $L_7$ -disegno di ordine 64 . . . . .	32
4.3.3 Un $L_7$ -disegno di ordine $v = 2^{3s}$ con $s \geq 2$ . . . . .	32
4.4 Decomposizione del Grafo Completo mediante il Longhorn $L_7$ . . . . .	34
4.4.1 <b>Decomposizione con <math>v = 7h</math> e <math>h \geq 1</math> dispari</b> . . . . .	<b>34</b>

4.4.2	<b>Decomposizione con <math>v = 7h</math> e <math>h \geq 2</math> pari</b> . . . . .	40
4.4.3	<b>Decomposizione con <math>v = 22 + 28h</math> con <math>h \geq 0</math> (Classe A)</b> . .	45
4.4.4	<b>Decomposizione con <math>v = 8 + 28h</math> con <math>h \geq 1</math> dispari (Classe B)</b> . . . . .	48
4.4.5	<b>Decomposizione con <math>v = 7h + 1</math> e <math>h \geq 2</math> pari</b> . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Proprietà di bilanciamento e gruppi di automorfismi</b>	<b>56</b>
5.1	Bilanciamento . . . . .	56
5.2	Automorfismi . . . . .	60
<b>6</b>	<b>Ulteriori decomposizioni di <math>K_v</math></b>	<b>61</b>
6.1	Longhorn doppio corno . . . . .	62
6.1.1	Decomposizione Longhorn doppio corno con $v = 7h$ e $h \geq 1$ dispari	62
6.1.2	Decomposizione Longhorn doppio corno con $v = 7h$ e $h \geq 2$ pari	63
6.1.3	Decomposizione Longhorn doppio corno con $v = 7h + 1$ e $h \geq 2$ pari . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Applicazione dei risultati sviluppati per una <math>L_5</math>-decomposizione di <math>K_v</math></b>	<b>64</b>
7.1	Condizioni necessarie per l'esistenza di una decomposizione . . . . .	64
7.2	Decomposizione del Grafo Completo mediante il BULL . . . . .	66
7.2.1	<b>Decomposizione con <math>v = 5h</math> e <math>h \geq 2</math> pari</b> . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Sul Longhorn Generalizzato <math>L_{3+2k}</math></b>	<b>71</b>
8.1	Condizioni necessarie per l'esistenza di una decomposizione . . . . .	72
8.2	Decomposizione del Grafo Completo mediante il Longhorn Generalizzato	77
8.2.1	<b>Decomposizione con <math>v = (3 + 2k)h</math> e <math>h \geq 1</math> dispari</b> . . . . .	77
	<b>Bibliografia</b>	<b>81</b>

# Introduzione

Vi sono molte situazioni reali in cui l'informazione essenziale si riduce alla conoscenza di alcune entità (in numero finito) omogenee tra loro e dei collegamenti tra le stesse. Due entità possono essere collegate o possono non esserlo e ciò è tutto quello che conta. Queste situazioni vengono opportunamente schematizzate tramite il concetto di *grafo*. Le entità che ci interessano sono i *nod*i o *vertici* del grafo mentre i collegamenti sono gli *spigoli* o *lati* del grafo. Gli esempi seguenti sono tipici casi in cui il concetto di grafo viene impiegato in modo del tutto naturale. Nella figura in basso una cartina che ritrae parte della rete metropolitana di Londra.



Figura 0.0.1: Mappa Metro di Londra

Tra la stazione di *Oxford Circus* e la stazione di *Leicester Square* non c'è un collegamento diretto, mentre lo stesso esiste tra la stazione di *Leicester Square* e la stazione di *Holborn*. Nel secondo caso i vertici corrispondenti sono *adiacenti*, nel primo non lo sono.

Il secondo esempio può essere fatto prendendo spunto dai *Social Network*; nella figura seguente sono rappresentate le interazioni su *Twitter* in un gruppo di amici.

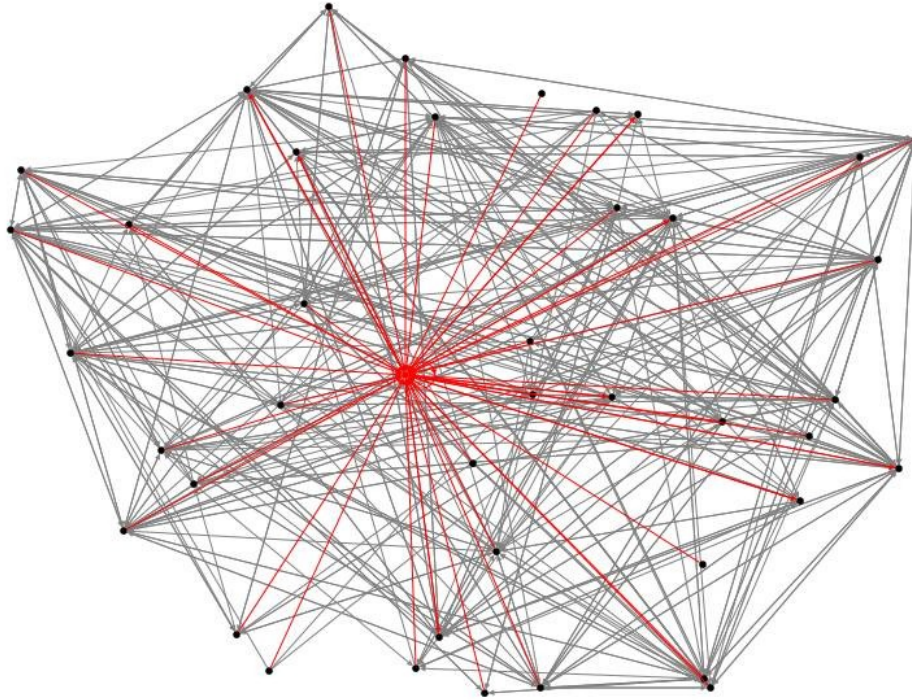


Figura 0.0.2: Relazioni su Twitter

I *Nodi* in nero rappresentano gli utenti e le interazioni che avvengono tra di essi sono rappresentate da *Spigoli*. In particolare in rosso si evidenziano le azioni di un utente con gli altri della rete; con l'interpretazione data poco prima sembra quello più attivo nel gruppo di amici.

In questo lavoro di tesi alcuni concetti fondamentali della *Teoria dei Grafi* servono per formulare un problema di decomposizione che viene poi studiato in dettaglio; si tratta di decomporre il *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_v$  rispetto ad un opportuno *Grafo*  $H$ . Volendo collocare il problema nel giusto contesto conviene partire dall'ambito geometrico delle strutture d'incidenza [15]. Nella sua accezione più generale una struttura d'incidenza non è altro che un insieme  $\mathcal{P}$ , i cui elementi vengono generalmente chiamati punti accanto al quale è stata selezionata una famiglia  $\mathcal{B}$  di sottoinsiemi speciali di  $\mathcal{P}$ .

I sottoinsiemi privilegiati, cioè gli elementi della famiglia  $\mathcal{B}$ , vengono chiamati con nomi che nascono di volta in volta dalla particolare situazione geometrica considerata. In molti casi si parla di *rette*, ma naturalmente si può essere interessati a considerare le relazioni di incidenza tra punti e piani, oppure tra punti e sottospazi di una fissata dimensione  $d$ . Dal punto di vista della geometria d'incidenza le proprietà rilevanti sono solo quelle che derivano dai relativi assiomi. Quindi, ad esempio, se vale l'assioma che afferma che per due punti distinti esiste uno e uno solo elemento di  $\mathcal{B}$  che li contenga entrambi, allora a buon titolo i membri della famiglia  $\mathcal{B}$  si possono chiamare *rette*. La proposizione "*Per due punti passa una e una sola retta*" è il prototipo degli assiomi d'incidenza fin dai tempi di Euclide. Le strutture d'incidenza nelle quali questo assioma è universalmente valido vengono pertanto chiamati *spazi di rette* [20] o *spazi lineari* [6].

L'interesse per l'eventuale struttura di una retta può concretizzarsi anche solo in un secondo tempo, spesso sulla base di considerazioni diverse da quelle meramente d'incidenza, per esempio proprietà di ordinamento o proprietà topologiche. Così ad esempio nella trattazione della geometria proiettiva reale viene evidenziato che una retta proiettiva reale è assimilabile a un cerchio [21, §25]. Ci sono naturalmente mille variazioni sul tema. Per esempio, volendo rimanere nell'ambito dei cerchi, se l'assioma d'incidenza principale viene sostituito con la richiesta che per tre punti distinti passa un unico elemento della famiglia  $\mathcal{B}$ , si ottengono delle strutture d'incidenza che vengono appunto chiamate "*geometrie di cerchi*" ("*Circle Geometries*" o "*Kreisgeometrien*") [7].

Nell'ambito delle Geometrie Combinatorie l'insieme dei punti  $\mathcal{P}$  è un insieme finito e quindi a sua volta  $\mathcal{B}$  è una lista finita di insiemi finiti di punti. In questo contesto, specialmente dopo i contributi degli statistici britannici R.A. Fisher e F. Yates negli anni 1930-40, ha preso piede l'abitudine di chiamare "*blocchi*" gli elementi della famiglia  $\mathcal{B}$  e di chiamare "*disegno a blocchi*" ("*block-design*") la struttura d'incidenza nel suo complesso: gli autori citati hanno posto le basi per l'uso di queste strutture nella progettazione di esperimenti, si veda [4]. In ambito geometrico queste strutture erano emerse molto prima, con particolare riferimento al caso in cui tutti i blocchi hanno la stessa cardinalità, generalmente indicata con  $k$ . Forse il caso più noto è  $k = 3$ , studiato da T.P. Kirkman e da J. Steiner già verso la metà del diciannovesimo secolo [4], si parla appunto di "*sistemi di terne di Steiner*". In generale possiamo definire un sistema di Steiner con

parametri  $k$  e  $v$  come una struttura d'incidenza  $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$  in cui l'insieme  $\mathcal{P}$  dei punti ha cardinalità  $v$ , ciascun blocco ha cardinalità  $k$  e comunque scelti due punti distinti esiste un unico blocco che li contiene entrambi. Si parla anche di un  $2 - (v, k, 1)$  disegno, [22, §19]. Volendo rimanere in un ambito strettamente combinatorio, ma prendendo in considerazione l'eventualità che un blocco possa essere dotato di qualche struttura ulteriore rispetto a quella meramente insiemistica, si può partire dalla considerazione che un insieme privo di struttura si può sempre considerare come un grafo che stia agli estremi della catena relazionale, cioè un grafo totalmente privo di collegamenti (*grafo nullo* o, come più spesso si dice, *totalmente sconnesso*) ovvero un grafo in cui siano presenti tutti i collegamenti che si possano concepire (un *grafo completo* o *universale*, cioè un grafo in cui due vertici sono sempre adiacenti). Adottiamo il secondo punto di vista e pensiamo ai blocchi di una struttura d'incidenza come a dei grafi completi. Se anche l'insieme totale dei punti viene visto in modo del tutto naturale come un grafo completo, allora è chiaro che la richiesta che per due punti passi uno e un sol blocco equivale ad ammettere che ogni spigolo del *grafo completo*, che collega due punti assegnati, si ritrova come spigolo in uno e un solo "*sottografo completo*" che rappresenta un blocco della struttura d'incidenza. Ecco quindi che questo punto di vista ci colloca senza sforzo nell'ambito delle decomposizioni dei grafi. Il concetto di decomposizione di un grafo è estremamente generale: una qualunque partizione dell'insieme degli spigoli dà sostanzialmente luogo a una decomposizione, utilizzando a tale scopo i sottografi indotti da ciascuna classe di spigoli nella partizione. Evidentemente i sottografi che compaiono nella decomposizione possono risultare molto diversi in quanto grafi, cioè non isomorfi. Quindi appare del tutto plausibile che i problemi di decomposizione per i grafi diventino interessanti quando si imponga qualche condizione aggiuntiva e si possono facilmente immaginare condizioni di vario genere per una decomposizione.

Quella che maggiormente interessa questa tesi può essere descritta come una condizione di uniformità sui sottografi della decomposizione, cioè la richiesta che siano tutti lo "stesso grafo", più precisamente che siano a due a due isomorfi. Si parla dunque di  $H$ -decomposizione per indicare che ciascun sottografo della decomposizione è isomorfo a un assegnato grafo  $H$ . Se l'insieme di tutti i punti (il grafo "universale" come l'abbiamo chiamato precedentemente) ha cardinalità  $v$ , allora stiamo parlando di una  $H$ -decomposizione del grafo completo  $\mathbf{K}_v$ , che in seguito chiameremo un  $H$ -disegno di

ordine  $v$ . Ripercorrendo dunque il percorso che ha portato a questa nozione, stiamo ripartendo gli spigoli del grafo completo  $\mathbf{K}_v$  in sottografi tutti isomorfi a un assegnato grafo  $H$  che formano i blocchi della decomposizione ovvero del  $H$ -disegno. Uno spigolo è identificato dalla coppia di vertici che lo incidono e stiamo richiedendo che tale spigolo si ritrovi in un unico sottografo della  $H$ -decomposizione, cioè in un unico blocco del  $H$ -disegno. Ritroviamo dunque in un'altra formulazione il postulato fondamentale "*Per due punti distinti passa uno e un sol blocco*". Possiamo quindi concludere che questa struttura d'incidenza si comporta come le strutture della geometria classica, con la peculiarità che ciascun blocco ha una forma prestabilita, precisamente la forma dettata dal grafo  $H$ . Naturalmente si aprono qui tutte le problematiche tipiche della geometria combinatoria. La più nota, non fosse altro per il fatto che a distanza di molti decenni dà luogo a congetture ancora molto aperte, è quella della determinazione dello spettro di esistenza. Nella situazione appena descritta, tale problema si pone per un qualunque grafo assegnato  $H$ : quali sono i valori di  $v$  per i quali esiste una  $H$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_v$ , cioè quali sono i valori di  $v$  per i quali esiste un disegno a blocchi d'ordine  $v$  in cui ciascun blocco abbia la "*forma*" del grafo  $H$ ?

Quando il grafo  $H$  ha la forma di un triangolo ritroviamo esattamente il problema della determinazione dello spettro di esistenza per i sistemi di terne di Steiner, risolto da T.P. Kirkman nel 1847. Per altre scelte del grafo  $H$  il problema dello spettro è stato risolto in tempi assai più recenti. Si dice in *Teoria dei Grafi* che se si deve testare un problema è sempre bene cominciare a guardarlo per il grafo di Petersen. Ebbene, scegliendo il grafo di Petersen come grafo  $H$  che dia la forma a tutti i blocchi della decomposizione, non sorprenderà scoprire che la determinazione del suo spettro di esistenza è del 1996 [2]. Quando  $H$  è il grafo completo con  $k$  vertici allora il problema dello spettro diventa esattamente il problema dello spettro di esistenza per i  $2 - (v, k, 1)$  disegni, cioè per i sistemi di Steiner in cui i blocchi hanno cardinalità  $k$ . Sul problema dello spettro si registrano progressi significativi anche recenti, si veda [5], [11, p.11]. Probabilmente i risultati più paradigmatici in questo contesto sono quelli di H. Hanani [17], [18] e di R.M. Wilson [24], [25]. Fra le tante cose, Hanani determina con metodi costruttivi basati anche su tecniche ricorsive lo spettro di esistenza dei  $2 - (v, 4, 1)$  disegni, cioè dei sistemi di quaterne di Steiner: le condizioni necessarie  $v \equiv 1$  oppure  $4 \pmod{12}$  sono anche sufficienti.

I risultati di Wilson sono di natura asintotica, cioè un disegno a blocchi d'ordine  $v$  con blocchi di cardinalità assegnata esiste per tutti i valori sufficientemente grandi di  $v$  che soddisfino le condizioni necessarie di esistenza. Tuttavia, per determinate scelte di  $k$  e  $v$  il problema resiste in modo formidabile a tutti i tentativi di soluzione. Basti pensare ai valori  $k = n + 1$  e  $v = n^2 + n + 1$ , nel qual caso la struttura di incidenza risulta essere un piano proiettivo finito: lo spettro di esistenza risulta ancora sostanzialmente sconosciuto, nonostante ci si spinga a formulare la congettura che  $n$  debba essere una potenza di un numero primo [11, p.10]. L'unica evidenza che viene portata a favore di questa congettura è la constatazione che in tutte le innumerevoli famiglie di piani proiettivi finiti che sono stati costruiti dagli albori della teoria  $n$  è sempre una potenza di un primo. Si può pensare che la struttura di grafo che  $H$  porta con sé sia un po' più vincolante, in generale, rispetto alla mera situazione insiemistica dei disegni a blocchi classici. In effetti per molti grafi relativamente "piccoli" il problema dello spettro è risolto, si veda [3] oppure [8]. Si segnala che per scelte distinte del grafo  $H$  con gli stessi parametri (diciamo numero di vertici e numero di spigoli) le circostanze e le tecniche che portano con successo alla determinazione dello spettro possono essere anche assai diverse tra loro. Un grafo connesso con sette vertici e sette spigoli non può essere un albero e quindi deve contenere un ciclo: lo spettro per grafi con sette vertici e sette spigoli contenenti un ciclo di lunghezza superiore a 3 era stato oggetto di contributi precedenti [13, Theorem 12.6], [16], [26].

Questa tesi si occupa prevalentemente della determinazione dello spettro per un grafo connesso  $H$  che ha sette vertici, sette spigoli e contiene un ciclo di lunghezza 3, in particolare viene trattato il caso in cui  $H$  è il grafo che si ottiene attaccando due cammini di lunghezza 2 a due vertici del 3-ciclo (vedi Esempio 1.1.9), il nome "Longhorn" deriva ovviamente dalla sua forma e lo si denota con il simbolo  $L_7$ . L'approccio è costruttivo e si basa sul cosiddetto metodo delle differenze [14] applicato a un gruppo ciclico che agisce sui vertici del grafo completo con un'unica orbita di lunghezza  $v$  (azione regolare ovvero strettamente transitiva) oppure con due orbite di rispettive lunghezze 1 e  $v - 1$  (azione 1-rotazionale).

Nel **Capitolo 1** sono riportati alcuni concetti base della Teoria dei Grafi e a fine capitolo si evidenzia il problema della  $H$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_v$ . Nel **Capitolo 2** si fa

una breve panoramica sugli  $H$ -disegni e si espone il *Problema* intorno al quale ruota tutto il lavoro di tesi. Nel **Capitolo 3** si sviluppano gli strumenti utili a formalizzare la  $L_7$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_v$  che verrà completamente esposta nel **Capitolo 4**. Nel successivo **Capitolo 5** si fa vedere come i risultati ottenuti possono essere applicati ad un lavoro pubblicato in passato relativamente ad una  $L_5$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_v$ . Nel **Capitolo 6** si evidenzia la possibilità di applicare i risultati ottenuti ad altri grafi che hanno sette vertici e sette spigoli. Infine, nel **Capitolo 8** si discute sulla possibilità di generalizzare quanto ottenuto nei precedenti capitoli e si evidenzia come sia possibile ottenere un risultato parziale in un caso specifico.

*A **Modena**,*  
*per avermi accolto,*  
*per aver dato un contributo alla mia esperienza,*  
*per avermi regalato tante belle passeggiate in bici.*

# Capitolo 1

## Concetti fondamentali sui grafi

### 1.1 Definizioni preliminari

Consideriamo un insieme  $V$  che sia non vuoto, successivamente "selezioniamo" una famiglia di sottoinsiemi di  $V$  ciascuno avente cardinalità 2 e indichiamo una tale famiglia con  $E$ , la coppia  $G=(V,E)$  si dice un Grafo Semplice. Gli elementi di  $V$  si dicono Vertici o Nodi, mentre gli elementi di  $E$  si dicono Lati o Spigoli. Se vogliamo mettere in evidenza che  $V$  è l'insieme dei *Vertici* del *Grafo Semplice*  $G$  scriveremo  $V=V(G)$  e analogamente per i *Lati* si scrive  $E=E(G)$ ; in tal caso per far riferimento al grafo utilizzeremo il simbolismo  $G=(V(G),E(G))$ . In alternativa e in maniera equivalente possiamo dare la seguente:

**Definizione 1.1.1.** Un *Grafo Semplice* è una coppia  $G=(V(G),E(G))$  che verifica la seguente proprietà:

$$V(G) \neq \emptyset \text{ e } E(G) \subseteq \{ \{x,y\} \mid x,y \in V(G) \text{ con } x \neq y \} \quad (1.1.1)$$

**Osservazione 1.1.2.** *Supponiamo che la cardinalità di  $V(G)$  sia  $n$  e quindi  $|V(G)| = n$ . A partire da un tale  $V(G)$  si può costruire l'insieme  $\mathcal{C}$  di tutte le coppie distinte di elementi di  $V(G)$ , sappiamo che  $|\mathcal{C}| = \frac{n^2 - n}{2}$ . Ora per costruire un Grafo Semplice è sufficiente prendere un qualsiasi  $E(G) \subseteq \mathcal{C}$ . Concludiamo che il numero di Grafi Semplici che si possono costruire a partire da un insieme finito  $V(G)$  di  $n$  elementi è*

in numero di  $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ . In seguito capiremo che i Grafi Semplici che si possono costruire a partire da un insieme finito di ordine  $n$  è strettamente minore del numero  $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ .

**Esempio 1.1.3.** Consideriamo il seguente grafo  $G$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e con  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_1, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

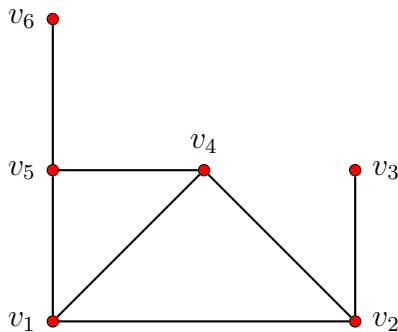


Figura 1.1.1: Un Grafo Semplice con 6 vertici e 7 spigoli

**Esempio 1.1.4.** Consideriamo il seguente grafo  $G$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e con  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_5, v_6\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

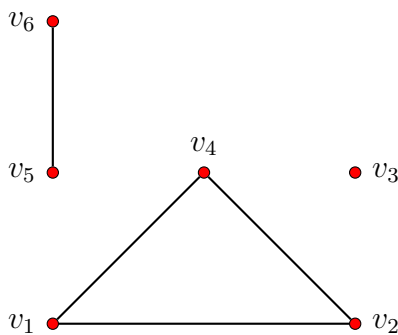


Figura 1.1.2: Un Grafo Semplice con 6 vertici e 4 spigoli

**Esempio 1.1.5.** Consideriamo il seguente grafo  $G$  con

$V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}\}$  e con

$E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_{k+1}\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

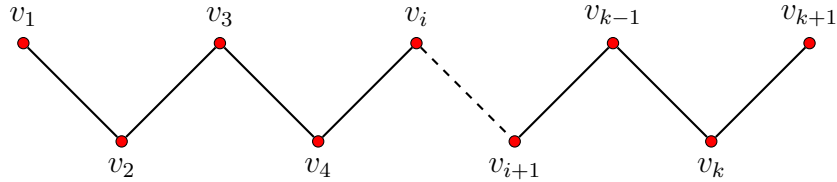


Figura 1.1.3: Un *Grafo Semplice* con  $k + 1$  vertici e  $k$  spigoli

Nel caso del disegno dell'esempio 1.1.5 osserviamo che ci sono  $k + 1$  vertici e  $k$  spigoli, esso prende il nome di Cammino di lunghezza  $k$  e si indica con  $P_k$ . Solitamente il cammino  $P_k$  lo indicheremo anche con  $P_k = [v_1, v_2, \dots, v_{k+1}]$ , i vertici  $v_1$  e  $v_{k+1}$  si diranno anche gli estremi del cammino.

La nozione appena data di *Grafo Semplice* si può estendere in vari modi prevedendo ad esempio che nell'insieme  $E(G)$  ci siano ripetizioni di insiemi con due elementi (*Spigoli Multipli*), insiemi aventi un solo elemento (*Cappi o loop*), insiemi di due elementi che evidenziano l'ordine (*Spigoli Orientati*), i *Grafi* che hanno queste caratteristiche si dicono *Grafi non semplici*. Nella figura in basso un esempio di grafo non semplice:

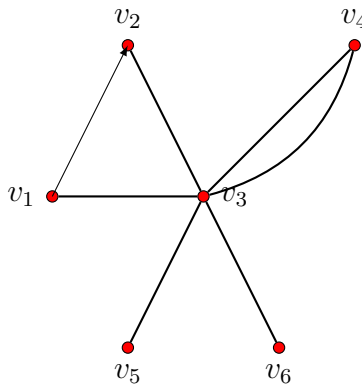


Figura 1.1.4: In figura un grafo non semplice

In questa *tesi* ci occuperemo esclusivamente di *Grafi Semplici*; in seguito quando diremo *Grafo* intenderemo *Grafo Semplice* e utilizzeremo la notazione compatta  $G$  in luogo della scrittura  $G = (V(G), E(G))$ .

Nella osservazione 1.1.2 abbiamo fatto notare che per costruire un *Grafo* è sufficiente prendere un qualsiasi  $E(G) \subseteq \mathcal{C}$ , quando  $E(G) = \mathcal{C}$  allora siamo in presenza di una particolare famiglia di *Grafi* che chiameremo *Grafi Completi*.

**Esempio 1.1.6.** Consideriamo il seguente grafo  $G$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e con  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

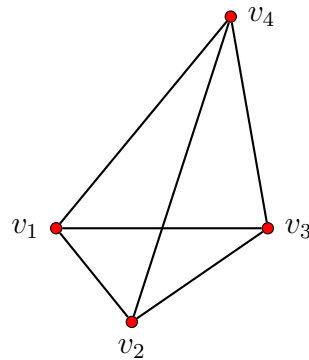


Figura 1.1.5: Il grafo completo  $\mathbf{K}_4$

**Osservazione 1.1.7.** Quando siamo in presenza di un Grafo Completo se  $|V(G)| = v$ , allora  $|E(G)| = \frac{v \cdot (v - 1)}{2}$  e si parlerà di Grafo Completo di ordine  $v$  e si indica con il simbolo  $\mathbf{K}_v$ . In generale se abbiamo un grafo  $G$  e  $u \in V(G)$  con il simbolo  $[u]$  si indica il numero degli spigoli che contengono  $u$  e tale numero si chiama anche grado di  $u$ . Nel Grafo Completo di ordine  $v$  tutti i vertici hanno grado  $v - 1$ . Nel caso dell'esempio 1.1.6 ogni vertice ha grado 3.

Riportiamo un ulteriore esempio di *Grafo* che sarà il punto di partenza e verrà utilizzato come spunto per gli argomenti sviluppati in questo lavoro di tesi.

**Esempio 1.1.8.** Consideriamo il seguente grafo  $G$  con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e con  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

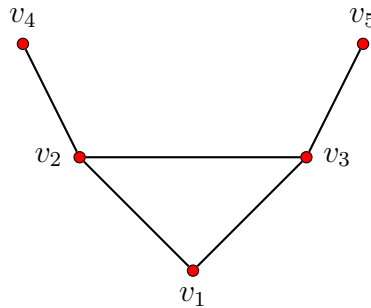


Figura 1.1.6: **Bull** con  $|V(H)| = |E(H)| = 5$

**Esempio 1.1.9.** Consideriamo il seguente grafo  $H$  con  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$  e con  $E(H) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_7\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

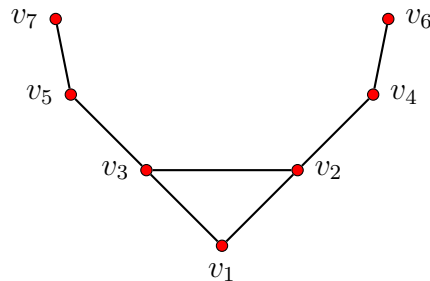


Figura 1.1.7: **Longhorn** con  $|V(H)| = |E(H)| = 7$

**Esempio 1.1.10.** Consideriamo il seguente grafo  $G$  con  $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$  e con  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup E(G_3)$ , dove

$$E(G_1) = \{\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\}, \{u_3, u_4\}, \{u_4, u_5\}, \{u_5, u_1\}\}$$

$$E(G_2) = \{\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}, \{u_3, v_3\}, \{u_4, v_4\}, \{u_5, v_5\}\}$$

$E(G_3) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_3, v_5\}, \{v_5, v_2\}, \{v_2, v_4\}, \{v_4, v_1\}\}$ , si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

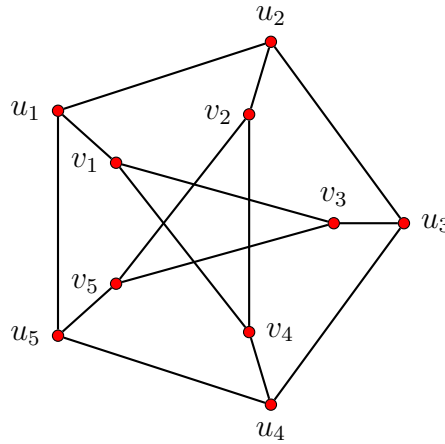


Figura 1.1.8: Grafo di Petersen con  $|V(G)| = 10$  e  $|E(G)| = 15$

Dopo aver riportato alcuni esempi di grafi diamo la seguente:

**Definizione 1.1.11.** Un grafo  $G = (V(G), E(G))$  si dice *connesso* se verifica la seguente proprietà:

$$\forall u, v \in V(G) \exists \text{ un cammino } P_k \text{ in } G \text{ di estremi } u \text{ e } v \quad (1.1.2)$$

**Osservazione 1.1.12.** Nell'esempio 1.1.8 siamo in presenza di un grafo connesso che si chiama **Bull**, nell'esempio 1.1.4 un grafo non connesso. Nell'esempio 1.1.3 un Grafo con almeno una coppia di vertici che hanno gradi diversi. Nella figura dell'esempio 1.1.6 tutti i vertici hanno lo stesso Grado e questo accade in ogni Grafo Completo. Osserviamo che nell'esempio 1.1.10 tutti i vertici hanno lo stesso grado e non si tratta di un Grafo Completo.

Ora mettiamo in evidenza un altro concetto importante che intercorre tra grafi, la nozione di isomorfismo; al tal proposito evidenziamo i seguenti grafi in figura:

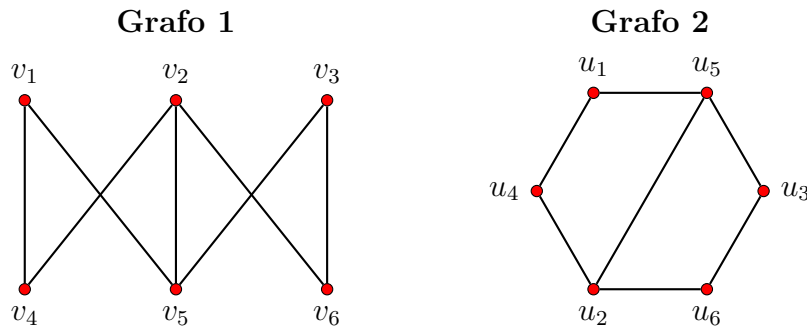


Figura 1.1.9: In alto sono raffigurati due grafi isomorfi

Pur se in apparenza i grafi rappresentati "sembrano differenti" essi hanno le medesime caratteristiche, nel senso precisato dalla seguente:

**Definizione 1.1.13.** Assegnati i grafi  $G = (V(G), E(G))$  e  $G' = (V(G'), E(G'))$ , diciamo che essi sono isomorfi se esiste un'applicazione biettiva  $\Lambda : V(G) \rightarrow V(G')$  che verifica la seguente proprietà:

$$\{u, v\} \in E(G) \iff \{\Lambda(u), \Lambda(v)\} \in E(G') \quad (1.1.3)$$

Non è difficile trovare un'applicazione  $\Lambda$  tra i grafi della figura 1.1.9 che verifica la proprietà espressa nella definizione 1.1.13. Se per il caso appena menzionato non è difficile far vedere che i due grafi sono isomorfi, c'è anche da dire che non è facile in prima battuta stabilire se due grafi sono isomorfi. Non è noto a tutt'oggi se il problema di stabilire se due grafi con lo stesso numero di vertici siano isomorfi ammetta un algoritmo risolutivo di tempo polinomiale [1]. In certi casi, specialmente se i grafi hanno un numero di vertici "contenuto", considerazioni di tipo locale (ad esempio la valutazione dei gradi di tutti i vertici) possono portare rapidamente a riconoscere che i due grafi non sono isomorfi.

Nota la nozione di isomorfismo tra grafi vediamo di fare qualche considerazione ulteriore relativamente alla costruzione di un grafo semplice partendo da un numero finito  $n$  di vertici assegnati. Nella osservazione 1.1.2 abbiamo detto che a partire da  $n$  vertici si possono costruire  $2^{\frac{n^2-n}{2}}$  *grafi semplici*, ovviamente essi non sono a due a due non isomorfi. Vediamo tale questione riportando i seguenti grafi in tabella:

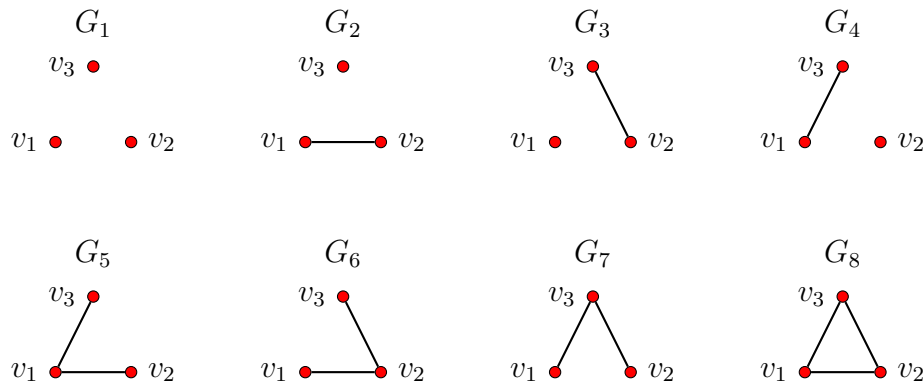


Tabella 1.1.1: Sopra sono raffigurati tutti i grafi con  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$

Nella precedente tabella sono stati riportati tutti i grafi semplici a partire dall'insieme  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$  che ha tre vertici. Sappiamo che i grafi semplici sono 8, ma da una analisi attenta possiamo osservare che i grafi  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$  sono tra di loro isomorfi e lo stesso dicasi per il gruppo di grafi semplici  $G_5$ ,  $G_6$  e  $G_7$ . In conclusione con 3 nodi è possibile costruire a meno di isomorfismi 4 grafi semplici, un numero di grafi semplici strettamente più piccolo di  $2^{\frac{n^2-n}{2}}$  con  $n = 3$ .

## 1.2 Nozione di decomposizione di un grafo semplice

Un problema oggetto di studio in Teoria dei Grafi ed è tuttora oggetto di studio in *Teoria dei Grafi* è la questione relativa alla decomposizione di un grafo  $G = (V(G), E(G))$ . Prima di formalizzare il tutto con una definizione rigorosa, riportiamo il seguente grafo:

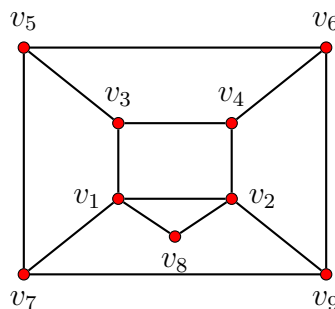


Tabella 1.2.2: Un grafo con  $|V(G)| = 9$  e  $|E(G)| = 14$

Non è difficile constatare che il grafo della tabella 1.2.2 può "essere ricostruito" utilizzando i quattro grafi della seguente tabella:

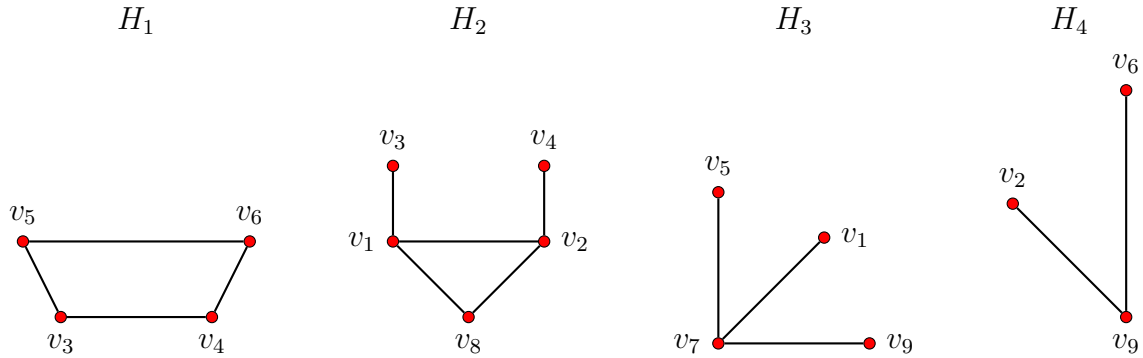


Tabella 1.2.3: Nella tabella in alto 4 grafi non isomorfi

In altre parole possiamo dire che ogni *spigolo* del grafo della tabella 1.2.2 fa parte di uno e un solo grafo riportato nella tabella 1.2.3. Quanto appena evidenziato mediante una rappresentazione grafica può essere formalizzato in maniera rigorosa dalla seguente:

**Definizione 1.2.1.** Assegnato un grafo  $G$ , una famiglia finita di grafi  $H_1, H_2, \dots, H_b$  si dice una  $(H_1, H_2, \dots, H_b)$ -decomposizione di  $G$  se vale la seguente proprietà:

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^b E(H_i) \quad e \quad E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset \quad se \quad i \neq j \quad (1.2.1)$$

La definizione di decomposizione di un grafo che abbiamo riportato nella Definizione 1.2.1 coincide con quella data a pag. 15 del testo di J. Bosák [12].

**Osservazione 1.2.2.** *Risulta evidente che se esiste una una  $(H_1, H_2, \dots, H_b)$ -decomposizione di  $G$ , allora vale la seguente relazione:*

$$|E(H_1)| + |E(H_2)| + \dots + |E(H_b)| = |E(G)| \quad (1.2.2)$$

Nel caso particolare in cui i *grafi*  $H_1, H_2, \dots, H_b$  siano a due a due isomorfi e quindi isomorfi al *grafo*  $H$ , la relazione 1.2.2 diventa:

$$b \cdot |E(H)| = |E(G)| \quad (1.2.3)$$

In tal caso parleremo di una  $H$ -decomposizione del grafo  $G$ .

**Esempio 1.2.3.** Prendiamo in considerazione i seguenti due grafi:

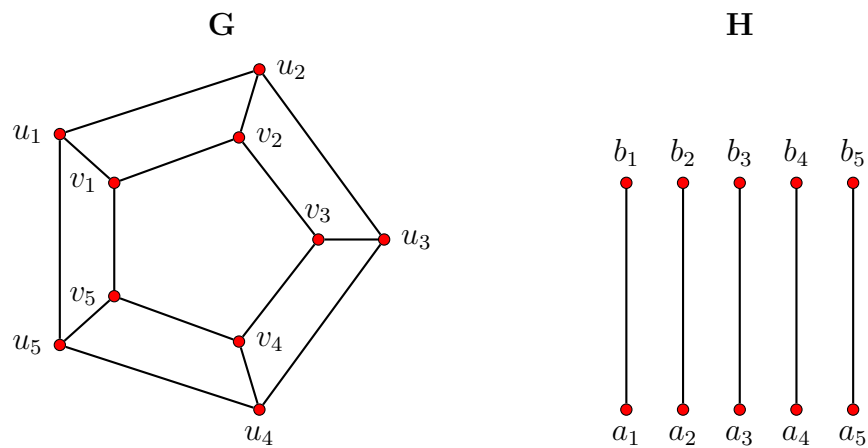


Figura 1.2.1: In alto in evidenza i grafi **G** e **H**

Utilizzando il Grafo **H** si ottiene una **H**-decomposizione del Grafo **G** che è evidenziata dalla seguente figura:

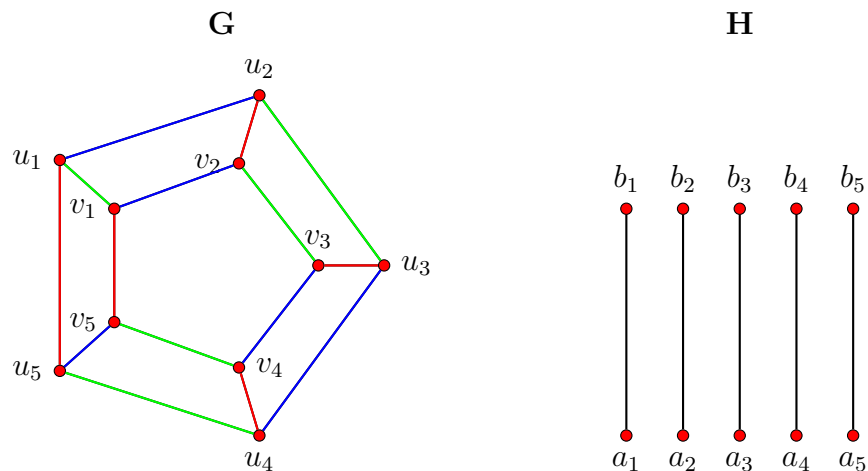


Figura 1.2.2: In alto a sinistra una **H**-decomposizione di **G**

I sottografi  $H_1, H_2, H_3$ , tutti isomorfi ad  $H$ , che danno luogo alla decomposizione sono rappresentati dagli spigoli di colore rosso, azzurro e verde, rispettivamente. In questo caso il grafo  $H$  è un cosiddetto 1-fattore noto più comunemente come un "matching"

---

perfetto o accoppiamento perfetto; si tratta di un insieme di spigoli a due a due privi di vertici in comune, con la proprietà che ciascun vertice del grafo appartenga ad uno (ed un solo) spigolo dell'accoppiamento. Una  $H$ -decomposizione del grafo  $G$  in cui  $H$  sia un 1-fattore prende il nome di *1-fattorizzazione di  $G$* . La teoria delle 1-fattorizzazioni può dunque essere vista come facente parte della teoria delle decomposizioni dei grafi. Di fatto la teoria delle 1-fattorizzazioni si è sviluppata indipendentemente, si veda la monografia di W. Wallis [23].

# Capitolo 2

## H-Disegni

### 2.1 Il problema della decomposizione del Grafo Completo $K_v$

Consideriamo il *Grafo Completo* su  $v$  vertici  $K_v$  e sia  $H$  un grafo assegnato il cui numero di vertici  $|V(H)|$  non sia superiore a  $v$ . Fatte queste premesse possiamo dare la seguente:

**Definizione 2.1.1.** Si chiama *H-disegno di ordine  $v$*  una  $(H_1, H_2, \dots, H_b)$ -decomposizione di  $K_v$  con la proprietà che tutti i grafi  $H_i$  siano isomorfi a  $H$ . Quindi un *H-disegno di ordine  $v$*  è una *H-decomposizione di  $K_v$* . Quando ci riferiamo ad un *H-disegno di ordine  $v$*  in maniera più sintetica utilizzeremo il simbolo  $\mathcal{D}$ .

**Esempio 2.1.2.** Consideriamo il Grafo Completo  $K_5$  e come grafo  $H$  prendiamo il grafo dell'esempio 1.1.8, ovvero il Bull e riportiamo il seguente schema:

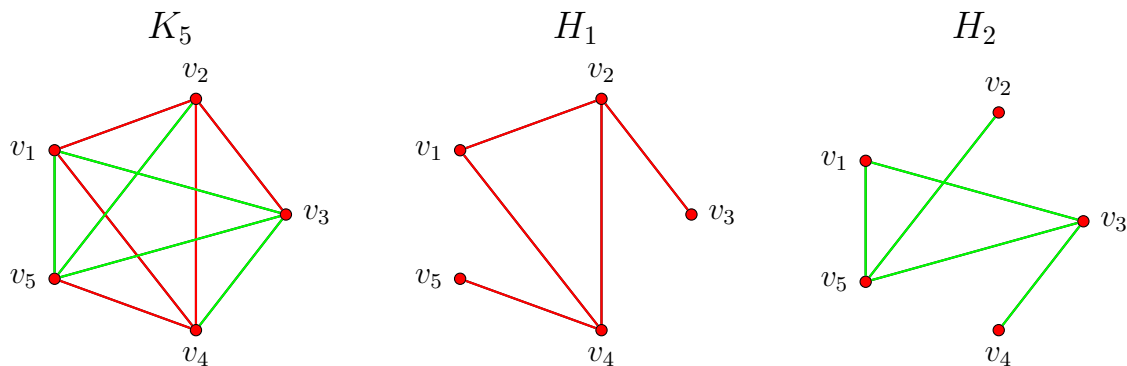


Figura 2.1.1: Nella figura in alto un  $H$ -disegno di ordine 5

Come è possibile constatare nella figura in alto ogni spigolo del grafo completo  $\mathbf{K}_5$  appartiene ad uno e uno solo dei due grafi disegnati a destra, il grafo in *rosso* e quello in *verde*, che risultano isomorfi tra di loro e isomorfi al *Bull*  $L_5$  della figura 1.1.6. L'esempio appena riportato fa parte di un lavoro di decomposizione e per maggiori dettagli bisogna consultare [10].

Se abbiamo una  $(H_1, H_2, \dots, H_b)$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_v$ , i grafi  $H_i$  della decomposizione si chiamano *Blocchi* della decomposizione ed essi sono grafi a due a due isomorfi tra loro. Vogliamo osservare che quando i grafi  $H_i$  sono tutti isomorfi al *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_k$  con  $k \leq v$ , in tal caso un  $H$ -disegno di ordine  $v$  non è altro che un  $2 - (v, k, 1)$  disegno, ovvero un *Sistema di Steiner* secondo la definizione classica di *Disegno a Blocchi*. Il primo problema interessante che nasce in modo naturale per gli  $H$ -disegni è quello della loro esistenza. A tale proposito diamo la seguente:

**Definizione 2.1.3.** Si dice *SPETTRO* di un grafo  $H$  l'insieme  $v$  degli interi positivi per i quali esiste un  $H$ -disegno di ordine  $v$ .

La seguente proposizione è evidente:

**Proposizione 2.1.4.** Se esiste un  $H$ -disegno di ordine  $v$ , allora il numero intero  $|E(H)|$  è un divisore di  $|E(\mathbf{K}_v)|$ .

*Dimostrazione.* E' sufficiente applicare la relazione 1.2.3 con  $G = \mathbf{K}_v$ . ■

Questo lavoro di tesi e' finalizzato principalmente al seguente:

**Problema 2.1.5.** Determinare lo SPETTRO del grafo assegnato nell'esempio 1.1.9.

# Capitolo 3

## Decomposizioni del Grafo Completo $K_V$ basate su gruppi ciclici

### 3.1 Nozioni preliminari e distanza in $\mathbb{Z}_m$

**Definizione 3.1.1.** Consideriamo un intero positivo  $m \geq 2$ , quello che facciamo è introdurre una "distanza" in  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ , essa sarà definita nel seguente modo:

$$\mathbf{d}(x, y) = \min \{|x - y|, m - |x - y| \text{ se } x, y \in \mathbb{Z}_m \text{ } x \neq y \} \quad (3.1.1)$$

**Osservazione 3.1.2.** Osserviamo che  $1 \leq \mathbf{d}(x, y) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ . Poichè  $x \neq y$  risulta chiaro che  $|x - y| > 0$  e  $m - |x - y| > 0$  e dunque  $\mathbf{d}(x, y) \geq 1$ . Ora supponiamo che  $|x - y| > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$  e  $m - |x - y| > \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ , allora sommando membro a membro si ottiene  $m > 2 \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ , quest'ultima relazione è palesemente assurda e questo dimostra che  $\mathbf{d}(x, y) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ . Se consideriamo  $x = 0$  e  $y = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ , abbiamo che  $|x - y| = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$  e  $m - |x - y| \geq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ . Queste ultime due relazioni provano che  $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$  è la massima distanza.

Quello che stiamo per esporre sarà utile nel prosieguo.

**Definizione 3.1.3.** Se  $x, y \in \mathbb{Z}_m$ , definiamo:

$$D_i = \{ \{x, y\} \mid \mathbf{d}(x, y) = i \text{ con } x, y \in \mathbb{Z}_m \ x \neq y \}$$

E' nostro intendo valutare la cardinalità degli insiemi  $D_i$ .

Discuteremo i casi  $m$  pari e  $m$  dispari separatamente.

Caso m pari

$\forall i \in \left\{1, 2, \dots, \frac{m}{2} - 1\right\}$  fissato, possiamo considerare  $d(j, j + i)$  con  $0 \leq j \leq m - 1$ .  
Risulta evidente che  $d(j, j + i) = i$  e quindi  $|D_i| = m$ . Per  $i = \frac{m}{2}$  possiamo considerare  $d\left(j, j + \frac{m}{2}\right)$  con  $0 \leq j \leq \frac{m}{2} - 1$ . Risulta evidente che  $d\left(j, j + \frac{m}{2}\right) = \frac{m}{2}$  e quindi  $|D_{\frac{m}{2}}| = \frac{m}{2}$ . In conclusione possiamo dire che:

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} |D_i| = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} |D_i| + |D_{\frac{m}{2}}| = \left(\frac{m}{2} - 1\right) \cdot m + \frac{m}{2} = \frac{m \cdot (m - 1)}{2} \quad (3.1.2)$$

Riportiamo un esempio di distanza nei casi di  $\mathbb{Z}_6$

**Esempio 3.1.4.** Nella figura in basso sono elencate solo alcune delle distanze in  $\mathbb{Z}_6$ :

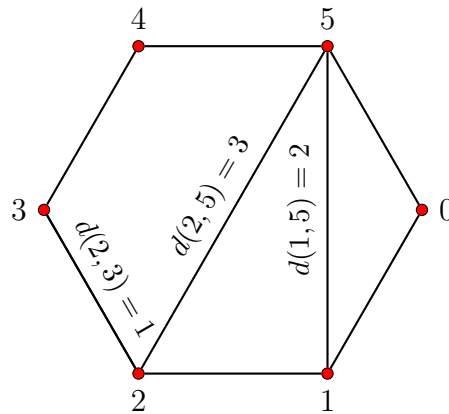


Figura 3.1.1: Esempio di distanza in  $\mathbb{Z}_6$

In questo caso ha senso considerare i seguenti insiemi:

$$D_1 = \{ \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 0\} \}$$

$$D_2 = \{ \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 0\}, \{5, 1\} \}$$

$$D_3 = \{ \{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\} \}$$

Caso  $m$  dispari

$\forall i \in \left\{1, 2, \dots, \frac{m-1}{2}\right\}$  fissato, possiamo considerare  $d(j, j+i)$  con  $0 \leq j \leq m-1$ . Risulta evidente che  $d(j, j+i) = i$  e quindi  $|D_i| = m$ . Per  $i = \frac{m-1}{2}$  possiamo considerare  $d\left(j, j + \frac{m-1}{2}\right)$  con  $0 \leq j \leq m-1$ . Risulta evidente che  $d\left(j, j + \frac{m-1}{2}\right) = \frac{m-1}{2}$  e quindi  $|D_{\frac{m-1}{2}}| = m$ . In conclusione possiamo dire che:

$$\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} |D_i| = \left(\frac{m-1}{2}\right) \cdot m = \frac{m \cdot (m-1)}{2} \quad (3.1.3)$$

**Esempio 3.1.5.** Nella figura in basso sono elencate solo alcune delle distanze in  $\mathbb{Z}_7$ :

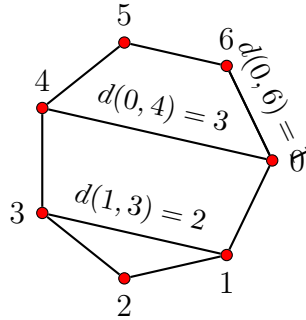


Figura 3.1.2: Esempio di distanza in  $\mathbb{Z}_7$

In questo caso ha senso considerare i seguenti insiemi:

$$D_1 = \{ \{0, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 0\} \}$$

$$D_2 = \{ \{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 0\}, \{6, 1\} \}$$

$$D_3 = \{ \{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 0\}, \{5, 1\}, \{6, 2\} \}$$

## 3.2 Il grafo completo $\mathbf{K}_v$ e il gruppo $(\mathbb{Z}_v, +)$

In questa sezione vediamo come è possibile ricostruire tutti gli elementi del grafo completo  $\mathbf{K}_v$  utilizzando il sostegno del gruppo  $(\mathbb{Z}_v, +)$ . Questa identificazione assume un ruolo importante per descrivere successivamente la decomposizione di  $\mathbf{K}_v$  mediante il grafo dell'esempio 1.1.9. Distinguiamo i seguenti casi:

Caso con un punto fisso  $\infty$ 

Iniziamo con il dire che l'insieme dei vertici del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  verrà identificato con l'insieme  $\{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{v-1}$ , dove il centro del poligono regolare sarà etichettato con il simbolo  $\infty$  e gli elementi di  $\mathbb{Z}_{v-1}$  vengono utilizzati per etichettare i relativi vertici seguendo generalmente l'ordine orario. Una rappresentazione grafica rende più chiara l'idea:

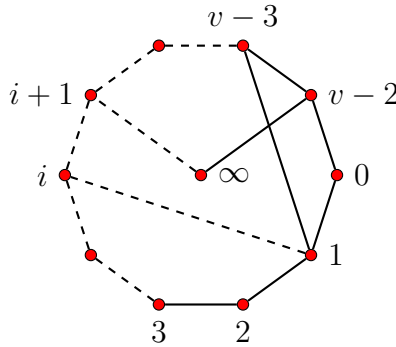


Figura 3.2.1: Interpretazione grafica di  $\mathbf{K}_v$  con punto fisso

**Osservazione 3.2.1.** *Risulta chiaro da questa interpretazione che  $V(\mathbf{K}_v) = \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{v-1}$ , mentre gli spigoli del grafo completo  $\mathbf{K}_v$  vengono ripartiti nei sottoinsiemi  $D_i$  descritti dalle relazioni 3.1.2 e 3.1.3 con l'aggiunta del seguente insieme:*

$$D_\infty = \{ \{\infty, 0\}, \{\infty, 1\}, \{\infty, 2\}, \dots, \{\infty, v-3\}, \{\infty, v-2\} \}$$

Osserviamo che  $|D_\infty| = v-1$ , ora la cardinalità di  $E(\mathbf{K}_v)$  si può facilmente determinare tenendo conto delle formule 3.1.2 e 3.1.3 con  $m = v-1$ .

Se  $v$  è dispari, si ottiene:

$$E(\mathbf{K}_v) = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} |D_i| + |D_\infty| = \frac{(v-1) \cdot (v-2)}{2} + v-1 = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$$

Se  $v$  è pari, si ottiene:

$$E(\mathbf{K}_v) = \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} |D_i| + |D_\infty| = \frac{(v-1) \cdot (v-2)}{2} + v-1 = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$$

Caso senza punto fisso

In questo caso i vertici del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  saranno identificati con i  $v$  vertici di un poligono regolare ed etichettati con gli elementi di  $\mathbb{Z}_v = \{0, 1, 2, \dots, v-2, v-1\}$ . Un rappresentazione grafica rende più chiara l'idea:

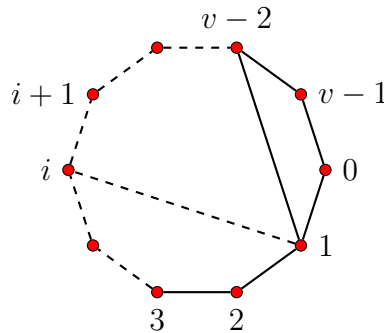


Figura 3.2.2: Interpretazione grafica di  $\mathbf{K}_v$  senza un punto fisso

**Osservazione 3.2.2.** *Dalla precedente rappresentazione grafica i vertici del Grafo Completo  $V(\mathbf{K}_v)$  coincidono con gli elementi di  $\mathbb{Z}_v$ , mentre gli spigoli  $E(\mathbf{K}_v)$  si identificano con le distanze degli insiemi  $D_i$  descritti dalle relazioni 3.1.2 e 3.1.3. Ora la cardinalità di  $E(\mathbf{K}_v)$  si può facilmente determinare tenendo conto delle formule 3.1.2 e 3.1.3 con  $m = v$ .*

*Se  $v$  è dispari, si ottiene:*

$$E(\mathbf{K}_v) = \sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} |D_i| = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$$

*Se  $v$  è pari, si ottiene:*

$$E(\mathbf{K}_v) = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} |D_i| = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$$

### 3.3 Classi di rappresentanza delle distanze in $\mathbb{Z}_m$

Siamo in  $\mathbb{Z}_m$  e supponiamo che  $m = t \cdot 2^p$  con  $t$  dispari, quindi  $2^p$  è la massima potenza di 2 che divide  $m$ . Osserviamo esplicitamente che  $m$  può essere anche dispari, questo accade se  $p = 0$ . In una tale situazione possiamo considerare la seguente trasformazione:

$$\Omega : \mathbb{Z}_m \longrightarrow \mathbb{Z}_m$$

$$\Omega(x) = x + 2^p$$

La trasformazione  $\Omega$  è una permutazione di  $\mathbb{Z}_m$  di ordine  $t$ .

**Definizione 3.3.1.** In  $\mathbb{Z}_m$  possiamo introdurre la seguente relazione:

$$x \sim y \iff |x - y| = \alpha \cdot 2^p \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{N}$$

La relazione  $\sim$  è riflessiva, simmetrica e transitiva, siamo pertanto in presenza di una relazione di equivalenza e quindi una classe di equivalenza è del seguente tipo:

$$[x] = \{x + \alpha \cdot 2^p \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{N}\}$$

Non è difficile convincersi del fatto che i seguenti elementi di  $\mathbb{Z}_m$ :

$$0, 1, 2, 3, \dots, 2^p - 1$$

sono a due a due non in relazione tra di loro in quanto se  $x$  e  $y$  sono due qualsiasi dei precedenti elementi accade che  $|x - y| \leq 2^p - 1$ . Risulta altresì vero che ogni classe è costituita da  $t$  elementi:

$$[x] = \{x + \alpha \cdot 2^p \quad \text{con } 0 \leq \alpha \leq t - 1\}$$

Dunque ogni classe ha  $t$  elementi e ci sono  $2^p$  classi che si diranno COMPONENTI DELLE DISTANZE in  $\mathbb{Z}_m$  e i rappresentanti  $0, 1, 2, \dots, 2^p - 1$  si diranno RAPPRESENTANTI CANONICI.

### 3.4 Generatori di uno spigolo del *Grafo Completo* $\mathbf{K}_v$

Conveniamo di rappresentare uno spigolo del *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_v$  con una scrittura del tipo  $\{x, y\}$  oppure  $\{\infty, x\}$  con  $x, y \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  e  $x \neq y$ . Evidente che lo spigolo  $\{x, y\}$  è lo stesso di  $\{y, x\}$  e allo stesso modo  $\{\infty, x\}$  è lo stesso che  $\{x, \infty\}$ .

**Proposizione 3.4.1.** *Il generatore dello spigolo  $\{x, y\}$  che ha distanza  $d$  è del tipo  $\{x_0, x_0 + d\}$  e il generatore dello spigolo  $\{\infty, x\}$  è del tipo  $\{\infty, x_0\}$  con  $x_0 \in \{0, 1, 2, \dots, 2^p - 1\}$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo lo spigolo  $\{x, y\}$ , tra  $x$  e  $y$  uno dei due sarà maggiore dell'altro e supponiamo che sia  $x < y$ :

- se  $d = y - x$  allora poiché  $\sim$  è una relazione di equivalenza sarà  $x \sim x_0$ . Il generatore dello spigolo  $\{x, y\}$  è  $\{x_0, x_0 + d\}$ . Poiché è  $x = x_0 + \alpha \cdot 2^p$  e  $y = x + d$ , allora  $\{x_0 + \alpha \cdot 2^p, x_0 + d + \alpha \cdot 2^p\} = \{x, x + d\} = \{x, y\}$ .
- se  $d = m - (y - x)$  allora poiché  $\sim$  è una relazione di equivalenza sarà  $y \sim x_0$ . Il generatore dello spigolo  $\{x, y\}$  è  $\{x_0, x_0 + d\}$ . Poiché è  $y = x_0 + \alpha \cdot 2^p$  e  $y + d = m + x = x$ , allora  $\{x_0 + \alpha \cdot 2^p, x_0 + d + \alpha \cdot 2^p\} = \{y, y + d\} = \{y, m + x\} = \{y, x\}$ .
- Infine se consideriamo lo spigolo  $\{\infty, x\}$  allora poiché  $\sim$  è una relazione di equivalenza sarà  $x \sim x_0$ . Il generatore dello spigolo  $\{\infty, x\}$  è  $\{\infty, x_0\}$ . Poiché è  $x = x_0 + \alpha \cdot 2^p$ , allora  $\{\infty, x_0 + \alpha \cdot 2^p\} = \{\infty, x\}$ .

■

**Definizione 3.4.2.** Se  $\{x, y\}$  indica uno spigolo e  $\{x_0, x_0 + d\}$  e il suo generatore, con il simbolo  $\langle \{x_0, x_0 + d\} \rangle$  indichiamo l'orbita di spigoli sotto l'azione del sottogruppo  $\Omega$ . Lo stesso simbolismo si adotta se lo spigolo è del tipo  $\{\infty, x\}$ .

**Osservazione 3.4.3.** *Osserviamo esplicitamente che se  $x \not\sim y$ , gli insiemi  $\langle \{x, x + d\} \rangle$  e  $\langle \{y, y + d\} \rangle$  sono disgiunti.*

**Esempio 3.4.4.** *Nell'osservazione 3.2.1 abbiamo evidenziato la convenienza di interpretare ad esempio il Grafo Completo  $\mathbf{K}_{21} = \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{20}$ , mentre gli spigoli del grafo  $\mathbf{K}_{21}$  vengono ripartiti nei sottoinsiemi  $D_1, D_2, \dots, D_9, D_{10}$  e  $D_\infty$ . Possiamo considerare  $\mathbb{Z}_{20}$  e sappiamo che  $20 = 5 \cdot 2^2$ , la relazione  $\sim$  permette di definire le seguenti classi di equivalenza:*

$$[0] = \{0, 4, 8, 12, 16\}$$

$$[1] = \{1, 5, 9, 13, 17\}$$

$$[2] = \{2, 6, 10, 14, 18\}$$

$$[3] = \{3, 7, 11, 15, 19\}$$

*Se considero lo spigolo  $\{15, 9\}$ , sappiamo che  $d(15, 9) = 6$  e poiché  $9 \equiv 1 \pmod{2^2}$  il generatore dello spigolo  $\{15, 9\}$  è lo spigolo  $\{1, 1 + 6\}$  e quindi  $\{1, 7\}$ .*

*Se considero lo spigolo  $\{19, 8\}$ , sappiamo che  $d(19, 8) = 20 - (19 - 8) = 9$  e poiché  $19 \equiv 3 \pmod{2^2}$  il generatore dello spigolo  $\{19, 8\}$  è lo spigolo  $\{3, 3 + 9\}$  e quindi  $\{3, 12\}$ .*

*Se considero lo spigolo  $\{\infty, 14\}$ , sappiamo che  $14 \equiv 2 \pmod{2^2}$  il generatore dello spigolo  $\{\infty, 14\}$  è lo spigolo  $\{\infty, 2\}$ .*

*Ora consideriamo la seguente permutazione:*

$$\Omega : \mathbb{Z}_{20} \longrightarrow \mathbb{Z}_{20}$$

$$\Omega(x) = x + 2^2$$

*Gli spigoli  $\{9, 18\}$  e  $\{7, 16\}$  hanno entrambi distanza 9 e i rispettivi generatori sono  $\{1, 10\}$  e  $\{3, 12\}$ . Osserviamo che  $1 \not\sim 3$  e quindi:*

$$\langle \{1, 10\} \rangle = \left\{ \{1, 10\}, \{5, 14\}, \{9, 18\}, \{13, 2\}, \{17, 6\} \right\}$$

$$\langle \{3, 12\} \rangle = \left\{ \{3, 12\}, \{7, 16\}, \{11, 0\}, \{15, 4\}, \{19, 8\} \right\}$$

*E' facile osservare che le orbite di spigoli sono disgiunte.*

# Capitolo 4

## $L_7$ -decomposizioni di $K_v$

### 4.1 Primo passo sulla decomposizione del Grafo Completo $K_v$ mediante il Longhorn $L_7$

Le indagini che seguono sono state ispirate dalla decomposizione di  $K_7$  mediante il grafo semplice  $L_7$  rappresentato nell'esempio 1.1.9. Il ragionamento è abbastanza semplice, se vogliamo una decomposizione poiché  $|E(K_7)| = 21$ , allora tali spigoli si devono "posizionare" su 3 Longhorn  $L_7$ . Siamo nel caso in cui  $v$  è dispari e quindi possiamo riportare la seguente interpretazione grafica:

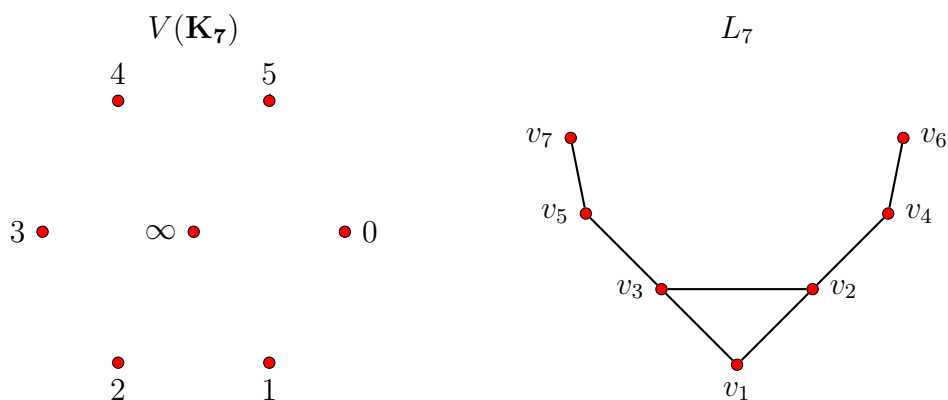


Tabella 4.1.1: Nella tabella a sinistra abbiamo  $V(K_7)$  e a destra il Longhorn  $L_7$

La strategia è la seguente, sappiamo che  $V(K_7) = \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_6$ , l'intero  $6 = 3 \cdot 2$  e inoltre sappiamo che in  $\mathbb{Z}_6$  ci sono gli insiemi  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  che sono stati definiti nell'esempio 3.1.5. Consideriamo il Longhorn  $L_7$  con gli elementi di  $\mathbb{Z}_6$  e il simbolo  $\infty$ :

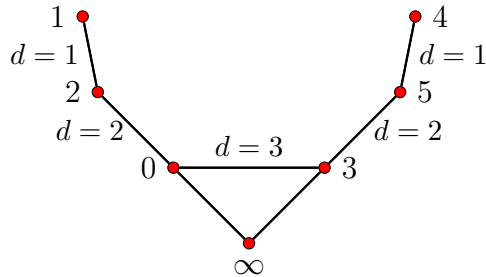


Figura 4.1.1: Un BLOCCO BASE Longhorn  $L_7$

Sugli spigoli del Longhorn  $L_7$  abbiamo riportato in maniera sintetica la distanza tra due vertici adiacenti. Ora consideriamo la seguente trasformazione:

$$\Omega : \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_6 \quad (4.1.1)$$

$$\Omega(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \infty \\ x + 2 & \text{se } x \in \mathbb{Z}_6 \end{cases}$$

La trasformazione  $\Omega$  ristretta a  $\mathbb{Z}_6$  ha ordine 3 e quindi agendo sulle etichette del BLOCCO BASE in figura 4.1.1 permette di costruire altri 2 Longhorn che costituiscono una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$ . In successione infatti abbiamo i seguenti blocchi:

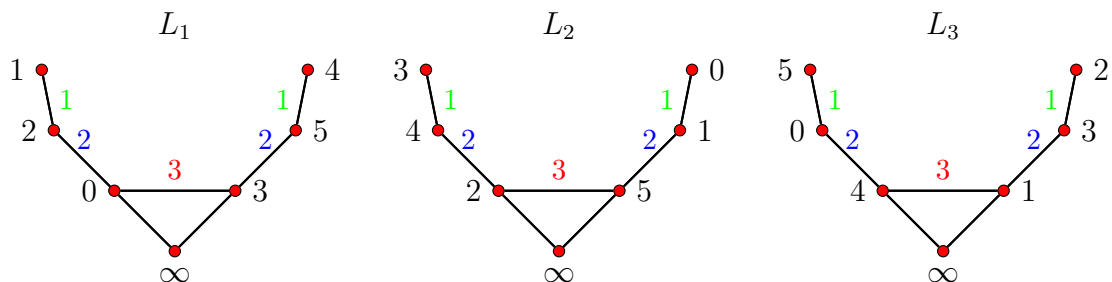


Tabella 4.1.2: Decomposizione di  $\mathbf{K}_7$

I BLOCCHI evidenziati nella tabella 4.1.2 costituiscono una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_7$  e in accordo con quanto esposto nell'osservazione 3.2.1 abbiamo gli insiemi  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_\infty$  che hanno cardinalità 6 e l'insieme  $D_3$  con cardinalità 3. Riportiamo in maniera compatta una rappresentazione grafica della decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_7$ :

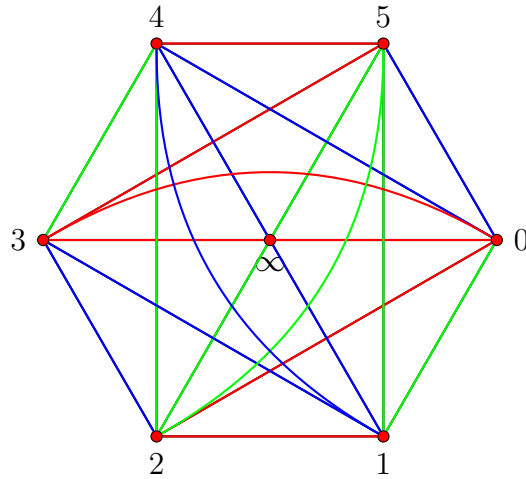


Figura 4.1.2: Decomposizione di  $\mathbf{K}_7$  mediante Longhorn  $L_7$

Nella prossima sezione esporremo in forma generale quanto appena evidenziato per ottenere una  $L_7$ -decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  sotto opportune condizioni.

## 4.2 Condizioni necessarie per l'esistenza di una decomposizione

Sappiamo che  $|E(L_7)| = 7$ , quindi se cerchiamo una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  deve accadere che 7, numero primo, deve essere un divisore di  $v$  oppure un divisore di  $v - 1$ , insomma vale la seguente:

**Proposizione 4.2.1.** *Se esiste una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  mediante il grafo semplice  $L_7$ , allora sarà  $v \equiv 0(\text{mod } 7)$  oppure  $v \equiv 1(\text{mod } 7)$ .*

Le condizioni evidenziate nella proposizione 4.2.1 saranno discusse separatamente:

CASO  $v \equiv 0 \pmod{7}$ 

Sappiamo che  $v = 7h$  e possiamo rappresentare  $\mathbf{K}_{7h} = \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{7h-1}$ . Indichiamo con  $p \in \mathbb{N}_0$  il massimo intero non negativo tale che  $2^p$  divida  $7h - 1$ , sarà  $7h - 1 = t \cdot 2^p$  con  $t$  necessariamente dispari. La seguente permutazione:

$$\Omega : \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{7h-1} \longrightarrow \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{7h-1}$$

$$\Omega(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \infty \\ x + 2^p & \text{se } x \in \mathbb{Z}_{7h-1} \end{cases}$$

ristretta a  $\mathbb{Z}_{7h-1}$  genera un sottogruppo di ordine di ordine  $t$ . Prima di proseguire nelle osservazioni proviamo che  $t \geq 3$  e quindi il sottogruppo non è l'identità.

**Proposizione 4.2.2.** *L'ordine del sottogruppo  $\Omega$  è  $t \geq 3$ .*

*Dimostrazione.* Se fosse  $t = 1$ , allora  $7h - 1 = 1 \cdot 2^n \iff 2^n \equiv -1 \pmod{7} \iff 2^n \equiv 6 \pmod{7}$ . Accade che  $2^0 \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $2^1 \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$  e di nuovo  $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ . Questo prova che  $7h - 1$  non sarà mai una potenza di 2 e quindi  $t \geq 3$ . ■

Ora indichiamo con  $L_\infty$  la famiglia dei Longhorn della decomposizione che contengono come vertice il simbolo  $\infty$ , i restanti Longhorn li indichiamo con il simbolo  $L_f$ . L'idea è procurarsi un numero finito di Longhorn appartenenti alle due famiglie  $L_\infty$  ed  $L_f$  su quali facendo agire  $\Omega$  otteniamo tutti i blocchi della decomposizione; questi ultimi li chiameremo BLOCCHI BASE e li indicheremo rispettivamente con i simboli  $L_\infty^B$  ed  $L_f^B$ .

**Osservazione 4.2.3.** *Ricordiamo che  $v = 7h$ ,  $t = \frac{v-1}{2^p} = \frac{7h-1}{2^p}$ ,  $|E(L_7)| = 7$  e  $|E(K_{7h})| = \frac{7h \cdot (7h-1)}{2}$ ; dunque possiamo scrivere:*

$$\left( |L_\infty^B| + |L_f^B| \right) \cdot \frac{7h-1}{2^p} \cdot 7 = \frac{7h \cdot (7h-1)}{2} \implies$$

$$|L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \tag{4.2.1}$$

Vediamo di particularizzare la relazione 4.2.1 prendendo in esame i seguenti casi:

a) SOTTOCASO  $v = 7h$  con  $h$  dispari

In questo caso, per scelta, il simbolo  $\infty$  sul blocco della decomposizione verrà utilizzato per etichettare il vertice di grado 2 appartenente al ciclo  $C_3$  che compone il Longhorn, dunque se teniamo conto che ogni vertice del grafo completo ha grado  $7h - 1$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 2 \cdot |L_\infty^B| \cdot \frac{7h-1}{2^p} = 7h-1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 2^{p-1} \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 2^{p-1} \\ |L_f^B| = (h-1) \cdot 2^{p-1} \end{cases}$$

In conclusione possiamo scrivere:

$$|L_\infty^B| = 2^{p-1} \quad e \quad |L_f^B| = \left( \frac{h-1}{2} \right) \cdot 2^p \quad (4.2.2)$$

Tenendo conto delle relazioni 4.2.2 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_\infty^B  +  L_f^B $
1	$K_7$	1	3	$\mathbb{Z}_6$	$1 + 0 \cdot 2$
3	$K_{21}$	2	5	$\mathbb{Z}_{20}$	$2 + 1 \cdot 2^2$
5	$K_{35}$	1	17	$\mathbb{Z}_{34}$	$1 + 2 \cdot 2$
7	$K_{49}$	4	3	$\mathbb{Z}_{48}$	$8 + 3 \cdot 2^4$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$h$	$K_{7h}$	$p$	$\frac{7h-1}{2^p}$	$\mathbb{Z}_{7h-1}$	$2^{p-1} + \left( \frac{h-1}{2} \right) \cdot 2^p$

Tabella 4.2.3: Schema BLOCCHI BASE con  $v = 7h$  e  $h$  dispari

b) SOTTOCASO  $v = 7h$  con  $h$  pari

In questo caso, per scelta, il simbolo  $\infty$  sul blocco della decomposizione verrà utilizzato per etichettare il vertice di grado 1 appartenente al Longhorn. In questo caso teniamo anche conto della condizione  $p = 0$  in quanto  $v - 1 = 7h - 1$  è dispari. Se teniamo conto che ogni vertice del grafo completo ha grado  $7h - 1$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 \cdot |L_\infty^B| \cdot \frac{7h-1}{2^p} = 7h-1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = \frac{h}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 1 \\ |L_f^B| = \frac{h}{2} - 1 \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_\infty^B| = 1 \quad e \quad |L_f^B| = \frac{h}{2} - 1 \quad (4.2.3)$$

Tenendo conto delle relazioni 4.2.3 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_\infty^B  +  L_f^B $
2	$K_{14}$	0	13	$\mathbb{Z}_{13}$	1 + 0
4	$K_{28}$	0	27	$\mathbb{Z}_{27}$	1 + 1
6	$K_{42}$	0	41	$\mathbb{Z}_{41}$	1 + 2
8	$K_{56}$	0	55	$\mathbb{Z}_{55}$	1 + 3
.....	.....	.....	.....	.....	.....
h	$K_{7h}$	0	$7h-1$	$\mathbb{Z}_{7h-1}$	$1 + \left(\frac{h}{2} - 1\right)$

Tabella 4.2.4: Schema BLOCCHI BASE con  $v = 7h$  e  $h$  pari

#### CASO $v \equiv 1 \pmod{7}$

Sappiamo che  $v = 7h + 1$  e possiamo rappresentare  $K_{7h+1} = \mathbb{Z}_{7h+1}$ . Indichiamo con  $p \in \mathbb{N}_0$  il massimo intero non negativo tale che  $2^p$  divida  $7h + 1$ , sar\`a  $7h + 1 = t \cdot 2^p$  con  $t$  necessariamente dispari. La seguente permutazione:

$$\Omega : \mathbb{Z}_{7h+1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{7h+1}$$

$$\Omega(x) = x + 2^p \text{ se } x \in \mathbb{Z}_{7h+1}$$

genera un sottogruppo di ordine di ordine  $t$ . Ora indichiamo con  $L_M$  (Longhorn Multipli) la famiglia dei Longhorn della decomposizione che contengono spigoli distinti aventi la stessa distanza, i restanti Longhorn li indichiamo con il simbolo  $L_S$  (Longhorn Singoli). L'idea \`e procurarsi un numero finito di Longhorn appartenenti alle due famiglie  $L_M$  ed  $L_S$  su quali facendo agire  $\Omega$  otteniamo tutti i blocchi della decomposizione; questi ultimi li chiameremo BLOCCHI BASE e li indicheremo rispettivamente con i simboli  $L_M^B$  ed  $L_S^B$ .

**Osservazione 4.2.4.** Ricordiamo che  $v = 7h + 1$ ,  $t = \frac{v}{2^p} = \frac{7h + 1}{2^p}$ ,  $|E(L_7)| = 7$  e  $|E(K_{7h+1})| = \frac{(7h + 1) \cdot 7h}{2}$ ; dunque possiamo scrivere:

$$\left( |L_M^B| + |L_S^B| \right) \cdot \frac{7h + 1}{2^p} \cdot 7 = \frac{(7h + 1) \cdot 7h}{2} \implies$$

$$|L_M^B| + |L_S^B| = h \cdot 2^{p-1} \quad (4.2.4)$$

Vediamo di particularizzare la relazione 8.1.4 prendendo in esame i seguenti casi:

a) SOTTOCASO  $v = 7h + 1$  con  $h$  dispari

In questo caso la massima distanza è pari a  $\frac{7h + 1}{2}$  e tali distanze sono in numero di  $\frac{7h + 1}{2}$ . Posizioneremo la distanza  $\frac{7h + 1}{2}$  su un Longhorn Multiplo, dunque se teniamo conto che il numero di distanze massime è in numero di  $\frac{7h + 1}{2}$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} |L_M^B| \cdot \frac{7h + 1}{2^p} = \frac{7h + 1}{2} \\ |L_M^B| + |L_S^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_M^B| = 2^{p-1} \\ |L_M^B| + |L_S^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_M^B| = 2^{p-1} \\ |L_S^B| = (h - 1) \cdot 2^{p-1} \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_M^B| = 2^{p-1} \quad e \quad |L_S^B| = \left( \frac{h - 1}{2} \right) \cdot 2^p \quad (4.2.5)$$

Tenendo conto delle relazioni 4.2.5 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_M^B  +  L_S^B $
1	$K_8$	3	1	$\mathbb{Z}_8$	$4 + 0 \cdot 8$
3	$K_{22}$	1	11	$\mathbb{Z}_{22}$	$1 + 1 \cdot 2$
5	$K_{36}$	2	9	$\mathbb{Z}_{36}$	$2 + 2 \cdot 4$
7	$K_{50}$	1	25	$\mathbb{Z}_{50}$	$1 + 3 \cdot 2$
9	$K_{64}$	6	1	$\mathbb{Z}_{64}$	$32 + 4 \cdot 64$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$h$	$K_{7h+1}$	$p$	$\frac{7h + 1}{2^p}$	$\mathbb{Z}_{7h+1}$	$2^{p-1} + \left( \frac{h - 1}{2} \right) \cdot 2^p$

Tabella 4.2.5: Schema BLOCCHI BASE con  $v = 7h + 1$  e  $h$  dispari

b) SOTTOCASO  $v = 7h + 1$  con  $h$  pari

In questo caso la massima distanza vale  $\frac{7h}{2}$  e tali distanze sono in numero di  $\frac{7h}{2}$ , non ci sono BLOCCHI MULTIPLI. Essendo  $h$  pari risulterà  $p = 0$  e quindi si ottiene:

$$\begin{cases} |L_M^B| = 0 \\ |L_M^B| + |L_S^B| = \frac{h}{2} \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_M^B| = 0 \quad e \quad |L_S^B| = \frac{h}{2} \quad (4.2.6)$$

Tenendo conto delle relazioni 4.2.6 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_M^B  +  L_S^B $
2	$K_{15}$	0	15	$\mathbb{Z}_{15}$	0 + 1
4	$K_{29}$	0	29	$\mathbb{Z}_{29}$	0 + 2
6	$K_{43}$	0	43	$\mathbb{Z}_{43}$	0 + 3
8	$K_{57}$	0	57	$\mathbb{Z}_{57}$	0 + 4
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$h$	$K_{7h+1}$	0	$7h + 1$	$\mathbb{Z}_{7h+1}$	$0 + \frac{h}{2}$

Tabella 4.2.6: Schema BLOCCHI BASE con  $v = 7h + 1$  e  $h$  pari

### 4.2.1 Problemi sulla decomposizione di $\mathbf{K}_v$ con $v = 7h + 1$ e $h \geq 1$ dispari

Questo caso merita una particolare attenzione in quando essendo  $v = 7h + 1$  con  $h$  dispari, si ha che  $v$  è pari e potrebbe essere potenza di 2 in questo caso  $t = 1$  ed essendo il sottogruppo  $\Omega$  l'identità non sono in grado di poter descrivere in alcuni casi una decomposizione del *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_{7h+1}$  mediante il Longhorn  $L_7$ .

**Osservazione 4.2.5.** Poiché  $v = 7h + 1$ , ci chiediamo quando accade che  $v = 7h + 1 = 2^n$  e questo ci porta a considerare questa semplice relazione congruenziale:

$$2^n \equiv 1 \pmod{7}$$

Sappiamo che  $2^0 \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $2^1 \equiv 2 \pmod{7}$ ,  $2^2 \equiv 4 \pmod{7}$  e di nuovo accade che  $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ . E' evidente quanto segue:

$$2^n \equiv 1 \pmod{7} \iff n = 3s \quad \text{con} \quad s \geq 1 \quad (4.2.7)$$

Ritornando alla relazione  $v = 7h + 1$ , ricordiamo e li elenchiamo per comodità che i valori di  $v$  a cui siamo interessati sono:

$$8, 22, 36, 50, 64, 78, 92, 106, 120, 134, 148, 162, 176, 190, 204, 218, \dots$$

I parametri  $h$  evidenziati poco prima li possiamo dividere nelle seguenti famiglie:

- (Classe A) con  $v = 22 + 28h$  e  $h \geq 0$
- (Classe B) con  $v = 8 + 28h$  e  $h \geq 1$  dispari
- (Classe C) con  $v = 8 + 28h$  e  $h \geq 0$  pari

**Osservazione 4.2.6.** Per la Classe A è possibile ottenere una decomposizione e sarà esposta in seguito, osserviamo che in questo caso essendo  $v = 22 + 28h$ , sarà  $v = 2 \cdot (11 + 14h)$  e quindi  $t = 11 + 14h$  e  $p = 1$ .

**Osservazione 4.2.7.** Per la Classe B è possibile ottenere una decomposizione e sarà esposta in seguito, osserviamo in questo caso che essendo  $v = 8 + 28h$ , sarà  $v = 2^2 \cdot (2 + 7h)$  e di conseguenza  $t = 2 + 7h$  e  $p = 2$ .

**Osservazione 4.2.8.** Per la Classe C si presentano delle evidenti difficoltà, in alcuni casi perchè il sottogruppo ha ordine 1 (come visto poco prima con  $v = 2^{3s}$  con  $s \geq 1$ ) e in altri casi ho delle difficoltà nell'etichettare i Longhorn per ottenere una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$ .

### 4.3 Esistenza di $L_7$ -disegni di ordine $v = 2^{3s}$ con $s \geq 1$

I contributi di questa sezione 4.3 e delle relative sottosezioni sono stati ottenuti grazie alla collaborazione con il prof. M. Buratti che ringrazio.

Il caso per  $s = 1$  è stato risolto elaborando una costruzione "sviluppata a mano" che permette di ottenere una  $L_7$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_8$ , nella seguente tabella sono elencati i 4 *Longhorn* utili allo scopo:

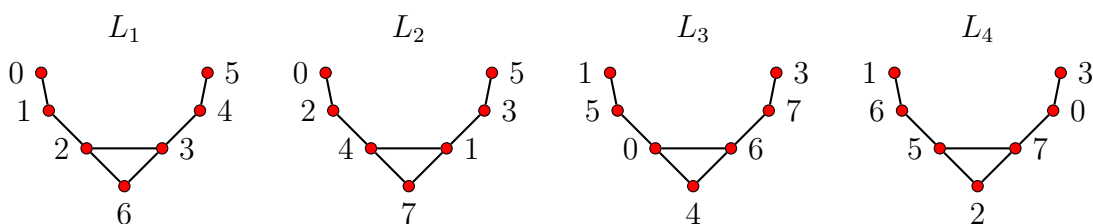


Tabella 4.3.7: Un  $L_7$ -disegno di ordine 8

Il caso generale  $v = 2^{3s}$  con  $s \geq 1$  si risolve prendendo spunto dalle osservazioni esposte nella prossima sezione.

#### 4.3.1 Grafo multipartito $K_{m \times n}$ e sua decomposizione

**Definizione 4.3.1.** Assegnati gli interi  $m, n \geq 1$ , il *Grafo Multipartito*  $K_{m \times n}$  è il grafo semplice che ha come insieme di vertici  $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$  con ciascun insieme  $V_i$  avente  $n$  elementi, mentre  $\{x, y\}$  è uno spigolo del *Grafo Multipartito* se e solo se  $x \in V_i$  e  $y \in V_j$  con  $i \neq j$ .

**Osservazione 4.3.2.** Un sottogruppo  $H$  di ordine  $n$  di un gruppo  $G$  di ordine  $m \cdot n$  individua il grafo multipartito  $K_{m \times n}$  le cui  $m$  parti sono i laterali di  $H$  in  $G$ . Tale grafo si può indicare con  $K_{G:H}$ .

**Osservazione 4.3.3.** Siano  $H_1, \dots, H_t$  grafi con vertici in  $G$ , tutti isomorfi ad un grafo  $H$ , le cui liste delle differenze hanno per unione il complementare di  $H$  in  $G$ . Allora tutti i possibili traslati in  $G$  di  $H_1, \dots, H_t$  formano una  $H$ -decomposizione di  $K_{G:H}$ .

### 4.3.2 Un $L_7$ -disegno di ordine 64

La sua esistenza è garantita tenendo conto delle osservazioni fatte nella precedente sezione e di quanto segue:

- A) Considero il sottogruppo  $H = \{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\}$  di ordine 8 di  $\mathbb{Z}_{64}$
- B) Considero i laterali:  $H, H + 1, H + 2, H + 3, H + 4, H + 5, H + 6, H + 7$
- C) Considero 4 Longhorn che sui relativi spigoli presentano una lista di differenze di  $\mathbb{Z}_{64}$  che non si trovano in  $H$  e quindi se  $d$  è una differenza:  $1 \leq d \leq 32$  escludendo 8, 16, 24, 32:

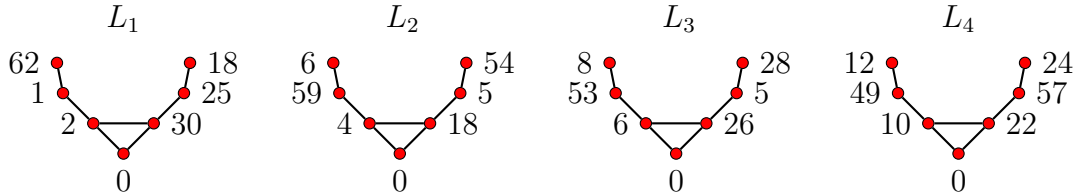


Tabella 4.3.8: I 4 Longhorn con indici in  $\mathbb{Z}_{64}$

A questo punto per ottenere un  $L_7$ -disegno di ordine 64 è sufficiente prendere 4 Longhorn in ciascun laterale per ottenere una sua decomposizione e per ciascun blocco  $L_1, L_2, L_3, L_4$  facciamo i traslati in in  $\mathbb{Z}_{64}$ . Conteggiando i blocchi si ottiene:

$$\mathbf{b} = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 64 = 32 + 256 = 288$$

Sappiamo che  $|E(K_{64})| = 63 \cdot 32 = 288 \cdot 7$

### 4.3.3 Un $L_7$ -disegno di ordine $v = 2^{3s}$ con $s \geq 2$

Avendo preso spunto dalla soluzione nel caso  $v = 64$ , si tenta di interpretare cosa succede in generale e quindi si delinea il seguente schema:

$s=1$  In  $\mathbb{Z}_8$  si considerano i 4 Longhorn.

$s=2$  In  $\mathbb{Z}_{64}$  si considerano il sottogruppo  $H = \{0, 8, \dots, 56\}$  di ordine 8, 4 Longhorn con liste delle differenze di  $\mathbb{Z}_{64}$  che non sono in  $H$  *gli otto laterali*.

$$\mathbf{b} = 4 \cdot 8 + 4 \cdot 64 = 32 + 256 = 288 \text{ ok}$$

$s=3$  In  $\mathbb{Z}_{512}$  si considerano il sottogruppo  $H = \{0, 8, \dots, 504\}$  di ordine 64, 32 Longhorn con liste delle differenze di  $\mathbb{Z}_{512}$  che non sono in  $H$  e *gli otto laterali*.

$$\mathbf{b} = 288 \cdot 8 + 32 \cdot 512 = 2304 + 16384 = 18688 \text{ ok}$$

$s=4$  In  $\mathbb{Z}_{4096}$  si considerano il sottogruppo  $H = \{0, 8, \dots, 4088\}$  di ordine 512, 256 Longhorn con liste delle differenze di  $\mathbb{Z}_{4096}$  che non sono in  $H$  e *gli otto laterali*.

$$\mathbf{b} = 18688 \cdot 8 + 256 \cdot 4096 = 149504 + 1048576 = 1198080 \text{ ok}$$

.....

$s \geq 2$  In  $\mathbb{Z}_{2^{3s}}$  si considerano il sottogruppo  $H = \{0, 8, \dots, 2^{3s} - 8\}$  di ordine  $2^{3s-3}$ ,  $2^{3s-4}$  Longhorn con liste delle differenze di  $\mathbb{Z}_{2^{3s}}$  che non sono in  $H$  e *gli otto laterali*.

$$\mathbf{b} = \frac{2^{3 \cdot (s-1)} \cdot (2^{3 \cdot (s-1)} - 1)}{14} \cdot 8 + 2^{3s-4} \cdot 2^{3s} = \frac{2^{3s} \cdot (2^{3s} - 1)}{14} \text{ ok}$$

A questo punto scriviamo i blocchi della decomposizione con  $0 \leq i \leq 2^{3s-4} - 1$ :

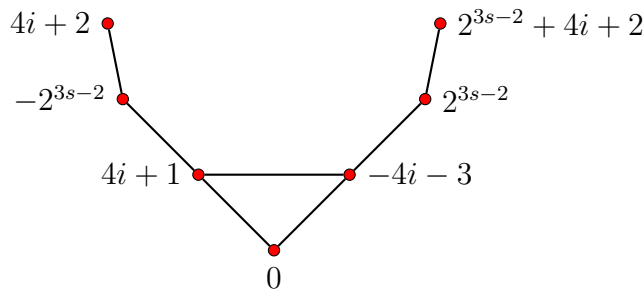


Figura 4.3.1:  $i$ -esimo BLOCCO della decomposizione di  $K_{3s}$

## 4.4 Decomposizione del Grafo Completo mediante il Longhorn $L_7$

**Osservazione 4.4.1.** *Nelle costruzioni spesso le verifiche dei vari casi individuati sono molto simili tra loro e quindi danno luogo ad enunciati che suonano molto ripetitivi, in ogni caso si è preferito non rinunciare alla completezza della verifica anche al costo di appesantire l'esposizione.*

### 4.4.1 Decomposizione con $v = 7h$ e $h \geq 1$ dispari

Riportiamo in forma compatta i punti che svilupperemo in questa sezione:

#### BLOCCHI INFINITI

- Sul BLOCCO INFINITO  $B_0^\infty$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h - 1$ .
- Sul BLOCCO INFINITO  $B_j^\infty$  ci sono le distanze  $\frac{7h-1}{2}, \frac{7h-3}{2}, \frac{7h-5}{2}$ .
- Sul BLOCCO INFINITO  $B_0^\infty$  i generatori degli spigoli  $\left\{ \frac{7h-3}{2}, 0 \right\}$  e  $\left\{ 7h-2, \frac{7h-1}{2} \right\}$  che hanno la medesima distanza  $\frac{7h-3}{2}$  sono distinti, allo stesso modo sono distinti i generatori degli spigoli  $\left\{ \frac{7h-3}{2}, 1 \right\}$  e  $\left\{ \frac{7h+1}{2}, 7h-2 \right\}$  che hanno distanza  $\frac{7h-5}{2}$ . In alternativa è possibile provare che le etichette sui vertici di grado 2 non sono in relazione  $\sim$  come definita nella sezione 3.3

#### BLOCCHI FINITI

- Sul BLOCCO FINITO  $B_{i0}$  tutte le etichette sono distinte.
- Le distanze sui BLOCCHI FINITI  $B_{ij}$  sono tutte distinte.
- Sui BLOCCHI FINITI  $B_{ij}$  esiste una distanza che vale  $\frac{7h-7}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.

BLOCCHI INFINITI	BLOCCHI FINITI
$B_j^\infty : 0 \leq j \leq 2^{p-1} - 1$	$B_{ij} : 1 \leq i \leq \frac{h-1}{2}$ e $0 \leq j \leq 2^p - 1$

Tabella 4.4.9: CASO  $v = 7h$  e  $h \geq 1$  dispari

**Lemma 4.4.2.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_j^\infty$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h - 1$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$0 < 1 < \frac{7h-3}{2} < \frac{7h-1}{2} < \frac{7h+1}{2} < 7h-2 < 7h-1.$$

■

**Lemma 4.4.3.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_j^\infty$  ci sono le distanze  $\frac{7h-1}{2}, \frac{7h-3}{2}, \frac{7h-5}{2}$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{d}\left(\frac{7h-1}{2} + j, j\right) = \frac{7h-1}{2}.$$

$$\mathbf{d}\left(\frac{7h-3}{2} + j, j\right) = \mathbf{d}\left(7h-2+j, \frac{7h-1}{2} + j\right) = \frac{7h-3}{2}.$$

$$\mathbf{d}\left(\frac{7h-3}{2} + j, 1+j\right) = \mathbf{d}\left(7h-2+j, \frac{7h+1}{2} + j\right) = \frac{7h-5}{2}.$$

■

**Lemma 4.4.4.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_0^\infty$  i generatori degli spigoli  $\left\{\frac{7h-3}{2}, 0\right\}$  e  $\left\{7h-2, \frac{7h-1}{2}\right\}$  che hanno la medesima distanza  $\frac{7h-3}{2}$  sono distinti, allo stesso modo sono distinti i generatori degli spigoli  $\left\{\frac{7h-3}{2}, 1\right\}$  e  $\left\{\frac{7h+1}{2}, 7h-2\right\}$  che hanno distanza  $\frac{7h-5}{2}$ .*

*Dimostrazione.* Il generatore dello spigolo  $\left\{\frac{7h-3}{2}, 0\right\}$  è esso stesso. Determiniamo ora il generatore dello spigolo  $\left\{7h-2, \frac{7h-1}{2}\right\}$ , affermiamo che  $\frac{7h-1}{2} \equiv 2^{p-1} \pmod{2^p}$ , infatti  $\frac{7h-1}{2} = 2^{p-1} + \beta \cdot 2^p \implies 7h-1 = 2^p + \beta \cdot 2^{p+1} \implies t \cdot 2^p = 2^p + \beta \cdot 2^{p+1} \implies \beta = \frac{t-1}{2}$ , che esiste essendo  $t$  dispari. Il generatore dello spigolo  $\left\{7h-2, \frac{7h-1}{2}\right\}$  è lo spigolo  $\left\{2^{p-1}, \frac{7h-3}{2} + 2^{p-1}\right\}$  (osserviamo che  $p \geq 1$ ).

Il generatore dello spigolo  $\left\{\frac{7h-3}{2}, 1\right\}$  è esso stesso. Determiniamo ora il generatore dello spigolo  $\left\{\frac{7h+1}{2}, 7h-2\right\}$ , affermiamo che  $\frac{7h+1}{2} \equiv (2^{p-1} + 1) \pmod{2^p}$ , infatti  $\frac{7h+1}{2} = (2^{p-1} + 1) + \beta \cdot 2^p \implies 7h+1 = 2^p + 2 + \beta \cdot 2^{p+1} \implies 7h-1 = 2^p + \beta \cdot 2^{p+1} \implies t \cdot 2^p = 2^p + \beta \cdot 2^{p+1} \implies \beta = \frac{t-1}{2}$ , che esiste essendo  $t$  dispari. Il generatore dello spigolo  $\left\{\frac{7h+1}{2}, 7h-2\right\}$  è lo spigolo  $\left\{2^{p-1} + 1, \frac{7h-5}{2} + 2^{p-1} + 1\right\}$  (osserviamo che  $p \geq 1$ ) e che  $2^{p-1} + 1 \not\equiv 1 \pmod{2^p}$ .

Proviamo lo stesso risultato in altro modo:

Supponiamo per assurdo che  $7h-2 \sim \frac{7h-3}{2}$ , allora vuol dire che esiste  $\alpha \in \mathbb{N}$  e vale la seguente relazione:

$$7h-2 = \frac{7h-3}{2} + \alpha \cdot 2^p$$

$$14h-4 = 7h-3 + \alpha \cdot 2^{p+1}$$

$$7h-1 = \alpha \cdot 2^{p+1}$$

Ma questo è assurdo in quanto sappiamo che  $v - 1 = t \cdot 2^p$ , ovvero  $7h - 1 = t \cdot 2^p$  e  $2^p$  è la massima potenza di 2 che divide  $7h - 1$ . Concludiamo che  $7h - 2 \approx \frac{7h - 3}{2}$  e quindi le orbite di spigoli, come evidenziato anche nell'esempio 3.4.3, sono disgiunte:

$$\begin{aligned} & \left\langle \left\{ \frac{7h-3}{2} + j, j \right\} \right\rangle \cap \left\langle \left\{ 7h-2+j, \frac{7h-1}{2} + j \right\} \right\rangle = \emptyset. \\ & \left\langle \left\{ \frac{7h-3}{2} + j, 1+j \right\} \right\rangle \cap \left\langle \left\{ 7h-2+j, \frac{7h+1}{2} + j \right\} \right\rangle = \emptyset. \end{aligned}$$

■

**Lemma 4.4.5.** *Sul BLOCCO FINITO  $B_{i_0}$  tutte le etichette sono distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$0 < 2i - 1 < h + 4i - 3 < 2(h + i) - 3 < 2(h + i - 1) < 3(h + 2i) - 4 < 5h + 3i - 5 < 7h - 1.$$

Ricordiamo solo che  $1 \leq i \leq \frac{h-1}{2}$  e  $h$  dispari

- Se  $0 \geq 2i - 1 \implies 0 \geq 1$  e quindi un assurdo.
- Se  $2i - 1 \geq h + 4i - 3 \implies 0 \geq h + 2i - 2 \implies 0 \geq h$  e quindi un assurdo.
- Se  $h + 4i - 3 \geq 2(h + i) - 3 \implies 0 \leq -h + 2i \implies 0 \leq -1$  e quindi un assurdo.
- Se  $2(h + i) - 3 \geq 2(h + i - 1) \implies -3 \geq -2$  e quindi un assurdo.
- Se  $2(h + i - 1) \geq 3(h + 2i) - 4 \implies 0 \geq h + 4i - 2 \implies 0 \geq h + 2$  e quindi un assurdo.
- Se  $3(h + 2i) - 4 \geq 5h + 3i - 5 \implies 0 \leq -2h + 3i + 1 \implies 0 \leq -h - 1$  e quindi un assurdo.
- Se  $5h + 3i - 5 \geq 7h - 1 \implies 0 \leq -2h + 3i - 4 \implies 0 \leq -h - 11$  e quindi un assurdo.

■

**Lemma 4.4.6.** *Le distanze che compaiono sugli spigoli dei BLOCCHI FINITI sono tutte distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che le distanze sono le seguenti:

$$\mathbf{d}\left((3(h+2i)-4+j, 2(h+i)-3+j)\right) = h+4i-1 \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left((2(h+i)-3+j, j)\right) = 2h+2i-3 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left((2i-1+j, j)\right) = 2i-1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(h+4i-3+j, 2i-1+j\right) = h+2i-2 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h+i-1)+j, h+4i-3+j\right) = h-2i+1 \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(5h+3i-5+j, 2(h+i-1)+j\right) = 3h+i-3 \rightarrow \text{VARIABILE}$$

$$\mathbf{d}\left(h+4i-3+j, j\right) = h+4i-3 \rightarrow \text{PARI}$$

Intanto osserviamo che non ci può essere uguaglianza tra le 3 distanze DISPARI in quanto una qualsiasi uguaglianza comporterebbe  $h=1$  e quindi un assurdo perché in tal caso non esistono BLOCCHI FINITI.

Confrontiamo le distanze PARI e ricordiamo solo che  $1 \leq i \leq \frac{h-1}{2}$  e  $h$  dispari:

- Se  $h+4i-3 = h+4i-1 \implies 3 = -1$  e quindi un assurdo.
- Se  $h+4i-3 = h-2i+1 \implies 6i-4 = 0$  e quindi un assurdo.
- Se  $h+4i-1 = h-2i+1 \implies 6i-2 = 0$  e quindi un assurdo.

Confrontiamo le distanze PARI con quella VARIABILE:

- Se  $3h+i-3 = h+4i-3 \implies 2h = 3i \leq \frac{3h-3}{2}$  e quindi un assurdo.

- Se  $3h + i - 3 = h + 4i - 1 \implies 2h - 2 = 3i \leq \frac{3h - 3}{2}$  e l'unico valore accettabile è  $h = 1$  e in tal caso non ci sono BLOCCHI FINITI.
- Se  $3h + i - 3 = h - 2i + 1 \implies 2h + 3i - 4 = 0$  e tale relazione è assurda perché  $i, h \geq 1$ .

Confrontiamo le distanze DISPARI con quella VARIABILE:

- Se  $3h + i - 3 = 2i - 1 \implies 3h = i + 2 \leq \frac{h - 1}{2} + 2$  e tale relazione è assurda perché  $h \geq 1$ .
- Se  $3h + i - 3 = h + 2i - 2 \implies 2h = i + 1 \leq \frac{h - 1}{2} + 1$  e tale relazione è assurda perché  $h \geq 1$ .
- Se  $3h + i - 3 = 2h + 2i - 3 \implies h = i \leq \frac{h - 1}{2}$  e tale relazione è assurda perché  $h \geq 1$ .

■

**Lemma 4.4.7.** *Sui BLOCCHI FINITI  $B_{ij}$  esiste una distanza che vale  $\frac{7h - 7}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.*

*Dimostrazione.* La distanza  $\mathbf{d}\left(5h + 3i - 5 + j, 2(h + i - 1) + j\right) = 3h + i - 3$  per  $i = \frac{h - 1}{2}$  vale  $\frac{7h - 7}{2}$ . Dimostriamo che tutte le altre distanze sono più piccole di  $\frac{7h - 7}{2}$ .

- Se fosse  $h + 4i - 1 \geq \frac{7h - 7}{2}$ , allora  $5h - 5 \leq 8i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h - 1}{2}$  si avrebbe  $h - 1 \leq 0$  e quindi  $h = 1$  e questo è assurdo in quanto non ci sono BLOCCHI FINITI per  $h = 1$ .
- Se fosse  $2h + 2i - 3 \geq \frac{7h - 7}{2}$ , allora  $3h - 1 \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h - 1}{2}$  si avrebbe  $h + 1 \leq 0$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $2i - 1 \geq \frac{7h - 7}{2}$ , allora  $7h - 5 \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h - 1}{2}$  si avrebbe  $5h - 3 \leq 0$  e quindi un assurdo.

- Se fosse  $h + 2i - 2 \geq \frac{7h - 7}{2}$ , allora  $5h - 3 \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h - 1}{2}$  si avrebbe  $3h - 1 \leq 0$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h - 2i + 1 \geq \frac{7h - 7}{2}$ , allora  $5h + 4i - 9 \leq 0$  e poiché  $h, i \geq 1$  si avrebbe un assurdo.
- Se fosse  $h + 4i - 3 \geq \frac{7h - 7}{2}$ , allora  $5h - 1 \leq 8i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h - 1}{2}$  si avrebbe  $h + 3 \leq 0$  e quindi un assurdo.

■

**Osservazione 4.4.8.** *Dalle informazioni della tabella 4.4.9 si deduce che i BLOCCHI INFINITI sono in numero di  $2^{p-1}$ , i BLOCCHI FINITI sono  $(h - 1) \cdot 2^{p-1}$ . Sappiamo che ogni LONGHORN ha 7 spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = \frac{7h - 1}{2^p}$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:*

$$|E(K_{7h})| = 7 \cdot [2^{p-1} + (h - 1) \cdot 2^{p-1}] \cdot \frac{7h - 1}{2^p}$$

$$|E(K_{7h})| = 7 \cdot [h \cdot 2^{p-1}] \cdot \frac{7h - 1}{2^p}$$

$$|E(K_{7h})| = \frac{7h \cdot (7h - 1)}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 4.4.9.** *Esiste un  $L_7$ -disegno di ordine  $7h$  con  $h$  dispari.*

#### 4.4.2 Decomposizione con $v = 7h$ e $h \geq 2$ pari

Riportiamo in forma compatta i punti che svilupperemo in questa sezione:

##### BLOCCHI INFINITI

- Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h - 1$ .
- Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le distanze sono distinte e minori o uguali di  $3h$ .

**BLOCCHI FINITI**

- Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h - 1$ .
- Le distanze che compaiono sugli spigoli degli BLOCCHI FINITI  $B_i$  sono tutte distinte.
- Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  esiste una distanza che vale  $\frac{7h-2}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.

BLOCCHI FINITI	BLOCCO INFINITO
$B_i : 1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$	$B_i^\infty : i = \frac{h}{2}$

Tabella 4.4.10: CASO  $v = 7h$  e  $h \geq 2$  pari

**Lemma 4.4.10.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h - 1$ .*

*Dimostrazione.* La seguente relazione è evidente:

$$0 < h - 1 < 3h - 2 < 3h - 1 < 3h < 6h - 1 < 7h - 1.$$

■

**Lemma 4.4.11.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le distanze sono distinte e minori o uguali di  $3h$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che le distanze sono le seguenti:

$$\mathbf{d}(0, h - 1) = h - 1$$

$$\mathbf{d}(3h - 2, h - 1) = 2h - 1$$

$$\mathbf{d}(0, 3h - 2) = 3h - 2$$

$$\mathbf{d}(0, 3h - 1) = 3h - 1$$

$$\mathbf{d}(3h, 3h - 2) = 2$$

$$\mathbf{d}(6h - 1, 3h - 1) = 3h$$

Per  $h = 2$  sono palesemente tutte distinte. Se invece  $h \geq 4$ , allora è vera la seguente relazione:

$$2 < h - 1 < 2h - 1 < 3h - 2 < 3h - 1 < 3h$$

■

**Lemma 4.4.12.** *Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h - 1$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$0 < 2i - 1 < h + 4i - 2 < 2(h + i) - 1 < 2(h + i) < 3(h + 2i) - 1 < 5h + 3i < 7h - 1.$$

Ricordiamo solo che  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  e  $h$  pari.

- Se  $0 \geq 2i - 1 \implies 0 \geq 1$  e quindi un assurdo.
- Se  $2i - 1 \geq h + 4i - 2 \implies 0 \geq h + 2i - 1 \implies 0 \geq h + 1$  e quindi un assurdo perché è  $h \geq 2$ .
- Se  $h + 4i - 2 \geq 2(h + i) - 1 \implies 0 \leq -h + 2i - 1 \implies 0 \leq -3$  e quindi un assurdo.
- Se  $2(h + i) - 1 \geq 2(h + i) \implies -1 \geq 0$  e quindi un assurdo.

- Se  $2(h+i) \geq 3(h+2i) - 1 \implies 0 \geq h+4i-1 \implies 0 \geq h+3$  e quindi un assurdo perché  $h \geq 2$ .
- Se  $3(h+2i) - 1 \geq 5h+3i \implies 0 \leq -2h+3i-1 \implies 0 \leq -h-8$  e quindi un assurdo.
- Se  $5h+3i \geq 7h-1 \implies 0 \leq -2h+3i+1 \implies 0 \leq -h-4$  e quindi un assurdo.

■

**Lemma 4.4.13.** *Le distanze sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  sono tutte distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che le distanze sono le seguenti:

$$\mathbf{d}\left(2i-1, 0\right) = 2i-1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(h+4i-2, 2i-1\right) = h+2i-1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(h+4i-2, 0\right) = h+4i-2 \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h+i)-1, 0\right) = 2h+2i-1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(3(h+2i)-1, 2(h+i)-1\right) = h+4i \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h+i), h+4i-2\right) = h-2i+2 \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(5h+3i, 2(h+i)\right) = 3h+i \rightarrow \text{VARIABILE}$$

Intanto osserviamo che non ci può essere uguaglianza tra le 3 distanze DISPARI in quanto una qualsiasi uguaglianza comporterebbe  $h = 0$  e quindi un assurdo perché sappiamo che  $h$  è pari e  $h \geq 2$ .

Confrontiamo le distanze PARI e ricordiamo solo che  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  e  $h \geq 2$  pari:

- Se  $h + 4i - 2 = h + 4i \implies -2 = 0$  e quindi un assurdo.
- Se  $h + 4i - 2 = h - 2i + 2 \implies 6i - 4 = 0$  e quindi un assurdo.
- Se  $h + 4i = h - 2i + 2 \implies 6i - 2 = 0$  e quindi un assurdo.

Confrontiamo le distanze PARI con quella VARIABILE:

- Se  $3h + i = h + 4i - 2 \implies 2h = 3i - 2 \leq \frac{3h}{2} - 3 - 2$  e quindi un assurdo.
- Se  $3h + i = h + 4i \implies 2h = 3i \leq \frac{3h}{2} - 3$  e quindi un assurdo.
- Se  $3h + i = h - 2i + 2 \implies 2h + 3i - 2 = 0$  e tale relazione è assurda perché  $i \geq 1$  e  $h \geq 2$ .

Confrontiamo le distanze DISPARI con quella VARIABILE:

- Se  $3h + i = 2i - 1 \implies 3h = i - 1 \leq \frac{h}{2} - 1 - 1$  e tale relazione è assurda perché  $h \geq 2$ .
- Se  $3h + i = h + 2i - 1 \implies 2h = i - 1 \leq \frac{h}{2} - 1 - 1$  e tale relazione è assurda perché  $h \geq 2$ .
- Se  $3h + i = 2h + 2i - 1 \implies h = i - 1 \leq \frac{h}{2} - 1 - 1$  e tale relazione è assurda perché  $h \geq 2$ .

■

**Lemma 4.4.14.** *Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  esiste una distanza che vale  $\frac{7h-2}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.*

*Dimostrazione.* La distanza  $\mathbf{d}\left(5h + 3i, 2(h + i)\right) = 3h + i$  per  $i = \frac{h}{2} - 1$  vale  $\frac{7h-2}{2}$ .

Dimostriamo che tutte le altre distanze sono più piccole di  $\frac{7h-2}{2}$ .

- Se fosse  $2i - 1 \geq \frac{7h-2}{2}$ , allora  $7h \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $7h \leq 2h - 4$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h + 2i - 1 \geq \frac{7h-2}{2}$ , allora  $5h \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $5h \leq 2h - 4$  e quindi un assurdo.

- Se fosse  $h + 4i - 2 \geq \frac{7h - 2}{2}$ , allora  $5h \leq 8i - 2$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $5h \leq 4h - 10$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $2h + 2i - 1 \geq \frac{7h - 2}{2}$ , allora  $3h \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $3h \leq 2h - 4$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h + 4i \geq \frac{7h - 2}{2}$ , allora  $5h - 2 \leq 8i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $5h - 2 \leq 4h - 8$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h - 2i + 2 \geq \frac{7h - 2}{2}$ , allora  $5h - 6 \leq 4i$  e poiché  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $5h - 6 \leq 2h - 4$  e quindi un assurdo.

■

**Osservazione 4.4.15.** *Dalle informazioni della tabella 4.4.10 si deduce che i BLOCCHI INFINITI sono in numero di 1, i BLOCCHI FINITI sono  $\frac{h}{2} - 1$ . Sappiamo che ogni LONGHORN ha 7 spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = 7h - 1$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:*

$$|E(K_{7h})| = 7 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{h}{2} - 1 \right) \right] \cdot (7h - 1)$$

$$|E(K_{7h})| = \frac{7h \cdot (7h - 1)}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 4.4.16.** *Esiste un  $L_7$ -disegno di ordine  $7h$  con  $h \geq 2$  pari.*

### 4.4.3 Decomposizione con $v = 22 + 28h$ con $h \geq 0$ (Classe A)

Riportiamo in forma compatta i punti che svilupperemo in questa sezione:

#### BLOCCHI MULTIPLI

- Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $22 + 28h$ .
- Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  ci sono le distanze 1, 2,  $10 + 14h$ ,  $11 + 14h$  e sono tutte distinte.
- Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  le distanze multiple 1, 2,  $10 + 14h$  descrivono spigoli distinti.

**BLOCCHI SINGOLI**

- Sul BLOCCO SINGOLO  $B_{i0}^S$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $22 + 28h$ .
- Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  tutte le distanze sono distinte.
- Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  esiste una distanza che vale  $9 + 14h$  e tutte le altre sono più piccole di essa.

BLOCCO MULTIPLO	BLOCCHI SINGOLI
$B_0^M :$	$B_{ij}^S : 1 \leq i \leq 2h + 1 \text{ e } 0 \leq j \leq 1$

Tabella 4.4.11: **CASO**  $v = 22 + 28h$  e  $h \geq 0$  **Classe A**

**Lemma 4.4.17.** *Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $22 + 28h$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 11 + 14h < 12 + 14h < 22 + 28h.$$

■

**Lemma 4.4.18.** *Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  ci sono le distanze 1, 2,  $10 + 14h$ ,  $11 + 14h$  e sono tutte distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{d}(0, 1) = \mathbf{d}(3, 4) = 1$$

$$\mathbf{d}(0, 2) = \mathbf{d}(1, 3) = 2$$

$$\mathbf{d}\left(11 + 14h, 1\right) = \mathbf{d}\left(12 + 14h, 2\right) = 10 + 14h.$$

$$\mathbf{d}\left(11 + 14h, 0\right) = 11 + 14h.$$

E' facile osservare che vale la seguente relazione:

$$1 < 2 < 10 + 14h < 11 + 14h.$$

■

**Lemma 4.4.19.** *Sul BLOCCO MULTIPLIO  $B_0^M$  le distanze multiple 1, 2,  $10 + 14h$ , descrivono spigoli distinti.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $0 \not\sim 3$  e quindi le seguenti orbite di spigoli sono disgiunte:

$$\langle \{0, 1\} \rangle \cap \langle \{3, 4\} \rangle = \emptyset.$$

Allo stesso modo che  $0 \not\sim 1$  e quindi le seguenti orbite di spigoli sono disgiunte:

$$\langle \{0, 2\} \rangle \cap \langle \{1, 3\} \rangle = \emptyset.$$

Infine si ha che  $1 \not\sim 2$  e quindi le seguenti orbite di spigoli sono disgiunte:

$$\langle \{1, 11 + 14h\} \rangle \cap \langle \{2, 12 + 14h\} \rangle = \emptyset.$$

■

**Lemma 4.4.20.** *Sul BLOCCO SINGOLO  $B_{i0}^S$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $22 + 28h$ .*

**Lemma 4.4.21.** *Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  tutte le distanze sono distinte.*

**Lemma 4.4.22.** *Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  esiste una distanza che vale  $9 + 14h$  e tutte le altre sono più piccole di essa.*

**Osservazione 4.4.23.** *Dalle informazioni della tabella 4.4.11 si deduce che i BLOCCHI MULTIPLI sono in numero di 1, i BLOCCHI SINGOLI sono  $2 \cdot (2h+1)$ . Sappiamo che ogni LONGHORN ha 7 spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = 11 + 14h$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:*

$$|E(K_{22+28h})| = 7 \cdot [1 + 2 \cdot (2h + 1)] \cdot (11 + 14h)$$

$$|E(K_{22+28h})| = (11 + 14h) \cdot (21 + 28h)$$

$$|E(K_{22+28h})| = \frac{(22 + 28h) \cdot (21 + 28h)}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 4.4.24.** *Esiste un  $L_7$ -disegno di ordine  $22 + 28h$  con  $h \geq 0$ .*

#### 4.4.4 Decomposizione con $v = 8 + 28h$ con $h \geq 1$ dispari (Classe B)

Riportiamo in forma compatta i punti che svilupperemo in questa sezione:

##### BLOCCHI MULTIPLI

- Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $8 + 28h$ .
- Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  ci sono le distanze  $1, 2 + 14h, 3 + 14h, 4 + 14h$  e sono tutte distinte.
- Sul BLOCCO MULTIPLO  $B_0^M$  le distanze multiple  $1, 2 + 14h, 3 + 14h$  descrivono spigoli distinti.

##### BLOCCHI SINGOLI

- Sul BLOCCO SINGOLO  $B_{i0}^S$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $8 + 28h$ .
- Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  tutte le distanze sono distinte.
- Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  esiste una distanza che vale  $1 + 14h$  e tutte le altre sono più piccole di essa.

BLOCCHI MULTIPLI	BLOCCHI SINGOLI
$B_j : 0 \leq j \leq 1$	$B_{1j} : 0 \leq j \leq 3$
	$B_{ij} : 2 \leq i \leq 2h \text{ e } 0 \leq j \leq 3$

Tabella 4.4.12: CASO  $v = 8 + 28h$  e  $h$  dispari

**Lemma 4.4.25.** *Sul BLOCCO MULTIPLIO  $B_0^M$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $22 + 28h$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 11 + 14h < 12 + 14h < 22 + 28h.$$

■

**Lemma 4.4.26.** *Sul BLOCCO MULTIPLIO  $B_0^M$  ci sono le distanze 1, 2,  $10 + 14h$ ,  $11 + 14h$  e sono tutte distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathbf{d}(0, 1) = \mathbf{d}(3, 4) = 1$$

$$\mathbf{d}(0, 2) = \mathbf{d}(1, 3) = 2$$

$$\mathbf{d}\left(11 + 14h, 1\right) = \mathbf{d}\left(12 + 14h, 2\right) = 10 + 14h.$$

$$\mathbf{d}\left(11 + 14h, 0\right) = 11 + 14h.$$

E' facile osservare che vale la seguente relazione:

$$1 < 2 < 10 + 14h < 11 + 14h.$$

■

**Lemma 4.4.27.** *Sul BLOCCO MULTIPLIO  $B_0^M$  le distanze multiple 1, 2,  $10 + 14h$ , descrivono spigoli distinti.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che  $0 \not\sim 3$  e quindi le seguenti orbite di spigoli sono disgiunte:

$$\langle \{0, 1\} \rangle \cap \langle \{3, 4\} \rangle = \emptyset.$$

Allo stesso modo che  $0 \not\sim 1$  e quindi le seguenti orbite di spigoli sono disgiunte:

$$\langle \{0, 2\} \rangle \cap \langle \{1, 3\} \rangle = \emptyset.$$

Infine si ha che  $1 \not\sim 2$  e quindi le seguenti orbite di spigoli sono disgiunte:

$$\langle \{1, 11 + 14h\} \rangle \cap \langle \{2, 12 + 14h\} \rangle = \emptyset.$$

■

**Lemma 4.4.28.** *Sul BLOCCO SINGOLO  $B_{i0}^S$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $22 + 28h$ .*

**Lemma 4.4.29.** *Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  tutte le distanze sono distinte.*

**Lemma 4.4.30.** *Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_{ij}^S$  esiste una distanza che vale  $9 + 14h$  e tutte le altre sono più piccole di essa.*

**Osservazione 4.4.31.** *Dalle informazioni della tabella 4.4.12 si deduce che i BLOCCHI MULTIPLI sono in numero di 2, i BLOCCHI SINGOLI sono  $4 \cdot 2h$ . Sappiamo che ogni LONGHORN ha 7 spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = 2 + 7h$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:*

$$|E(K_{8+28h})| = 7 \cdot (2 + 4 \cdot 2h) \cdot (2 + 7h)$$

$$|E(K_{8+28h})| = 7 \cdot (1 + 4h) \cdot (4 + 14h)$$

$$|E(K_{8+28h})| = (4 + 14h) \cdot (7 + 28h)$$

$$|E(K_{8+28h})| = \frac{(8 + 28h) \cdot (7 + 28h)}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 4.4.32.** *Esiste un  $L_7$ -disegno di ordine  $8 + 28h$  con  $h \geq 1$  dispari.*

#### 4.4.5 Decomposizione con $v = 7h + 1$ e $h \geq 2$ pari

Riportiamo in forma compatta i punti che svilupperemo in questa sezione:

##### BLOCCHI SINGOLI

- Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_i^S$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h + 1$ .
- Le distanze sui BLOCCHI SINGOLI  $B_i^S$  sono tutte distinte.
- Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_i^S$  esiste una distanza che vale  $\frac{7h}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.

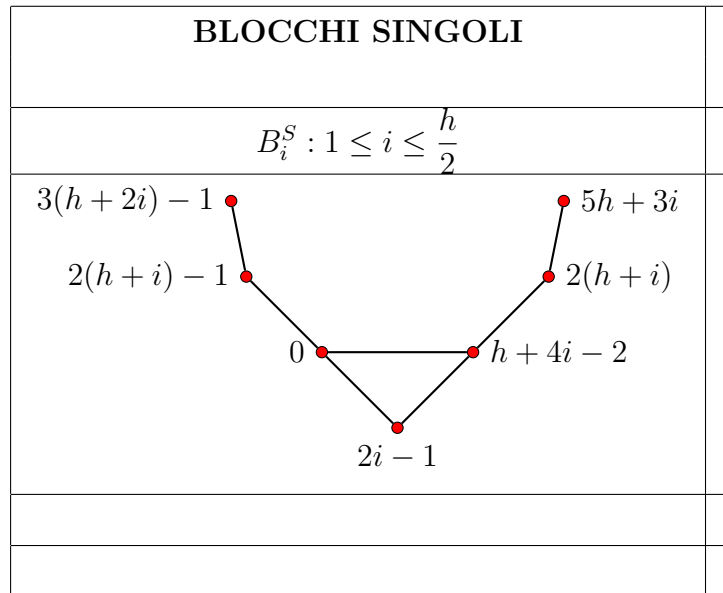


Tabella 4.4.13: **CASO**  $v = 7h + 1$  e  $h \geq 2$  pari

**Lemma 4.4.33.** *Sui BLOCCHI SINGOLI  $B_i^S$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $7h + 1$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che vale la seguente relazione:

$$0 < 2i - 1 < h + 4i - 2 < 2(h + i) - 1 < 2(h + i) < 3(h + 2i) - 1 < 5h + 3i < 7h + 1.$$

Ricordiamo solo che  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  e  $h$  pari.

- Se  $0 \geq 2i - 1 \implies 0 \geq 1$  e quindi un assurdo.
- Se  $2i - 1 \geq h + 4i - 2 \implies 0 \geq h + 2i - 1 \implies 0 \geq h + 1$  e quindi un assurdo perchè è  $h \geq 2$ .
- Se  $h + 4i - 2 \geq 2(h + i) - 1 \implies 0 \leq -h + 2i - 1 \implies 0 \leq -1$  e quindi un assurdo.
- Se  $2(h + i) - 1 \geq 2(h + i) \implies -1 \geq 0$  e quindi un assurdo.
- Se  $2(h + i) \geq 3(h + 2i) - 1 \implies 0 \geq h + 4i - 1 \implies 0 \geq 3h - 1$  e quindi un assurdo perchè  $h \geq 2$ .
- Se  $3(h + 2i) - 1 \geq 5h + 3i \implies 0 \leq -2h + 3i - 1 \implies 0 \leq -h - 2$  e quindi un assurdo.
- Se  $5h + 3i \geq 7h + 1 \implies 0 \leq -2h + 3i - 1 \implies 0 \leq -h - 2$  e quindi un assurdo.

■

**Lemma 4.4.34.** *Le distanze sui BLOCCHI FINITI  $B_i^S$  sono tutte distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che le distanze sono le seguenti:

$$\mathbf{d}\left(2i - 1, 0\right) = 2i - 1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(h + 4i - 2, 2i - 1\right) = h + 2i - 1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(h + 4i - 2, 0\right) = h + 4i - 2 \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h+i)-1, 0\right) = 2h+2i-1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(3(h+2i)-1, 2(h+i)-1\right) = h+4i \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h+i), h+4i-2\right) = h-2i+2 \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(5h+3i, 2(h+i)\right) = 3h+i \rightarrow \text{VARIABILE}$$

Intanto osserviamo che non ci può essere uguaglianza tra le 3 distanze DISPARI in quanto una qualsiasi uguaglianza comporterebbe  $h = 0$  e quindi un assurdo perchè sappiamo che  $h$  è pari e  $h \geq 2$ .

Confrontiamo le distanze PARI e ricordiamo solo che  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  e  $h \geq 2$  pari:

- Se  $h+4i-2 = h+4i \implies -2 = 0$  e quindi un assurdo.
- Se  $h+4i-2 = h-2i+2 \implies 6i-4 = 0$  e quindi un assurdo.
- Se  $h+4i = h-2i+2 \implies 6i-2 = 0$  e quindi un assurdo.

Confrontiamo le distanze PARI con quella VARIABILE:

- Se  $3h+i = h+4i-2 \implies 2h = 3i-2 \leq \frac{3h}{2}-2$  e quindi un assurdo.
- Se  $3h+i = h+4i \implies 2h = 3i \leq \frac{3h}{2}$  e quindi un assurdo.
- Se  $3h+i = h-2i+2 \implies 2h+3i-2 = 0$  e tale relazione è assurda perchè  $i \geq 1$  e  $h \geq 2$ .

Confrontiamo le distanze DISPARI con quella VARIABILE:

- Se  $3h+i = 2i-1 \implies 3h = i-1 \leq \frac{h}{2}-1$  e tale relazione è assurda perchè  $h \geq 2$ .
- Se  $3h+i = h+2i-1 \implies 2h = i-1 \leq \frac{h}{2}-1$  e tale relazione è assurda perchè  $h \geq 2$ .

- Se  $3h + i = 2h + 2i - 1 \implies h = i - 1 \leq \frac{h}{2} - 1$  e tale relazione è assurda perchè  $h \geq 2$

■

**Lemma 4.4.35.** *Sui BLOCCHI FINITI  $B_i^S$  esiste una distanza che vale  $\frac{7h}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.*

*Dimostrazione.* La distanza  $\mathbf{d}\left(5h + 3i, 2(h + i)\right) = 3h + i$  per  $i = \frac{h}{2}$  vale  $\frac{7h}{2}$ . Dimostriamo che tutte le altre distanze sono più piccole di  $\frac{7h}{2}$ .

- Se fosse  $2i - 1 \geq \frac{7h}{2}$ , allora  $7h \leq 4i - 2$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  si avrebbe  $7h \leq 2h$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h + 2i - 1 \geq \frac{7h}{2}$ , allora  $5h \leq 4i - 2$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  si avrebbe  $5h \leq 2h - 2$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h + 4i - 2 \geq \frac{7h}{2}$ , allora  $5h \leq 8i - 4$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  si avrebbe  $5h \leq 4h - 4$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $2h + 2i - 1 \geq \frac{7h}{2}$ , allora  $3h \leq 4i - 2$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  si avrebbe  $3h \leq 2h - 2$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h + 4i \geq \frac{7h}{2}$ , allora  $5h \leq 8i$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  si avrebbe  $5h \leq 4h$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $h - 2i + 2 \geq \frac{7h}{2}$ , allora  $5h - 4 \leq 4i$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2}$  si avrebbe  $5h + 4i - 4 \leq 0$  e quindi un assurdo.

■

**Osservazione 4.4.36.** *Dalle informazioni della tabella 4.4.13 si deduce che i BLOCCHI SINGOLI sono in numero di  $\frac{h}{2}$ . Sappiamo che ogni LONGHORN ha 7 spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = 7h + 1$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:*

$$|E(K_{7h+1})| = 7 \cdot \binom{h}{2} \cdot (7h + 1)$$

$$|E(K_{7h+1})| = \frac{(7h + 1) \cdot 7h}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 4.4.37.** *Esiste un  $L_7$ -disegno di ordine  $7h + 1$  con  $h$  pari.*

# Capitolo 5

## Proprietà di bilanciamento e gruppi di automorfismi

### 5.1 Bilanciamento

Sia  $\mathcal{D}$  un  $H$ -disegno d'ordine  $v$ , cioè una  $H$ -decomposizione del grafo completo  $\mathbf{K}_v$ . Denotando con  $\mathbf{b}$  il numero di blocchi in  $\mathcal{D}$  e con  $\mathbf{k}$  la cardinalità di ciascun blocco, la relazione 1.2.3 con  $\mathbf{n}=\mathbf{b}$  diventa:

$$b = \frac{v \cdot (v - 1)}{k}$$

.

Per un arbitrario vertice  $x$  di  $\mathbf{K}_v$  definiamo  $r(x)$  come il numero di blocchi di  $\mathcal{D}$  che contengono  $x$ . Generalmente il numero di repliche  $r(x)$  del vertice  $x$  è il numero dei blocchi di  $\mathcal{D}$  che contengono  $x$ . L' $H$ -disegno  $\mathcal{D}$  si dice *bilanciato* se  $r(x)$  risulta indipendente da  $x$ , in altre parole deve esistere un intero positivo  $r$  per il quale risulti  $r(x) = r$  per ogni  $x \in V(\mathbf{K}_v)$ .

Per quanto ci consta, la prima istanza di questo concetto risale alla Sezione 1 di [19]. In quel contesto veniva presa in considerazione anche la possibilità di decomporre il multigrafo  $\lambda\mathbf{K}_v$  nel quale ogni coppia di vertici è collegata da uno spigolo multiplo di

valenza  $\lambda$ . La nostra formulazione è presa da [9] e coincide con quella di [19] per  $\lambda = 1$ .

Se  $H$  è un grafo regolare di grado  $d$ , allora ogni  $H$ -disegno di ordine  $v$  risulta bilanciato avente  $r = \frac{v-1}{d}$ . Questa relazione obbliga  $d$  a essere un divisore di  $v-1$ .

**Esempio 5.1.1.** *E' facile vedere che la lista di cammini di lunghezza 2 evidenziata in basso dà luogo a un  $P_2$ -disegno d'ordine 5 che non è bilanciato in quanto  $r(v_1) = 4$  e invece  $r(v_2) = 2$ :*

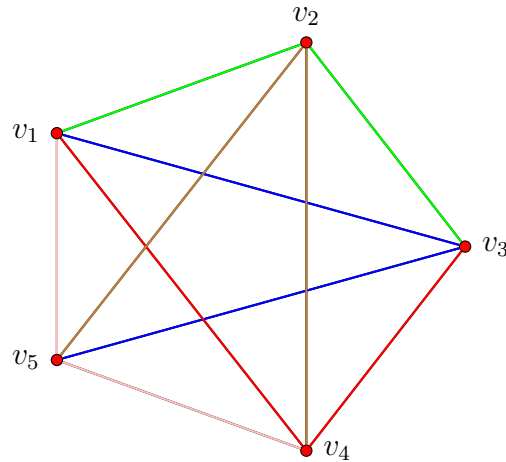


Figura 5.1.1:  $P_2$ -disegno di ordine 5 non bilanciato

Se  $\mathcal{D}$  è un  $H$ -disegno bilanciato d'ordine  $v$ , allora si ha la relazione  $vr = bk$ . La dimostrazione avviene come nel caso dei disegni a blocchi classici, poichè ciascun membro dell'uguaglianza conta il numero di incidenze punto-blocco in  $\mathcal{D}$ .

Possiamo definire lo *spettro bilanciato* di un dato grafo  $H$  come l'insieme di tutti gli interi positivi  $v$  per i quali esiste un  $H$ -disegno bilanciato d'ordine  $v$ .

**Esempio 5.1.2.** *E' facile vedere che la lista di cammini di lunghezza 2 evidenziata in basso dà luogo a un  $P_2$ -disegno d'ordine 5 bilanciato con  $r(x) = 3$  e  $x \in \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ :*

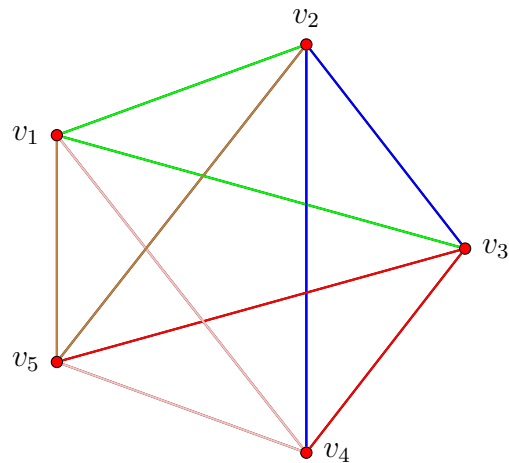


Figura 5.1.2:  $P_2$ -disegno di ordine 5 bilanciato

Possiamo quindi concludere che 5 appartiene allo spettro bilanciato del grafo  $P_2$ ; inoltre, l'esempio 5.1.1 dato sopra mostra che non tutti i  $P_2$ -disegni d'ordine 5 sono bilanciati.

In generale si pone il problema di stabilire se, per un dato grafo  $H$ , lo spettro bilanciato di  $H$  risulti strettamente contenuto nello spettro di  $H$ . In altre parole, stabilire se, pur esistendo  $H$ -disegni d'ordine  $v$ , si possa escludere l'esistenza di  $H$ -disegni bilanciati dello stesso ordine. Le seguenti proposizioni mostrano che questa situazione si può effettivamente presentare.

**Proposizione 5.1.3.** *Sia  $H$  un grafo con  $k$  vertici ed  $e$  spigoli. Supponiamo che esista un  $H$ -disegno bilanciato d'ordine  $v$  con numero di repliche  $r$ , allora è vero quanto segue:*

- a)  $\frac{2 \cdot r \cdot e}{k}$  risulta essere un intero
- b)  $v = \left( \frac{2 \cdot r \cdot e}{k} \right) + 1$
- c) se  $e = k$  allora risulta  $v = (2 \cdot r) + 1$
- d) se  $e = k - 1$  allora  $\frac{2 \cdot r}{k}$  risulta essere un intero

$\frac{2 \cdot r \cdot e}{k}$  risulta essere un intero e abbiamo  $v = \left(\frac{2 \cdot r \cdot e}{k}\right) + 1$ . In particolare, se  $e = k$  allora risulta  $v = (2 \cdot r) + 1$ , mentre se  $e = k - 1$  allora  $\frac{2 \cdot r}{k}$  risulta essere un intero.

*Dimostrazione.* Poichè esiste un  $H$ -disegno, gli spigoli del grafo completo si distribuiscono sui  $b$  blocchi  $H$  della decomposizione e quindi il numero di blocchi  $b = \frac{v \cdot (v - 1)}{2e}$ . Un doppio conteggio standard delle coppie  $(x, B)$  in cui  $x$  è un vertice che compare nel blocco  $B$  dà luogo a  $bk = vr$ . Otteniamo quindi  $\frac{v \cdot (v - 1) \cdot k}{2 \cdot e} = vr$ , da cui  $v - 1 = \frac{2 \cdot r \cdot e}{k}$  e quindi otteniamo i punti a) e b). Da questa ultima relazione si deducono anche c) e d). ■

**Proposizione 5.1.4.** *Sia  $H$  un grafo con  $k$  vertici ed  $e$  spigoli. Supponiamo che risulti  $k = e = m$  essendo  $m$  un primo dispari. Se esiste un  $H$ -disegno bilanciato d'ordine  $v$  con numero di repliche  $r$ , allora risulta  $v \equiv 1$  o  $m \pmod{2m}$ .*

*Dimostrazione.* Sappiamo che il numero  $b = \frac{v \cdot (v - 1)}{2 \cdot e} = \frac{v \cdot (v - 1)}{2 \cdot m}$  è intero, il che implica che il numero primo  $m$  divide esattamente uno degli interi  $v$  o  $v - 1$ . Sostituendo nell'uguaglianza  $bk = vr$  otteniamo  $r = \frac{v - 1}{2}$  e quindi, in particolare,  $v = 2r + 1$  è un intero dispari.

Se  $m$  divide  $v$ , allora esiste un intero dispari  $q$  tale che risulti  $v = mq$ , diciamo  $q = 2t + 1$ . Otteniamo quindi  $v = m(2t + 1) = 2mt + m$  e vale la relazione  $v \equiv m \pmod{2m}$ .

Se  $m$  divide  $v - 1$ , allora esiste un intero pari  $s = 2w$  tale che risulti  $v - 1 = ms$ . Otteniamo  $v = 2mw + 1$  e vale la relazione  $v \equiv 1 \pmod{2m}$ . ■

**Proposizione 5.1.5.** *Se  $H \in \mathcal{L}$  (cioè se  $H$  è uno dei grafi della figura 6.0.1) ed esiste un  $H$ -disegno bilanciato d'ordine  $v$ , allora abbiamo  $v \equiv 1, 7 \pmod{14}$ .*

*Dimostrazione.* Si applica la proposizione 5.1.4 con  $e = k = m = 7$ . ■

## 5.2 Automorfismi

Sia  $\mathcal{D}$  un  $H$ -disegno d'ordine  $v$ , in modo del tutto naturale si definisce *automorfismo* di  $\mathcal{D}$  una permutazione dell'insieme dei vertici  $V(\mathbf{K}_v)$  che muta in sé globalmente la famiglia dei blocchi di  $\mathcal{D}$ . In altre parole  $g \in \text{Sym}(v)$  è un automorfismo di  $\mathcal{D}$  se  $g$  induce una permutazione dei blocchi  $H_1, H_2, \dots, H_b$  di  $\mathcal{D}$ . Chiaramente l'insieme di tutti gli automorfismi di  $\mathcal{D}$  è un gruppo di permutazioni che indicheremo con  $\text{Aut}(\mathcal{D})$ . Un arbitrario sottogruppo di  $\text{Aut}(\mathcal{D})$  verrà genericamente chiamato *un gruppo di automorfismi di  $\mathcal{D}$* . Per gli automorfismi useremo la notazione esponenziale ove ciò torni utile.

**Proposizione 5.2.1.** *Se  $x, y$  sono vertici di  $\mathbf{K}_v$  e  $g$  è un automorfismo di  $\mathcal{D}$  che trasforma  $x$  in  $y$ , allora abbiamo  $r(x) = r(y)$ .*

*Dimostrazione.* L'automorfismo  $g$  induce una biezione tra l'insieme di tutti i blocchi che contengono  $x$  e l'insieme di tutti i blocchi che contengono  $x^g = y$ . ■

Come conseguenza immediata della Proposizione precedente abbiamo:

**Proposizione 5.2.2.** *Se  $\Gamma$  è un gruppo di automorfismi di  $\mathcal{D}$  che opera transitivamente sull'insieme dei vertici di  $\mathbf{K}_v$ , allora  $\mathcal{D}$  è bilanciato.*

Il  $P_2$ -disegno d'ordine 5 visto nell'esempio 5.1.2, avente  $\mathbb{Z}_5$  come insieme dei vertici risulta essere bilanciato poichè ammette il gruppo ciclico generato dalla permutazione  $x \mapsto x + 1 \pmod{5}$  come gruppo di automorfismi transitivo sui vertici.

# Capitolo 6

## Ulteriori decomposizioni di $K_v$

Dopo aver fatto uno studio sulla decomposizione dei *Grafo Completo* mediante il LON-  
GHORN  $L_7$  si è passati ad un'analisi attenta di tutti i grafi semplici aventi 7 vertici  
e 7 spigoli contenenti un ciclo  $C_3$ . Il tentativo è stato quello di verificare se i risultati  
ottenuti nella decomposizione di  $K_v$  mediante Longhorn si potessero estendere ad altri  
grafi. Nella prossima figura riportiamo tutti i grafi semplici a due a due non isomorfi  
con le caratteristiche in precedenza evidenziate:

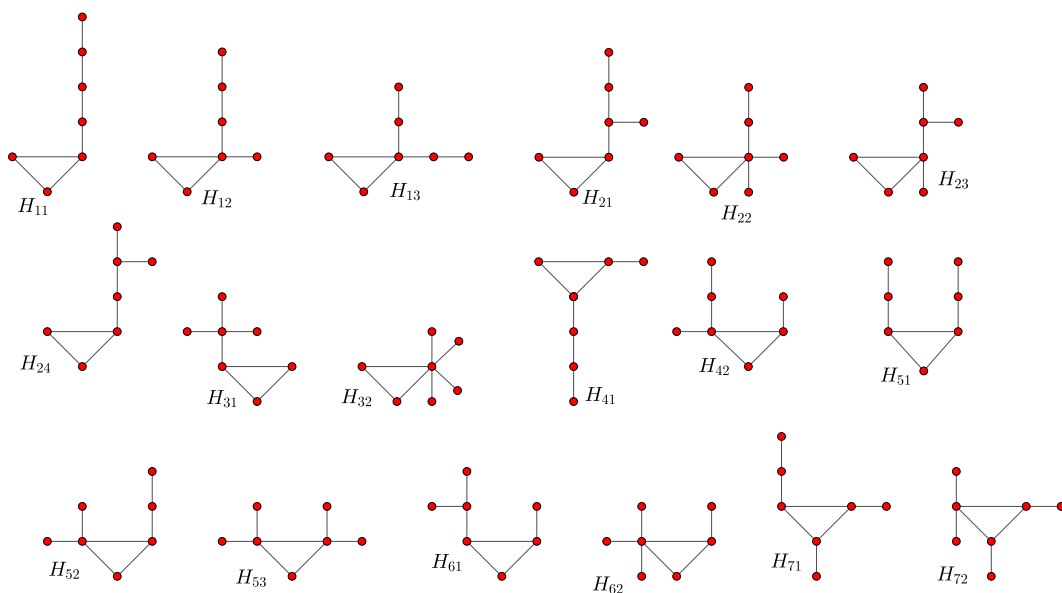


Figura 6.0.1: Elenco dei 18 grafi semplici con 7 vertici e 7 spigoli

## 6.1 Longhorn doppio corno

### 6.1.1 Decomposizione Longhorn doppio corno con $v = 7h$ e $h \geq 1$ dispari

In questa sezione evidenziamo delle parziali decomposizione di  $K_v$  mediante il grafo semplice  $H_{53}$  della figura 6.0.1

BLOCCHI INFINITI	BLOCCHI FINITI
$B_j^\infty : 0 \leq j \leq 2^{p-1} - 1$	$B_{ij} : 1 \leq i \leq \frac{h-1}{2}$ e $0 \leq j \leq 2^p - 1$

Tabella 6.1.1: CASO  $v = 7h$  e  $h \geq 1$  dispari

**6.1.2 Decomposizione Longhorn doppio corno con  $v = 7h$  e  $h \geq 2$  pari**

BLOCCHI FINITI	BLOCCO INFINITO
$B_i : 1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$	$B_i^\infty : i = \frac{h}{2}$

Tabella 6.1.2: CASO  $v = 7h$  e  $h \geq 2$  pari

**6.1.3 Decomposizione Longhorn doppio corno con  $v = 7h + 1$  e  $h \geq 2$  pari**

BLOCCHI SINGOLI	
$B_i : 1 \leq i \leq \frac{h}{2}$	

Tabella 6.1.3: CASO  $v = 7h + 1$  e  $h \geq 2$  pari

# Capitolo 7

## Applicazione dei risultati sviluppati per una $L_5$ -decomposizione di $\mathbf{K}_v$

### 7.1 Condizioni necessarie per l'esistenza di una decomposizione

In questa sezione vogliamo far vedere come la tecnica applicata al Longhorn può essere utilizzata per avere una  $L_5$ -decomposizione del *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_v$ . Ricordiamo che il grafo  $L_5$  è stato introdotto nell'esempio 1.1.8.

Sappiamo che  $|E(L_5)| = 5$ , quindi se cerchiamo una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  deve accadere che 5, numero primo, deve essere un divisore di  $v$  oppure un divisore di  $v - 1$ , insomma vale la seguente:

**Proposizione 7.1.1.** *Se esiste una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  mediante il grafo semplice  $L_5$ , allora sarà  $v \equiv 0(\text{mod } 5)$  oppure  $v \equiv 1(\text{mod } 5)$ .*

Senza riscrivere tutto quello che abbiamo sviluppato per il Longhorn, senza mettere in evidenza alcune difficoltà che abbiamo già discusso nella sezione del Longhorn e che sono legate all'ordine del sottogruppo che agisce sui blocchi, ci limiteremo a riportare una  $L_5$ -decomposizione del *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_v$  nel caso in cui  $v \equiv 0(\text{mod } 5)$  e sia presente un punto *fisso*.

CASO  $v \equiv 0 \pmod{5}$ 

Sappiamo che  $v = 5h$  e possiamo rappresentare  $\mathbf{K}_{5h} = \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{5h-1}$ . Indichiamo con  $p \in \mathbb{N}_0$  il massimo intero non negativo tale che  $2^p$  divida  $5h - 1$ , sarà  $5h - 1 = t \cdot 2^p$  con  $t$  necessariamente dispari. Si consideri la permutazione:

$$\Omega : \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{5h-1} \longrightarrow \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{5h-1}$$

$$\Omega(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \infty. \\ x + 2^p & \text{se } x \in \mathbb{Z}_{5h-1} \end{cases}$$

Ora indichiamo con  $L_\infty$  la famiglia dei Bull della decomposizione che contengono come vertice il simbolo  $\infty$ , i restanti Bull li indichiamo con il simbolo  $L_f$ . L'idea è procurarsi un numero finito di Bull appartenenti alle due famiglie  $L_\infty$  ed  $L_f$  su quali facendo agire  $\Omega$  otteniamo tutti i blocchi della decomposizione; questi ultimi li chiameremo BLOCCHI BASE e li indicheremo rispettivamente con i simboli  $L_\infty^B$  ed  $L_f^B$ .

**Osservazione 7.1.2.** Ricordiamo che  $v = 5h$ ,  $t = \frac{v-1}{2^p} = \frac{5h-1}{2^p}$ ,  $|E(L_5)| = 5$  e  $|E(K_{5h})| = \frac{5h \cdot (5h-1)}{2}$ ; dunque possiamo scrivere:

$$\left( |L_\infty^B| + |L_f^B| \right) \cdot \frac{5h-1}{2^p} \cdot 5 = \frac{5h \cdot (5h-1)}{2} \implies$$

$$|L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \tag{7.1.1}$$

Vediamo di particularizzare la relazione 7.1.1 prendendo in esame:

a) CASO  $v = 5h$  con  $h$  pari

Per scelta il simbolo  $\infty$  sul blocco della decomposizione verrà utilizzato per etichettare il vertice di grado 1 appartenente al Bull. In questo caso teniamo anche conto della condizione  $p = 0$  in quanto  $v - 1 = 5h - 1$  è dispari. Se teniamo conto che ogni vertice del grafo completo ha grado  $5h - 1$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 \cdot |L_\infty^B| \cdot \frac{5h-1}{2^p} = 5h-1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = \frac{h}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 1 \\ |L_f^B| = \frac{h}{2} - 1 \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere (ricordiamo che  $p = 0$ ):

$$|L_\infty^B| = 1 \quad e \quad |L_f^B| = \frac{h}{2} - 1 \quad (7.1.2)$$

Tenendo conto delle relazioni 7.1.2 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_\infty^B  +  L_f^B $
2	$K_{10}$	0	9	$\mathbb{Z}_9$	1 + 0
4	$K_{20}$	0	19	$\mathbb{Z}_{19}$	1 + 1
6	$K_{30}$	0	29	$\mathbb{Z}_{29}$	1 + 2
8	$K_{40}$	0	39	$\mathbb{Z}_{39}$	1 + 3
.....	.....	.....	.....	.....	.....
$h$	$K_{5h}$	0	$5h - 1$	$\mathbb{Z}_{5h-1}$	$1 + \left(\frac{h}{2} - 1\right)$

Tabella 7.1.1: Schema BLOCCHI BASE con  $v = 5h$  e  $h$  pari

## 7.2 Decomposizione del Grafo Completo mediante il BULL

### 7.2.1 Decomposizione con $v = 5h$ e $h \geq 2$ pari

Riportiamo in forma compatta i punti che svilupperemo in questa sezione:

#### BLOCCHI INFINITI

- Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $5h - 1$ .
- Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le distanze sono distinte e minori o uguali di  $2h$ .

**BLOCCHI FINITI**

- Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $5h - 1$ .
- Le distanze che compaiono sugli spigoli degli BLOCCHI FINITI  $B_i$  sono tutte distinte.
- Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  esiste una distanza che vale  $\frac{5h-2}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.

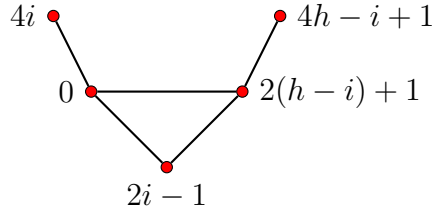
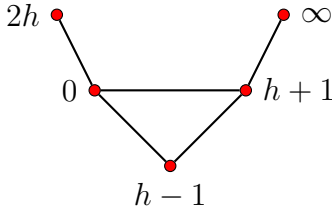
BLOCCHI FINITI	BLOCCO INFINITO
$B_i : 1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$	$B_i^\infty : i = \frac{h}{2}$
	

Tabella 7.2.2: CASO  $v = 5h$  e  $h \geq 2$  pari

**Lemma 7.2.1.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutti le etichette sono distinte e minori di  $5h - 1$ .*

*Dimostrazione.* La seguente relazione è evidente:

$$0 < h - 1 < h + 1 < 2h < 5h - 1.$$

■

**Lemma 7.2.2.** *Sul BLOCCO INFINITO  $B_{\frac{h}{2}}^\infty$  tutte le distanze sono distinte e minori o uguali di  $2h$ .*

*Dimostrazione.* Osserviamo che le distanze sono le seguenti:

$$\mathbf{d}(0, h - 1) = h - 1$$

$$\mathbf{d}(h + 1, h - 1) = 2$$

$$\mathbf{d}(0, h + 1) = h + 1$$

$$\mathbf{d}(0, 2h) = 2h$$

Per  $h = 2$  sono palesemente tutte distinte. Se invece  $h \geq 4$ , allora è vera la seguente relazione:

$$2 < h - 1 < h + 1 < 2h$$

■

**Lemma 7.2.3.** *Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  tutte le etichette sono distinte e minori di  $5h - 1$ .*

*Dimostrazione.* Intanto osserviamo che essendo  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$ , si ottiene facilmente che ogni etichetta è minore di  $5h - 1$ . Osserviamo che le etichette si suddividono nelle seguenti classi:

- $0, 4i$ ; (PARI)
- $2(h - i) + 1$ ; (DISPARI)
- $4h - i + 1$ ; (VARIABILE)

Non esistono molte verifiche da eseguire:

$$2(h - i) + 1 = 4h - i + 1 \implies 2h + i + 1 = 0 \text{ è questo è assurdo.}$$

$$4i = 4h - i + 1 \implies 4h + 1 = 5i \leq \frac{5h}{2} - 5 \text{ è questo è assurdo.}$$

Allo stesso modo si provano le altre relazioni.

■

**Lemma 7.2.4.** *Le distanze sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  sono tutte distinte.*

*Dimostrazione.* Osserviamo che le distanze sono le seguenti:

$$\mathbf{d}\left(2i - 1, 0\right) = 2i - 1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h - i) + 1, 2i - 1\right) = 2(h - 2i + 1) \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h - i) + 1, 0\right) = 2(h - i) + 1 \rightarrow \text{DISPARI}$$

$$\mathbf{d}\left(4i, 0\right) = 4i \rightarrow \text{PARI}$$

$$\mathbf{d}\left(2(h - i) + 1, 4h - i + 1\right) = 2h + i \rightarrow \text{VARIABILE}$$

Intanto osserviamo che non ci può essere uguaglianza tra le due distanze DISPARI in quanto se fosse  $2i - 1 = 2(h - i) + 1 \implies 2h + 2 = 4i \implies h + 1 = 2i$  e quindi un assurdo perchè  $h$  è pari. Non ci può essere uguaglianza tra le due distanze PARI in quanto se fosse  $4i = 2(h - 2i + 1) \implies h + 1 = 4i$  e quindi un assurdo perchè  $h$  è pari.

Confrontiamo le distanze PARI con quella VARIABILE:

- Se  $2h + i = 4i \implies 2h = 3i \leq \frac{3h}{2} - 3$  e quindi un assurdo.
- Se  $2h + i = 2(h - 2i + 1) \implies 2 = 5i$  e quindi un assurdo.

Confrontiamo le distanze DISPARI con quella VARIABILE:

- Se  $2h + i = 2i - 1 \implies 2h + 1 = i \leq \frac{h}{2} - 1$  e quindi un assurdo.
- Se  $2h + i = 2(h - i) + 1 \implies 1 = 3i$  e quindi un assurdo.

■

**Lemma 7.2.5.** *Sui BLOCCHI FINITI  $B_i$  esiste una distanza che vale  $\frac{5h-2}{2}$  e tutte le altre sono più piccole di essa.*

*Dimostrazione.* La distanza  $\mathbf{d}\left(4h-i+1, 2(h-i)+1\right) = 2h+i$  per  $i = \frac{h}{2} - 1$  vale  $\frac{5h-2}{2}$ . Dimostriamo che tutte le altre distanze sono più piccole di  $\frac{5h-2}{2}$ .

- Se fosse  $2i - 1 \geq \frac{5h-2}{2}$ , allora  $5h \leq 4i$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $5h \leq 2h - 4$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $4i \geq \frac{5h-2}{2}$ , allora  $5h - 2 \leq 8i$  e poichè  $1 \leq i \leq \frac{h}{2} - 1$  si avrebbe  $5h - 2 \leq 4h - 8$  e quindi un assurdo.
- Se fosse  $2(h-i) + 1 \geq \frac{5h-2}{2}$ , allora  $h + 4i - 4 \leq 0$  e poichè  $i \geq 1$  e  $h \geq 2$  si avrebbe un assurdo.
- Se fosse  $2(h-2i+1) \geq \frac{5h-2}{2}$ , allora  $h + 8i - 6 \leq 0$  e poichè  $i \geq 1$  e  $h \geq 2$  si avrebbe un assurdo.

■

**Osservazione 7.2.6.** *Dalle informazioni della tabella 7.2.2 si deduce che i BLOCCHI INFINITI sono in numero di 1, i BLOCCHI FINITI sono  $\frac{h}{2} - 1$ . Sappiamo che ogni LONGHORN ha 5 spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = 5h - 1$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:*

$$|E(K_{5h})| = 5 \cdot \left[ 1 + \left( \frac{h}{2} - 1 \right) \right] \cdot (5h - 1)$$

$$|E(K_{5h})| = \frac{5h \cdot (5h - 1)}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 7.2.7.** *Esiste un  $L_5$ -disegno di ordine  $5h$  con  $h$  pari.*

# Capitolo 8

## Sul Longhorn Generalizzato $L_{3+2k}$

Nella prima parte della tesi è stato studiato il problema relativo alla ricerca di una  $L_7$ -decomposizione del *Grafo Completo*  $\mathbf{K}_v$ ; il passo successivo è stato quello di studiare e generalizzare i risultati che sono stati ottenuti per il Longhorn. Questo capitolo raccoglie i primi lavori relativi a tale generalizzazione, il tutto si trova in una fase iniziale e le relazioni scritte meritano un maggior approfondimento. L'idea in ogni caso è abbastanza semplice, si considera un ciclo  $C_3$  ed ad esso in due suoi punti si "attaccano" due cammini di lunghezza  $k$  ovvero un  $P_k$ . Il grafo che vogliamo utilizzare è il seguente:

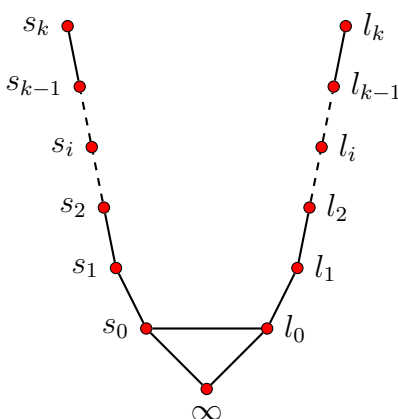


Figura 8.0.1: Longhorn Generalizzato  $L_{3+2k}$

D'ora in poi assumeremo che  $3 + 2k$  sia un numero primo.

## 8.1 Condizioni necessarie per l'esistenza di una decomposizione

Sappiamo che  $|E(L_{2k})| = 3 + 2k$ , quindi se cerchiamo una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  deve accadere che il numero primo  $3 + 2k$  deve dividere  $v(v - 1)$  e quindi deve essere un divisore di  $v$  o  $v - 1$ , dunque vale la seguente:

**Proposizione 8.1.1.** *Se esiste una decomposizione del Grafo Completo  $\mathbf{K}_v$  mediante il grafo semplice  $L_{3+2k}$ , allora sarà  $v \equiv 0(\text{mod } (3 + 2k))$  oppure  $v \equiv 1(\text{mod } (3 + 2k))$ .*

Le condizioni evidenziate nella proposizione 8.1.1 saranno discusse separatamente:

### CASO $v \equiv 0(\text{mod } (3 + 2k))$

Poiché  $v = (3 + 2k)h$  il grafo completo  $K_v$  possiamo rappresentarlo con  $\mathbf{K}_{3+2k} = \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{(3+2k)h-1}$ . Indichiamo con  $p \in \mathbb{N}_0$  il massimo intero non negativo tale che  $2^p$  divida  $(3 + 2k)h - 1$ , sarà  $(3 + 2k)h - 1 = t \cdot 2^p$  con  $t$  necessariamente dispari. La seguente permutazione:

$$\Omega : \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{(3+2k)h-1} \longrightarrow \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{(3+2k)h-1}$$

$$\Omega(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = \infty \\ x + 2^p & \text{se } x \in \mathbb{Z}_{(3+2k)h-1} \end{cases}$$

ristretta a  $\mathbb{Z}_{(3+2k)h-1}$  genera un sottogruppo di ordine di ordine  $t$ .

Ora indichiamo con  $L_\infty$  la famiglia dei Longhorn della decomposizione che contengono come vertice il simbolo  $\infty$ , i restanti Longhorn li indichiamo con il simbolo  $L_f$ . L'idea è procurarsi un numero finito di Longhorn appartenenti alle due famiglie  $L_\infty$  ed  $L_f$  su quali facendo agire  $\Omega$  otteniamo tutti i blocchi della decomposizione; questi ultimi li chiameremo BLOCCHI BASE e li indicheremo rispettivamente con i simboli  $L_\infty^B$  ed  $L_f^B$ .

**Osservazione 8.1.2.** *Ricordiamo che  $v = (3 + 2k)h$ ,  $t = \frac{v - 1}{2^p} = \frac{(3 + 2k)h - 1}{2^p}$ ,  $|E(L_{3+2k})| = 3 + 2k$  e  $|E(K_{(3+2k)h})| = \frac{(3 + 2k)h \cdot ((3 + 2k)h - 1)}{2}$ ; dunque possiamo scrivere:*

$$\left(|L_\infty^B| + |L_f^B|\right) \cdot \frac{(3+2k)h-1}{2^p} \cdot (3+2k)h = \frac{(3+2k)h \cdot ((3+2k)h-1)}{2} \implies$$

$$|L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \quad (8.1.1)$$

Vediamo di particularizzare la relazione 4.2.1 prendendo in esame i seguenti casi:

a) SOTTOCASO  $v = (3+2k)h$  con  $h$  dispari

In questo caso, per scelta, il simbolo  $\infty$  sul blocco della decomposizione verrà utilizzato per etichettare il vertice di grado 2 appartenente al ciclo  $C_3$  che compone il Longhorn, dunque se teniamo conto che ogni vertice del grafo completo ha grado  $(3+2k)h-1$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 2 \cdot |L_\infty^B| \cdot \frac{(3+2k)h-1}{2^p} = (3+2k)h-1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 2^{p-1} \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 2^{p-1} \\ |L_f^B| = (h-1) \cdot 2^{p-1} \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_\infty^B| = 2^{p-1} \quad e \quad |L_f^B| = \left(\frac{h-1}{2}\right) \cdot 2^p \quad (8.1.2)$$

Tenendo conto delle relazioni 8.1.2 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_\infty^B  +  L_f^B $
h	$K_{(3+2k) \cdot h}$	p	$\frac{(3+2k)h-1}{2^p}$	$\mathbb{Z}_{(3+2k)h-1}$	$2^{p-1} + \left(\frac{h-1}{2}\right) \cdot 2^p$

Tabella 8.1.1: Schema BLOCCHI BASE con  $v = (3+2k)h$  e  $h$  dispari

b) SOTTOCASO  $v = (3 + 2k)h$  con  $h$  pari

In questo caso, per scelta, il simbolo  $\infty$  sul blocco della decomposizione verrà utilizzato per etichettare il vertice di grado 1 appartenente al Longhorn. Teniamo anche conto della condizione  $p = 0$  in quanto  $v - 1 = (3 + 2k)h - 1$  è dispari. Se teniamo conto che ogni vertice del grafo completo ha grado  $(3 + 2k)h - 1$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} 1 \cdot |L_\infty^B| \cdot \frac{(3 + 2k)h - 1}{2^p} = (3 + 2k)h - 1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 1 \\ |L_\infty^B| + |L_f^B| = \frac{h}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_\infty^B| = 1 \\ |L_f^B| = \frac{h}{2} - 1 \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_\infty^B| = 1 \quad e \quad |L_f^B| = \frac{h}{2} - 1 \quad (8.1.3)$$

Tenendo conto delle relazioni 8.1.3 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_\infty^B  +  L_f^B $
$h$	$K_{(3+2k)h}$	$0$	$(3 + 2k)h - 1$	$\mathbb{Z}_{(3+2k)h-1}$	$1 + \left(\frac{h}{2} - 1\right)$

Tabella 8.1.2: Schema BLOCCHI BASE con  $v = (3 + 2k)h$  e  $h$  pari

CASO  $v \equiv 1 \pmod{(3 + 2k)}$ 

Essendo  $v = (3 + 2k)h + 1$  si ha  $K_{(3+2k)h+1} = \mathbb{Z}_{(3+2k)h+1}$ . Indichiamo con  $p \in \mathbb{N}_0$  il massimo intero non negativo tale che  $2^p$  divida  $(3 + 2k)h + 1$ , sarà  $(3 + 2k)h + 1 = t \cdot 2^p$  con  $t$  necessariamente dispari. La seguente permutazione:

$$\Omega : \mathbb{Z}_{(3+2k)h+1} \longrightarrow \mathbb{Z}_{(3+2k)h+1}$$

$$\Omega(x) = x + 2^p \text{ se } x \in \mathbb{Z}_{(3+2k)h+1}$$

genera un sottogruppo di ordine di ordine  $t$ . Ora indichiamo con  $L_M$  (Longhorn Generalizzati Multipli) la famiglia dei Longhorn Generalizzati della decomposizione che contengono spigoli distinti aventi la stessa distanza, i restanti Longhorn generalizzati li indichiamo con il simbolo  $L_S$  (Longhorn Generalizzati Singoli). L'idea è procurarsi

un numero finito di Longhorn Generalizzati appartenenti alle due famiglie  $L_M$  ed  $L_S$  su quali facendo agire  $\Omega$  otteniamo tutti i blocchi della decomposizione; questi ultimi li chiameremo BLOCCHI BASE e li indicheremo rispettivamente con i simboli  $L_M^B$  ed  $L_S^B$ .

**Osservazione 8.1.3.** Ricordiamo che  $v = (3 + 2k)h + 1$ ,  $t = \frac{v}{2^p} = \frac{(3 + 2k)h + 1}{2^p}$ ,  $|E(L_{(3+2k)})| = (3 + 2k)$  e  $|E(K_{(3+2k)h+1})| = \frac{((3 + 2k)h + 1) \cdot (3 + 2k)h}{2}$ ; dunque possiamo scrivere:

$$\left( |L_M^B| + |L_S^B| \right) \cdot \frac{(3 + 2k)h + 1}{2^p} \cdot (3 + 2k) = \frac{((3 + 2k)h + 1) \cdot (3 + 2k)h}{2} \implies$$

$$|L_M^B| + |L_S^B| = h \cdot 2^{p-1} \quad (8.1.4)$$

Vediamo di particularizzare la relazione 8.1.4 prendendo in esame i seguenti casi:

a) SOTTOCASO  $v = (3 + 2k)h + 1$  con  $h$  dispari

In questo caso la massima distanza è pari a  $\frac{7h + 1}{2}$  e tali distanze sono in numero di  $\frac{7h + 1}{2}$ . Posizioneremo la distanza  $\frac{7h + 1}{2}$  su un Longhorn Generalizzato Multiplo, dunque se teniamo conto che il numero di distanze massime è in numero di  $\frac{(3 + 2k)h + 1}{2}$ , ha senso il seguente semplice sistema lineare:

$$\begin{cases} |L_M^B| \cdot \frac{(3 + 2k)h + 1}{2^p} = \frac{(3 + 2k)h + 1}{2} \\ |L_M^B| + |L_S^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_M^B| = 2^{p-1} \\ |L_M^B| + |L_S^B| = h \cdot 2^{p-1} \end{cases} \implies \begin{cases} |L_M^B| = 2^{p-1} \\ |L_S^B| = (h - 1) \cdot 2^{p-1} \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_M^B| = 2^{p-1} \quad e \quad |L_S^B| = \left( \frac{h - 1}{2} \right) \cdot 2^p \quad (8.1.5)$$

Tenendo conto delle relazioni 8.1.5 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_M^B  +  L_S^B $
h	$K_{(3+2k)h+1}$	$p$	$\frac{(3+2k)h+1}{2^p}$	$\mathbb{Z}_{(3+2k)h+1}$	$2^{p-1} + \binom{h-1}{2} \cdot 2^p$

Tabella 8.1.3: Schema BLOCCHI BASE con  $v = (3+2k)h+1$  e  $h$  dispari

b) SOTTOCASO  $v = (3+2k)h+1$  con  $h$  pari

In questo caso la massima distanza vale  $\frac{(3+2k)h}{2}$  e tali distanze sono in numero di  $\frac{(3+2k)h}{2}$ , non ci sono BLOCCHI MULTIPLI. Essendo  $h$  pari risulterà  $p=0$  e quindi si ottiene:

$$\begin{cases} |L_M^B| = 0 \\ |L_M^B| + |L_S^B| = \frac{h}{2} \end{cases}$$

E quindi in conclusione possiamo scrivere:

$$|L_M^B| = 0 \quad e \quad |L_S^B| = \frac{h}{2} \quad (8.1.6)$$

Tenendo conto delle relazioni 8.1.6 possiamo riportare il seguente schema in tabella:

Indice	Grafo	Esponente	$o(G)$	Gruppo	$ L_M^B  +  L_S^B $
h	$K_{(3+2k)h+1}$	0	$(3+2k)h+1$	$\mathbb{Z}_{(3+2k)h+1}$	$0 + \frac{h}{2}$

Tabella 8.1.4: Schema BLOCCHI BASE con  $v = (3+2k)h+1$  e  $h$  pari

## 8.2 Decomposizione del Grafo Completo mediante il Longhorn Generalizzato

### 8.2.1 Decomposizione con $v = (3 + 2k)h$ e $h \geq 1$ dispari

BLOCCHI INFINITI	
$B_{j,\infty}^h(k) : 0 \leq j \leq 2^{p-1} - 1$	
$s_i =$	$\begin{cases} \frac{i}{2} & \text{se } i \text{ pari} \\ hk + \frac{3h-1}{2} - \frac{i+1}{2} & \text{se } i \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq i \leq k$
$l_i =$	$\begin{cases} hk + \frac{3h-1}{2} + \frac{i}{2} & \text{se } i \text{ pari} \\ (2k+3)h - 1 - \frac{i+1}{2} & \text{se } i \text{ dispari} \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq i \leq k$

Tabella 8.2.5: **CASO**  $v = (3 + 2k)h$  e  $h \geq 1$  **dispari**

**Osservazione 8.2.1.** *Nel caso dei BLOCCHI FINITI ho preferito costruire un'etichettatura che non restituisce la costruzione data per i BLOCCHI FINITI nel caso della  $L_7$ -decomposizione di  $\mathbf{K}_v$ .*

<b>BLOCCHI FINITI</b>	
$B_{ij} : 1 \leq i \leq \frac{h-1}{2} \text{ e } 0 \leq j \leq 2^p - 1$	
$s_{ti} = \begin{cases} (t^2 + t - 1 + 2k) \cdot \frac{h-1}{2} + (t-2)i + 1 & \text{se } 2 \leq t \leq k-2 \\ (t^2 - t - 3 + 2k) \cdot \frac{h-1}{2} + (t-4)i + 1 & \text{se } t = k-1 \\ (t^2 + t - 2) \cdot \frac{h-1}{2} + (t-4)i + 1 & \text{se } t = k \end{cases}$	$l_{ti} = \begin{cases} (t^2 + 2t - 2 + 2k) \cdot \frac{h-1}{2} + (t-2)i & \text{se } 2 \leq t \leq k-2 \\ (t^2 - 6 + 2k) \cdot \frac{h-1}{2} + (t-4)i & \text{se } t = k-1 \\ (t^2 + 2t - 7) \cdot \frac{h-1}{2} + (t-4)i & \text{se } t = k \end{cases}$

Tabella 8.2.6: **CASO**  $v = (3 + 2k)h$  e  $h \geq 1$  **dispari**

**Osservazione 8.2.2.** Dalle informazioni delle tabelle 8.2.5 e 8.2.6 si deduce che i **BLOCCHI INFINITI** sono in numero di  $2^{p-1}$ , i **BLOCCHI FINITI** sono  $(h-1) \cdot 2^{p-1}$ . Sappiamo che ogni **LONGHORN** ha  $3 + 2k$  spigoli e il sottogruppo ha ordine  $t = \frac{(3 + 2k)h - 1}{2^p}$ . Possiamo a questo punto contare il numero di spigoli:

$$|E(K_{(3+2k)h})| = (3 + 2k) \cdot [2^{p-1} + (h - 1) \cdot 2^{p-1}] \cdot \frac{(3 + 2k)h - 1}{2^p}$$

$$|E(K_{(3+2k)h})| = (3 + 2k) \cdot [h \cdot 2^{p-1}] \cdot \frac{(3 + 2k)h - 1}{2^p}$$

$$|E(K_{(3+2k)h})| = \frac{(3 + 2k)h \cdot ((3 + 2k)h - 1)}{2}$$

I precedenti lemmi e l'ultima osservazione permettono di enunciare la seguente:

**Proposizione 8.2.3.** *Esiste un  $L_{3+2k}$ -disegno di ordine  $(3 + 2k)h$  con  $h$  dispari.*

Chiudo il capitolo con due esempi che evidenziano come le relazioni ottenute permettono di costruire decomposizioni di  $K_v$ . Prendiamo il caso  $k = 2$  e  $h = 3$  e quindi stiamo considerando  $\mathbf{K}_{21}$ . Utilizzando le relazioni della tabella 8.2.5 con  $k = 2$  e  $h = 3$  troviamo:

$$s_0 = 0, s_1 = 9, s_2 = 1$$

$$l_0 = 10, l_1 = 19, l_2 = 11$$

Le relazioni generano il seguente BLOCCO INFINITO:

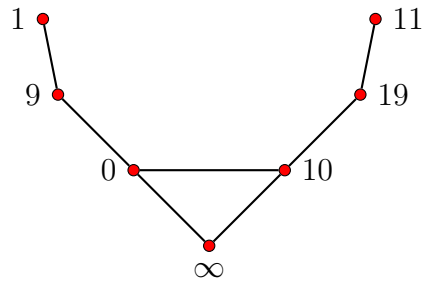


Figura 8.2.1: Il BLOCCO INFINITO  $B_{0,\infty}^3(2)$  del Grafo Completo  $K_{21}$

Riportiamo il seguente ulteriore:

**Esempio 8.2.4.** *Utilizzando le relazioni della tabella 8.2.5 con  $k = 5$  e  $h = 1$  otteniamo i seguenti BLOCCHI INFINITI:*

BLOCCO INFINITO	BLOCCO INFINITO
$B_{0,\infty}^1(5):$	$B_{1,\infty}^1(5):$

Tabella 8.2.7: **CASO**  $v = (3 + 2k)h$  con  $h = 1$  e  $k = 5$ 

Sappiamo che  $v = 13$  e  $p = 2$ ,  $\Omega : \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \{\infty\} \cup \mathbb{Z}_{12}$  con  $\Omega(x) = x + 2^2$ . Abbiamo soltanto due BLOCCHI BASE INFINITI perchè  $0 \leq j \leq 1$ . Su ogni BLOCCO BASE INFINITO agendo  $\Omega$  se ne costruiscono ulteriori 3.

# Bibliografia

- [1] AHO, A.V., HOPCROFT, J. and ULLMAN, J.D.: The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading MA, 1974.
- [2] ADAMS, P. and BRYANT, M., The spectrum problem for the Petersen graph, *J. Graph Theory* 22 (1996), 175–180.
- [3] ADAMS, P., BRYANT, M. and BUCHANAN, M. A Survey on the Existence of  $G$ -designs, *J. Combin. Designs* 16 (2008), 373–410.
- [4] ANDERSON, I., COLBOURN, C.J., DINITZ, J.H., and GRIGGS, T.S.: Design Theory: Antiquity to 1950, in: *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, (C.J. Colbourn, J.H. Dinitz Eds.) Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2007, 11–22.
- [5] ABEL, R.J.R. and GREIG, M.: BIBDs with small Block Size, in: *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, (C.J. Colbourn, J.H. Dinitz Eds.) Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2007, 72–79.
- [6] BATTEN, L.M., and BEUTELSPACHER, A.: *The Theory of Finite Linear Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2009.
- [7] BENZ, W.: *Vorlesungen über Geometrie der Algbren*, Springer, Berlin 1973.
- [8] BRYANT, D. and EL-ZANATI, S.: Graph Decompositions, in: *Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition*, (C.J. Colbourn, J.H. Dinitz Eds.) Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2007, 477–486.
- [9] BERARDI, L., GIONFRIDDO, M., and ROTA, R.: Balanced and Strongly Balanced  $P_k$ -Designs, *Discrete Math.* **312** (2012), 633–636.

- 
- [10] J.-C. Bermond, C. Huang, A. Rosa, and D. Sotteau. Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices. *Ars Combin.*, 10:211–254, 1980.
- [11] BETH, T., JUNGnickel, D. and LENZ, H.: *Design Theory*, Vol. 1, Second Edition, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2006.
- [12] BOSÁK, J.: *Decompositions of Graphs*, Kluwer, Dordrecht 1990.
- [13] BRYANT, D. and RODGER, C.: *Cycle Decompositions*, in: *Handbook of Combinatorial Designs*, Second Edition, (C.J. Colbourn and J.H. Dinitz Eds.) Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2007, 373-382.
- [14] BURATTI, M.: A description of any Regular and 1-rotational Design by Difference methods, in: *Combinatorics 2000*, Università “La Sapienza” Roma (2000), 35–52.
- [15] DEMBOWSKI, P.: *Finite Geometries*, Springer, Berlin 1968.
- [16] GAO, Y., ZUO, H. and KANG, Q. Decompositions of  $\lambda K_v$  into the graphs with 7 points, 7 edges and an even circle, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 27 (2004), 646-658.
- [17] HANANI, H., On quadruple systems, *Canad. J. Math.* 12 (1960), 145–157.
- [18] HANANI, H., Balanced incomplete block designs and related designs, *Discrete Math.* 11 (1975), 255–369.
- [19] HELL, P., and ROSA, A.: Graph decompositions, handcuffed prisoners and balanced  $P$ -designs, *Discrete Math.* **2** (1972), 229–252.
- [20] F. Mazzocca; *Note di Geometria Combinatoria*, ILMIOLIBRO, 2013.
- [21] SERNESI, E.: *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.
- [22] VAN LINT, J.H., and WILSON, R.M.: *A Course in Combinatorics*, Second Edition Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001.
- [23] WALLIS, W.D.: *One-Factorizations*, Kluwer, Dordrecht 1997.

- 
- [24] WILSON, R.M., An existence theory for pairwise balanced designs I, II, J. Combinat. Theory, Ser. A 13 (1972), 220–245.
- [25] WILSON, R.M., An existence theory for pairwise balanced designs III, J. Combinat. Theory, Ser. A 18 (1975), 71–79.
- [26] ZHANG, Y. Decompositions of  $\mathbf{K}_v$  into the graphs with 7 points, 7 edges and a 5-circle, Ars Combinatoria 103 (2012), 193-203.